VISIT…

В инженерных сооружениях, авиастроении, судостроении и машиностроении довольно часто встречаются конструкции, состоящие из отдельных тонкостенных стержней.

Основоположником теории расчета тонкостенных стержней следует считать проф. С. П. Тимошенко, который еще в 1905—1906 гг. при рассмотрении вопроса об общей устойчивости двутавровой балки исследовал изгибающее действие кручения и вывел формулу угла закручивания балки с одним заделанным концом, которую проверил также опытным путем.

В результате испытания измеренные углы поворота очень хорошо совпали с теоретическими.

В 1910 г. проф. С. П. Тимошенко опубликовал составленное им общее уравнение для угла закручивания двутавровой балки, опертой обоими концами и подверженной по длине своей действию крутящего момента.

В 1909—1910 гг. Бах испытал на совместное действие изгиба и кручения швеллерную балку № 30 длиной 3 *м*, нагружая ее двумя сосредоточенными силами в третях пролета, причем как нагрузка, так и опорные реакции проходили параллельно стенке — в одном случае через центр самой стенки, а в другом—через центр тяжести всего сечения. Результаты испытаний показали весьма неравномерное распределение напряжений в полках, в то время как по обычному способу расчета они на одинаковом расстоянии от нейтральной плоскости получаются одинаковыми. Неравномерность распределения напряжений при нагрузке в главной вертикальной плоскости оказалась большей, чем при нагрузке балки в средней плоскости стенки; в крайней части сжатой полки в первом случае появились растягивающие напряжения. На основании этих опытов Бах сделал не совсем правильные выводы. Неравномерность распределения напряжений в швеллере он объяснил несимметричностью сечения.

В том же 1909 г. архитектор Зонтаг, исследуя касательные напряжения в стержнях уголкового, зетового и швеллерного сечений, также пришел к неправильному выводу, что появление кручения при изгибе зависит только от формы сечения.

После 1910 г. мы на протяжении 10 лет не встретили в литературе ни теоретических, ни экспериментальных работ на эту тему. Только в 1920—1922 гг. почти одновременно немецкие инженеры Эггеншвиллер, Циммерман и Майар, анализируя указанные выше опыты Баха над швеллерной балкой, установили тот факт, что нормальный прогиб балки швеллерного сечения (без выпучивания), т. е. то, что мы теперь называем центральным изгибом, происходит тогда, когда нагрузка находится на некотором расстоянии от стенки. Майар нашел, что центр изгиба (Майар назвал эту точку средней точкой сдвига) швеллера № 30 находится на расстоянии 3,1 *см* от средней точки стенки. По Эггеншвиллеру та же величина получилась равной 3,25 *см*.

Между прочим, Майар в одной из своих статей, опубликованных в журнале SBZ № 18 за 1921 г., останавливаясь на неправильных выводах Баха, говорит, что «Бах убедился бы в неправильности своего решения, если бы он приложил таким же образом нагрузку к симметричному сечению, например, если бы он образовал сечение, сдвинув стенку швеллера на середину, т. е. нагрузку прилагал к симметричному двутавровому профилю».

Упомянутые авторы определяли центр изгиба как точку, через которую проходит равнодействующая касательных напряжений, при этом, конечно, кроме вертикальных касательных напряжений, учитывались и горизонтальные, возникающие в полках балки. Наиболее правильно задачу решил Майар. Эггеншвиллер же допустил ошибку. Он считал, что во всех случаях кручение тонкостенного профиля сопровождается появлением нормальных напряжений независимо от того, имеется ли и каково по величине препятствие искривлению сечения, поэтому по его вычислению напряжения получились втрое больше, чем по экспериментам Баха, что он объяснил неточностью проведения экспериментов. На самом же деле, как мы увидим ниже, качество проведения этих экспериментов было очень высокое.

Немецкие инженеры, устанавливая понятие о центре изгиба и давая способ определения этой важной точки сечения тонкостенного стержня, по-видимому, не знали о существовании посвященной этому же вопросу работы проф. Тимошенко. В этой работе, опубликованной еще в 1920 г., проф. Тимошенко предложил точный метод нахождения центра изгиба.

Приближенный метод решения той же задачи дал В. Ритц. Вопросом о нахождении центра изгиба и центра кручения занимался также акад. Б. Г. Галеркин.

Во всех указанных работах положение центра изгиба определяется в зависимости только от формы сечения и не учитывается материал, из которого изготовлен стержень. Опыты, проведенные Дункан, не подтвердили правильности такого решения вопроса. Более точное решение этой задачи дано акад. Л. С. Лейбензоном.

Следующим значительным шагом вперед в теории изучения стесненного кручения являются работы К. Вебера (1924—1926 гг.),

который решил задачу в более общем виде, а именно — для балок любого двухполочного профиля (несимметричного двутавра, зета, швеллера и т. п.). Работу свою он опубликовал в 1926 г. и показал на числовых примерах совпадение найденного им решения с результатами тех же опытов Баха над швеллерной балкой.

Вебер обратил внимание на связь между центром изгиба и центром кручения, т. е. той точкой сечения, которая при стесненном кручении не перемещается. Он доказал, что обе эти точки совпадают.

В 1928 г. появилась известная работа Вагнера, содержащая наиболее существенные элементы современной теории стесненного кручения тонкостенных профилей. В своей работе Вагнер пользуется гипотезой о недеформируемости контура поперечного сечения (в неявном виде этой гипотезой пользовался и Вебер) и впервые устанавливает, что в тонкостенных профилях нормальные напряжения при стесненном кручении распределяются по особому закону, который мы теперь по терминологии проф. Власова называем «законом секториальных площадей».

Наряду с большими достоинствами указанной работы Вагнера следует отметить наличие в ней и принципиальной ошибки. По Вагнеру получается, что изгибная и крутильная формы потери устойчивости независимы друг от друга. Как показали исследования проф. Власова, в общем случае обе формы не встречаются в чистом виде, т. е. отдельно друг от друга; разделение формы потери устойчивости на независимые изгибную и крутильную формы может быть только в частных случаях, например для профилей с двумя осями симметрии.

Исследованием стесненного кручения и потери устойчивости от кручения тавровых, двутавровых, Z-образных и швеллерных стержней занимался также Остенфельд (1931—1932 гг.).

В 1932 г. вышла в свет работа В. Н. Беляева — первая в мировой литературе работа, посвященная стесненному кручению тонкостенных стержней с замкнутым профилем. В этой работе рассматривается стержень замкнутого прямоугольного сечения, состоящий из мощных поясов, тонких стенок и некоторого числа диафрагм. Для упрощения решения задачи В. Н. Беляев предложил считать стенку воспринимающей только касательные напряжения и не работающей на нормальные напряжения. В этой же работе дан анализ статической неопределимости системы, указана наиболее целесообразная основная система и получена удобная система уравнений трех осевых сил для определения лишних неизвестных.

В 1934 г. в журнале «Luftfahrtforchung» № 6 Вагнер и Претчнер опубликовали свою работу, посвященную исследованию потери устойчивости открытых тонкостенных профилей от кручения. В этой работе они дают также практические указания об определении геометрических характеристик стержня и излагают результаты

испытаний профилей уголкового типа на центральное и внецентренное сжатие.

В том же 1934 г. инж. П. М. Знаменский независимо от Вагнера дал формулу для определения критической сжимающей силы при потере устойчивости от кручения.

Наряду с перечисленными работами, относящимися преимущественно к авиационной литературе, в это же время появилась одна из капитальных работ, посвященная тем же вопросам и связанная преимущественно со строительными конструкциями. Это — работа Фридриха и Ганса Блейхов, опубликованная в 1936 г. в трудах второго международного конгресса по мостам и конструкциям.

Подводя итог предшествующим работам, они дали вместе с тем более общее исследование проблемы стесненного кручения и потери устойчивости от кручения. Они фактически пришли к системе трех дифференциальных уравнений деформаций для случая центрального сжатия, которые вывели энергетическим методом.

Однако в работе Блейхов, как замечено проф. Власовым, имеется ряд ошибок. Во-первых, они упустили из виду, что при кручении закон плоских сечений не соблюдается, и заменили заданные в поперечном сечении нормальные напряжения равнодействующей, приняв ее за сосредоточенную силу, приложенную в центре тяжести сечения. Вторая их ошибка состоит в том, что данное ими решение для открытых профилей они распространяют на замкнутые профили, между тем как в замкнутых профилях с недеформируемым контуром нормальные напряжения от кручения всюду равны нулю.

Пользуясь в основном предпосылками Вагнера и Блейхов, полную теорию потери устойчивости тонкостенного профиля при центральном сжатии в пределах пропорциональности дал в 1937 г. Каппус. Он рассматривает напряженное и деформированное состояние тонкостенного стержня при чистом и стесненном кручении. Между прочим, законом секториальных площадей он пользуется еще в теории чистого кручения при определении искажений закручиваемого открытого профиля. Дифференциальные уравнения деформаций он выводит, пользуясь энергетическим методом.

Совершенно особо следует остановиться на работах нашего советского ученого проф. В. З. Власова, который независимо от других авторов в 1936 г. дал наиболее общую теорию расчета любых тонкостенных незамкнутых профилей на совместное действие изгиба и кручения.

Проф. Власов при решении этой задачи отказывается от понятия «стержень» и рассматривает профиль как тонкостенную пространственную складчатую систему, работающую не только на осевые (нормальные и сдвигающие) силы, но также и на моменты, вызывающие изгиб профиля в поперечном направлении.

Исходя из гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения, он установил общий закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня при сов-

местном действии изгиба и кручения. По этому закону нормальные напряжения в самом общем случае работы стержня распределяются по сечению пропорционально секториальной площади. Закон плоских сечений в исследованиях проф. Власова является частным случаем закона секториальных площадей. Им дан также общий метод определения координат центра изгиба и выявлены новые геометрические характеристики сечения тонкостенного профиля; введение этих характеристик в теорию способствует стройному построению ее аналогично соответствующим разделам курса сопротивления материалов.

В 1937 г. проф. Власов распространил свою теорию и на вопросы пространственной устойчивости тонкостенных стержней и получил ряд новых решений. В частности, им наиболее полно разрешена задача об устойчивости стержней при центральном и внецентренном сжатии и при чистом изгибе, а также об устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней при действии поперечной нагрузки. В процессе исследования им попутно была поставлена и разрешена задача о возможности потери устойчивости стержней также и при внецентренном растяжении, если растягивающая сила приложена вне некоторой области, названной проф. Власовым кругом устойчивости. В дальнейшем теория эта была распространена автором также и на вопросы изгибно-крутильных колебаний.

С наибольшей полнотой теорию свою проф. Власов изложил в книге «Тонкостенные упругие стержни», удостоенной Государственной премии.

Руководимая проф. Власовым лаборатория строительной механики Центрального научно-исследовательского института промышленных и гражданских сооружений (ЦНИПС) опубликовала целый ряд экспериментальных исследований, которые она проводила в течение ряда лет с целью проверки указанной выше теории. Таковыми являются: работы проф. Д. В. Бычкова, проф. А. Р. Ржаницына, А. К. Мрощинского, Н. Г. Добудогло, С. И. Стельмаха и др.

В 1938 г. в журнале «Техника воздушного флота» была напечатана статья В. Ф. Киселева, посвященная элементарной теории кручения коробчатой конической балки, сечение которой имело форму многогранника.

В1939 г. вышла в свет работа проф. А. А. Уманского «Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций», в которой он, положив в основу исходные гипотезы, несколько отличные от гипотез Власова, изложил вполне общее решение задачи о стесненном кручении стержня с произвольным закрытым профилем. В этом же году в трудах ЦАГИ была опубликована работа К. А. Минаева, в которой он излагает теоретические и экспериментальные исследования открытых и замкнутых авиационных профилей при потере устойчивости.

В 1940 г. была опубликована в сборнике «Исследования металлических конструкций» статья проф. Д. В. Бычкова «Совмест-

ное действие изгиба и кручения в металлических балках», в которой было предложено уравнение трех изгибно-крутящих бимоментов для расчета неразрезных тонкостенных балок.

В 1941 г. в «Трудах лаборатории строительной механики» были опубликованы работы сотрудников этой лаборатории: Ю. В. Репмана, А. Л. Гольденвейзера и Н. Г. Добудогло, связанные с исследованием устойчивости тонкостенных стержней; А. К. Мрощинского по исследованию складчатых профилей методами теории упругости; А. Р. Ржаницына — исследование работы тонкостенных стержней за пределами упругости и метод произвольных эпюр для определения секториальных характеристик тонкостенного стержня; Д. В. Бычкова, А. К. Мрощинского и С. И. Стельмаха — результаты испытаний различных тонкостенных профилей.

Расчет пространственных рам из тонкостенных стержней впервые в 1943 г. предложил Б. Н. Горбунов, опубликовав в «Прикладной математике и механике» соответствующую статью.

В это же время появились работы Г. Ю. Джанелидзе, в которых дано обоснование теории В. З. Власова и дано исследование работы тонкостенных криволинейных стержней.

В 1944 г. в «Прикладной математике и механике» проф. В. З. Власов опубликовал статью по расчету тонкостенных призматических оболочек, в которой была изложена теория указанных конструкций с плоскими гранями.

В том же 1944 г. вышла в свет работа Д. В. Бычкова и А. К. Мрощинского «Кручение металлических балок», в которой более доступно для проектировщиков изложена рассматриваемая теория расчета открытых тонкостенных стержней, достаточно полно изложена экспериментальная проверка этой теории, предложен целый ряд таблиц для облегчения практического приложения этой теории, предложена теорема для определения секториальных геометрических характеристик, указан способ составления и приведен сортамент этих характеристик для применяемых в практике металлических прокатных профилей и выявлены рациональные типы различных профилей, находящихся в условиях изгиба и кручения.

В 1945 г. проф. Я. Г. Пановко в трудах Ленинградской ВВИА напечатал статью, посвященную расчету призматических тонкостенно-стержневых систем преимущественного замкнутого профиля. В это же время вышла в свет работа А. М. Афанасьева по расчету крыла моноблок на стесненное кручение.

В том же 1945 г. в американском журнале Института Франклина в трех его номерах появилась статья проф. С. П. Тимошенко «Теория изгиба, кручения и продольного изгиба открытых тонкостенных профилей», в которой автор достаточно подробно и методично излагает указанную теорию, но нового по сравнению с советскими работами ничего в ней не предлагает.

В 1946 г. Б. Н. Горбунов и А. Я. Стрельбицкая выпустили книгу «Приближенные методы расчета вагонных рам», в которой достаточно подробно изложили расчет указанной рамы.

Одновременно вышел в свет перевод книги проф. С. П. Тимошенко «Устойчивость упругих систем», в котором была напечатана статья проф. В. З. Власова «Изгиб и кручение тонкостенных стержней и цилиндрических оболочек открытого профиля». В частности, здесь был дан расчет тонкостенных стержней с криволинейной осью. Этой же теме посвящены работы А. А. Уманского, А. Р. Ржаницына, Н. Я. Грюнберг, Ю. П. Григорьева и Р. Л. Малкиной.

По теории расчета замкнутых тонкостенных стержней следует отметить работы Р. А. Ададурова и Г. С. Еленевского (1946—1947 гг.).

В 1947 г. вышла в свет 2-я книга 1-го тома Энциклопедического справочника «Машиностроение», в которой были напечатаны статьи: проф. Д. В. Бычкова «О расчете тонкостенных стержней на прочность», проф. А. Р. Ржаницына «О расчете тонкостенных стержней на устойчивость» и статьи проф. А. А. Уманского «О расчете кривых тонкостенных стержней» и «Тонкостенные трубы и стержни с замкнутым профилем».

В этом же году в трудах Ленинградской ВВИА была напечатана статья проф. Я. Г. Пановко о «Развитии прикладной теории тонкостенных стержней за последние годы».

В том же 1947 г. инж. С. И. Кац защитил диссертацию на тему «Применение теории В. З. Власова к расчету тонкостенных металлических колонн переменного сечения на прочность».

В 1948 г. Гостехиздатом была выпущена книга Г. Ю. Джанелидзе и Я. Г. Пановко «Статика упругих тонкостенных стержней», в которой авторы приводят различные упрощенные теории, основанные на дополнительных допущениях, и излагают элементы разработанной Р. А. Ададуровым общей теории тонкостенных стержней с неизменяемым контуром.

То же издательство и в том же году выпустило книгу Б. Н. Горбунова и А. И. Стрельбицкой по «Теории расчета рам из тонкостенных стержней», в которой авторы дают теорию расчета и приводят подробный расчет вагонной рамы. Эта работа представляет дальнейшее развитие соответствующих работ авторов, напечатанных в Киеве издательством АН УССР.

В 1948 же году появилась книга проф. Я. А. Пратусевича «Вариационные методы в строительной механике», где автор достаточно элементарно излагает теорию стесненного кручения тонкостенного стержня с открытым жестким профилем.

В этом же году вышла в свет книга проф. Д. В. Бычкова «Расчет балочных и рамных систем из тонкостенных элементов», в которой даны основные теоремы об упругих системах в применении к системам из тонкостенных стержней, методика определения перемещений, построенная по принципу, аналогичному определению таковых в нетонкостенных стержнях, дан вывод уравнений трех и пяти бимоментов, введено понятие о бимоментных фокусных отношениях, дана методика расчета плоских рам по методу сил, по методу деформаций и по методу бимоментных

фокусных отношений, выведено уравнение трех депланаций для расчета неразрезных тонкостенных балок, выявлены приближенные методы расчета балок и рам и, наконец, приведен метод расчета плоских рам по способу последовательных приближений.

Из работ, напечатанных в 1948 г., следует отметить еще работы Р. А. Ададурова, С. Н. Кана, Ю. Г. Одинокова и учебное пособие проф. Д. В. Бычкова «Кручение тонкостенных стержней», напечатанное для студентов Московского института инженеров городского строительства Мосгорисполкома.

В 1949 г. вышли в свет «Труды лаборатории строительной механики ЦНИПСа», в которых напечатаны статьи проф. Д. В. Бычкова по расчету неразрезных тонкостенных балок на кручение, кручение тонкостенных стержней при действии продольных сил и о металлических профилях для применения в прогонах под кровли зданий, статья проф. А. Р. Ржаницына по вопросу устойчивости тонкостенных стержней за пределом упругости, статья А. В. Гемерлинга «К расчету внецентренно сжатых тонкостенных стержней» и статья Н. Я. Грюнберга о расчете криволинейных стержней.

В том же 1949 г. вышла в свет капитальная работа проф. В. З. Власова, удостоенная Государственной премии, «Строительная механика тонкостенных пространственных систем», в которой излагается теория призматических и цилиндрических оболочек средней длины. Здесь же показано, что теория тонкостенных стержней представляет собой частный случай общей теории призматических оболочек.

В это же время Оборонгиз выпустил учебное пособие по тонкостенным конструкциям для авиационных вузов. Это пособие написали С. Н. Кан и Я. Г. Пановко. Кроме того, в этом же году были напечатаны работы А. Л. Гольденвейзера, Л. Н. Ставраки, посвященные проблеме устойчивости тонкостенных стержней, работа Б. Л. Абрамяна по кручению призматических стержней с крестообразным поперечным сечением, работа М. Я. Длугач, посвященная крутильной жесткости тонкостенного стержня, усиленного решеткой, и работа Г. Ю. Джанелидзе, в которой была указана редакция депланационной гипотезы, объединяющая гипотезы Власова и Уманского.

В этом же году инж. М. П. Анучкиным была выполнена диссертационная работа на тему «Изыскание оптимальных форм балок и колонн из тонкостенных штампованных профилей», в которой автор предлагает применять рекомендованные им различные тонкостенные штампованные профили, причем в этой диссертации проведена серия экспериментов и даны экономические соображения.

В 1950 и 1951 гг. вышло в свет несколько сборников: «Исследования по вопросам теории и проектирования тонкостенных конструкций» под редакцией проф. В. З. Власова, два сборника «Расчет пространственных конструкций» под редакцией проф. А. А. Уманского и сборник вып. V «Исследования по теории соору-

жений» под редакцией проф. А. А. Гвоздева, проф. И. М. Рабиновича и проф. М. М. Филоненко-Бородича и в этих сборниках был напечатан ряд статей, посвященных исследованию вопросов, связанных с расчетом тонкостенных конструкций, в частности статьи: Б. Н. Горбунова и А. И. Стрельбицкой — по расчету пространственных рам, М. И. Длугач — по расчету тонкостенных стержней, усиленных планками, Ю. П. Григорьева — по расчету кривых тонкостенных брусьев, Б. П. Цибуля — по изгибу и кручению тонкостенных конических оболочек, Я. Г. Пановко — о предельных состояниях цилиндрических тонкостенных конструкций, Л. Н. Ставраки — о прочности пространственных каркасов из тонкостенных стержней открытого профиля, А. И. Сегаль — практические методы расчета тонкостенных конических оболочек и стесненное кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля, А. Р. Ржаницына — о расчете тонкостенных стержней ступенчато-переменного профиля и Л. М. Шаншиашвили — по расчету тонкостенных составных стержней на кручение.

В эти же годы вышли работы Л. Н. Ставраки по устойчивости пространственных каркасов из тонкостенных симметричных профилей, Р. А. Ададурова — по определению напряженного состояния в четырехпоясной призматической прямоугольной коробке, загруженной на концах, и статья В. Л. Бидермана «Особенности расчета тонкостенных профилей на прочность и жесткость», опубликованная под редакцией С. Д. Пономарева в т. I «Расчеты на прочность в машиностроении».

В 1951 г. в справочнике «Машиностроение», т. III, была напечатана статья проф. А. А. Уманского «Расчет тонкостенных стержней».

В этом же году вышло в свет прекрасно написанное инж. А. А. Петропавловским учебное пособие «Расчет тонкостенных стержней» для студентов Московского института инженеров транспорта.

Примерно в это же время была напечатана целая серия работ, посвященных исследованию работы тонкостенного стержня за пределами упругости. Это работы А. И. Стрельбицкой, Р. А. Межлумяна и Я. Г. Пановко.

В 1952 г. издательство ВВИА издало книгу А. М. Афанасьева «Расчет замкнутых оболочек на изгиб и кручение», в которой изложены практические методы расчета замкнутых и многосвязных цилиндрических оболочек и оболочек переменного сечения.

В этом же году вышло два учебных пособия: 2-е издание книги С. Н. Кана и Я. Г. Пановко и книга проф. Ю. Я. Ягна, а инж. Е. Д. Кондратьев защитил диссертацию на тему «Анализ основных положений теории изгиба и кручения стержней односвязного сечения».

В 1953 г. были напечатаны работы: Г. П. Соболевского, посвященная расчету тонкостенных стержней, усиленных планками, В. Г. Александрова — о расчете неразрезных балок на кручение

при подвижной нагрузке, С. А. Амбарцумяна и И. Ф. Образцова — о расчете тонкостенных стержней на устойчивость и А. Ф. Феофанова — по расчету тонкостенных конструкций, предназначенных для проектировщиков авиационных конструкций.

В этом же году вышло в свет восьмое издание учебника «Сопротивление материалов» Н. М. Беляева, в котором была напечатана новая глава о расчете тонкостенных стержней, написанная доцентом Я. И. Кипнисом. Этот раздел написан на исключительно высоком педагогическом уровне и достаточно подробно для учебника.

В том же 1953 г. инж. В. Т. Козлов защитил диссертацию на тему «Экспериментальные исследования деформаций при свободном и стесненном кручении некруглых стержней», в которой дается оценка точности результатов, даваемых теорией Власова применительно к практически важным прокатным профилям, имеющим сравнительно большую толстостенность и закругления.

В 1954 г. в «Докладах АН Арм. ССР» была напечатана работа В. В. Пинаджана по экспериментальному изучеиию действия бимомента в коротких сжатых стержнях двутаврового сечения и в сборнике научных трудов Магнитогорского горнометаллургического института напечатана статья И. А. Пыженкова об устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней.

В этом же году были защищены три диссертации: К. Ф. Ковалевым на тему «Изучение стесненного кручения тонкостенных стержней замкнутого профиля», В. И. Луневым на тему «Вариационный и графический методы расчета тонкостенных стержней открытого профиля» и Н. Ф. Бочаровым на тему «Расчет на прочность рам грузовых автомобилей». В первой из этих диссертаций автор ее описывает опыты, проведенные им над стальными и резиновыми образцами. Опыты эти показали, что стесненное кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля всегда сопровождается значительными деформациями контура сечения, причем форма депланации сечения весьма близка к форме ее при чистом кручении.

Кроме того, в трудах Одесского института инженеров морского флота была напечатана статья доцента Л. И. Календарьяна «К теории пространственной устойчивости стержней, скрепленных с пластиной».

В 1955 г. проф. И. В. Урбан выпустил «Теорию расчета стержневых тонкостенных конструкций» как учебное пособие для вузов железнодорожного транспорта, в котором объединил теории стержней открытого и замкнутого профилей.

В этом же году были напечатаны работы: Бацикадзе по применению метода последовательных приближений к расчету тонкостенных неразрезных балок на кручение, В. В. Болотина — об устойчивости плоской формы изгиба, М. Д. Борисова — о крутильной жесткости составных тонкостенных стержней с упругими планками и работа Л. Н. Воробьева — о влиянии сдвига средин-

ной поверхности на величину деформаций и напряжений в тонкостенных стержнях открытого профиля.

В том же 1955 г. было защищено три дессертации: Н. Д. Рейном на тему «О несущей способности и деформациях тонкостенных стальных балок при изгибе с кручением», А. А. Деркачевым на тему «Некоторые вопросы теории тонкостенных стержней открытого профиля» и П. Д. Мищенко на тему «Расчет тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвига срединной поверхности».

В трудах Бежицкого института транспортного машиностроения была напечатана статья Е. Н. Никольского «Расчет цельнометаллического пассажирского вагона на кручение», в которой автор рассчитывает пассажирский вагон как замкнутую оболочку с вырезами на антисимметричные нагрузки и, в частности, на кручение.

В 1956 г. в «Известиях АН СССР» были напечатаны статьи: Е. Н. Никольского — о деформациях и напряжениях в цилиндрических оболочках и тонкостенных стержнях с неизгибаемым контуром поперечного сечения и М. К. Кожевникова и В. В. Новожилова — о приближенной теории стесненного кручения тонкостенных стержней.

В этом же году в «Инженерном сборнике АН СССР» в отделении технических наук была напечатана статья К. Ф. Ковалова и Ю. Я. Ягна, в которой рассматриваются односвязные профили прямоугольного сечения, «Об особенностях кручения тонкостенных стержней замкнутого профиля». В результате исследования авторы пришли к выводу, что эти стержни нельзя рассчитывать без учета деформаций контура сечения.

В 1957 г. в сборнике выпуска VII «Исследования по теории сооружений» была напечатана статья проф. Н. И. Безухова и канд. техн. наук О. В. Лужина «К расчету тонкостенных стержней на вынужденные колебания», в которой авторы указывают, что при динамическом действии нагрузок влияние стесненности депланаций поперечных сечений тонкостенных стержней оказывается большим, чем при статических нагрузках.

В 1958 г. Московский институт инженеров городского строительства выпустил восьмой сборник, посвященный вопросам строительной механики, в котором помещены статьи проф. Д. В. Бычкова «Расчет тонкостенных стержней односвязного замкнутого профиля», инж. Б. А. Косицына «Расчет пролетных строений мостов с учетом пространственной работы конструкций» и инж. Ю. Ц. Остроменцкого «Расчет неплоских балочных и рамных систем из тонкостенных элементов».

В этом же году вышла книга А. Ф. Феофанова «Строительная механика тонкостенных конструкций», которая посвящена теории и примерам расчета общей прочности тонкостенных авиационных конструкций фюзеляжа и крыла.

В том же 1958 г. вышло в свет второе издание книги проф. В. З. Власова «Тонкостенные пространственные системы»,

значительно переработанное и дополненное, в которой излагаются практические инженерные методы решения ряда новых пространственных задач строительной механики и прикладной теории упругости.

И, наконец, в начале 1959 г. издательством физико-математической литературы было издано переработанное и дополненное второе издание книги проф. В. З. Власова «Тонкостенные упругие стержни», в которой наряду с другими дополнениями помещена бимоментная теория предварительно напряженных стержней и бимоментная теория температурных напряжений.

В том же 1959 г. в сборнике научных трудов Томского электромеханического института инженеров железнодорожного транспорта появились статьи доц. С. М. Мулина «Расчет тонкостенных двутавровых балок на устойчивую прочность» и старшего преподавателя А. Ф. Билевич «Расчет неразрезной тонкостенной балки на упруго вращающихся и упруго оседающих опорах на кручение и на изгиб с кручением».

Еще две статьи последнего из авторов в том же году были напечатаны в «Известиях высших учебных заведений. Строительство и архитектура» «К вопросу определения деформаций в тонкостенном упругом стержне открытого поперечного сечения» и «Расчет на кручение неразрезной тонкостенной балки на упруго вращающихся опорах».

В 1960 г. в журнале «Строительная механика и расчет сооружений» была напечатана статья д-ра техн. наук Б. М. Броуде «К теории тонкостенных стержней открытого профиля», в которой делается попытка обобщить уравнения Киргофа — Клебша для гибкого стержня сплошного сечения в рамках технической теории тонкостенных стержней открытого профиля.

В том же году в журнале «Тракторы и сельхозмашины» была опубликована статья кандидатов техн. наук Г. Г. Баловнева и И. С. Синяговского и инж. Г. С. Трофимова «Экспериментальное исследование прочности и жесткости гнутых тонкостенных профилей» для оценки статической прочности и сравнения рациональных их форм.

Кроме того, в сборнике трудов Криворожского горнорудного института появилась статья инж. И. И. Сорокина «К вопросу определения рациональных размеров сечений тонкостенных рам». В этой статье предлагаются формулы для вычисления оптимальных соотношений геометрических размеров сечений рам из тонкостенных стержней швеллерного и двутаврового профилей.

В 1960 г. Госстройиздатом была напечатана книга Н. Л. Кузьмина, П. А. Лукаша и И. Е. Милейковского «Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек», посвященная Василию Захаровичу Власову, где статьи первого и второго из перечисленных авторов имеют отношение к теме настоящей работы, потому что первая из них излагает прочность, а вторая — устойчивость и колебания тонкостенных стержней.

Из этого краткого исторического обзора развития теории расчета стержневых тонкостенных конструкций достаточно ясно видно, как велики были заслуги русских и советских ученых в развитии этой области науки. Можно с уверенностью сказать, что теория стержневых тонкостенных конструкций у нас в Советском Союзе получила такое развитие и стоит на такой большой высоте, как нигде в мире.

Библиографию по перечисленным в настоящем очерке работам можно найти в книге Д. В. Бычкова и А. К. Мрощинского «Кручение металлических балок», в книге под редакцией проф. И. М. Рабиновича, «Строительная механика в СССР — 1917—1957» и во втором издании книги проф. В. З. Власова «Тонкостенные упругие стержни».

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 1. ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ, ИМЕЮЩИЕ ОТКРЫТОЕ И ЗАМКНУТОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ

Тонкостенным стержнем называется цилиндрической или призматической формы брус, все три измерения которого производятся величинами разных порядков, а именно: длина значи-

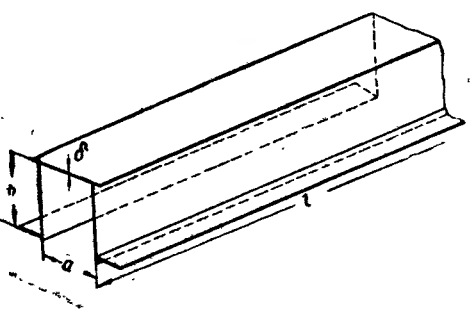


Рис. 1

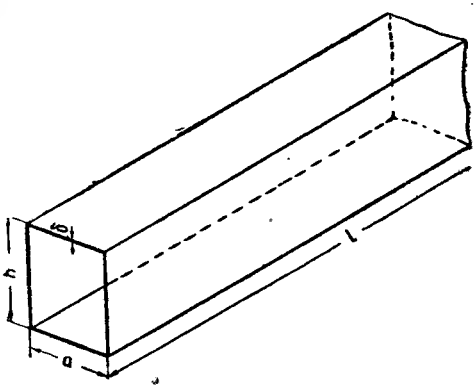


Рис. 2

тельно преобладает над размерами контура (средней линии) поперечного сечения, а размеры контура преобладают над толщиной сечения ($l > a \approx h > \delta$) (рис. 1 и 2).

Тонкостенные стержни могут иметь в поперечном сечении либо замкнутое, либо открытое (незамкнутое) очертание.

Работа замкнутого тонкостенного стержня сравнительно мало отличается от работы сплошного стержня и при отсутствии дефор-

маций контура сечения и деформаций сдвига сечения нормальные напряжения по сечению замкнутого профиля распределяются по плоскостному закону независимо от точки приложения нагрузки в плоскости поперечного сечения.

Для тонкостенных же стержней открытого профиля закон плоских сечений (гипотеза Бернулли) имеет ограниченную область применения. Он соблюдается только при определенном способе приложения внешней нагрузки в плоскости поперечного сечения.

§ 2. ЧИСТОЕ И СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ

Случай закручивания стержня, при котором в поперечных сечениях его нет нормальных напряжений, т. е. элементы скручиваемого стержня не испытывают изгиба, а касательные напряжения

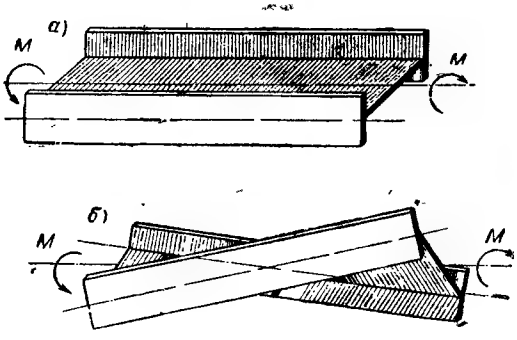


Рис. 3

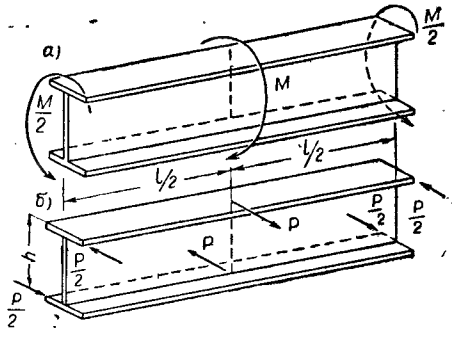


Рис. 4

распределяются по всем сечениям одинаково, называется свободным, нестесненным или чистым кручением.

Рассмотрим двутавровый металлический стержень, находящийся под действием моментов M, приложенных к нему по концам, одинаковых по величине, противоположных по направлению и расположенных в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня (рис. 3,*а*). Действие этой нагрузки состоит в том, что в стержне никаких продольных напряжений не возникает, так как все поперечные сечения стержня деформируются одинаково, а потому волокна, ограниченные двумя сечениями, не испытывают никаких удлинений. Касательные же напряжения, возникающие в этом стержне, распределяются по всем сечениям одинаково. Сечения стержня, плоские до деформации, после деформации не остаются плоскими, а искривляются. Это искажение плоскости поперечного сечения тонкостенного стержня после деформации называется депланацией сечения.

Двутавровый стержень, находящийся в условиях чистого кручения, после деформации представлен на рис. 3,*б*. Как видим, полки двутавра, изменив свое положение по отношению друг к другу,

остались прямыми. Продольные оси полок лишь поворачиваются относительно друг друга на некоторый угол.

Совершенно иначе обстоит дело со случаем закручивания двутаврового стержня, представленном на рис. 4,*а*. В середине этого стержня приложен крутящий момент M, уравновешенный по концам моментами $\frac{M}{2}$.

Представим эти моменты в виде пар сил с плечом h, равным расстоянию между осями полок (рис. 4,*б*). Тогда каждую из полок двутавра можно рассматривать как балку, находящуюся в условиях изгиба под действием сосредоточенной по середине пролета силы. P.

Среднее сечение рассматриваемого стержня по условиям сим-

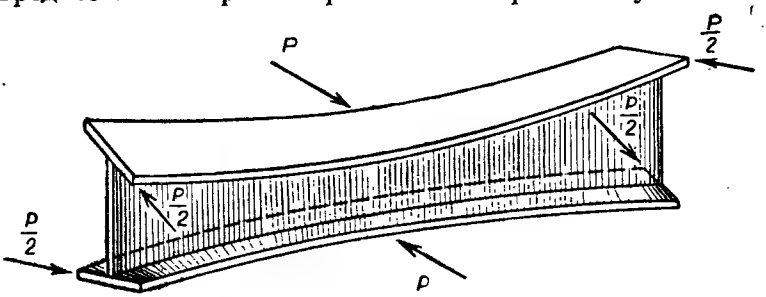


Рис. 5

метрии, очевидно, останется плоским; все же остальные сечения будут выпучиваться и тем сильнее, чем дальше они удалены от среднего сечения. Следовательно, основное условие чистого кручения здесь не соблюдается: различие деформаций смежных сечений влечет за собой появление нормальных напряжений. В каждом поясе двутавра одна половина волокон будет удлиняться, а другая — укорачиваться. Верхняя и нижняя полки двутавра будут изгибаться в разные стороны относительно вертикальной оси стержня. Рассматриваемый двутавр в деформированном состоянии представлен на рис. 5.

Таким образом, кручение в данном случае сопровождается изгибом отдельных элементов стержня и появлением в поперечных сечениях его нормальных напряжений. Поэтому этот случай закручивания называется изгибным или стесненным кручением.

Появление нормальных напряжений здесь сопряжено с наличием препятствий свободному искривлению поперечных сечений, так как продольные перемещения точек сечения в этом случае стеснены.

Наиболее общую теорию расчета тонкостенных стержней на совместное действие изгиба и кручения дал наш советский ученый

порф. В. З. Власов. Теория эта достаточно подробно изложена в его работе «Тонкостенные упругие стержни» (Стройиздат, 1940 г.), удостоенной в 1941 г. Сталинской премии I степени.

§ 3. ГИПОТЕЗЫ, ПОЛОЖЕННЫЕ В ОСНОВУ РАСЧЕТА ОТКРЫТЫХ И ЗАМКНУТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

В основу теории расчета незамкнутых тонкостенных стержней на стесненное кручение обычно кладут следующие две гипотезы: 1) деформации сдвига в средней поверхности стержня равны ну-

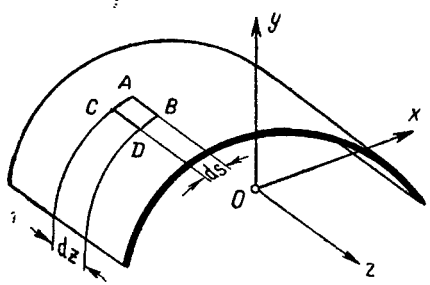


Рис. 6

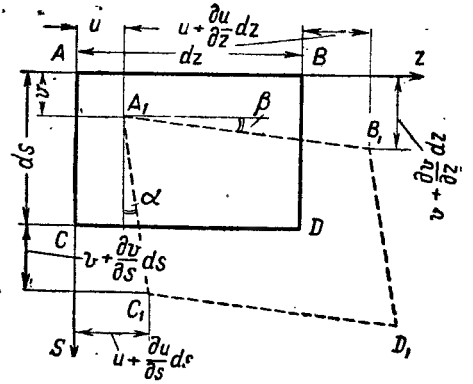


Рис. 7

лю и 2) контур поперечного сечения стержня не деформируется.

С целью пояснения первой из этих гипотез рассмотрим прямоугольный элемент средней поверхности стержня $ABCD$ с размерами dz по направляющей стержня и ds по образующей его (рис. 6). После деформации точки этого элемента получат в пространстве перемещения и сам элемент, вообще говоря, изменит свою форму.

Обозначим перемещение точки A элемента вдоль направляющей (по оси z) через u, а по касательной к контуру — через v. Тогда в соседних точках элемента перемещения получат приращения, которые можно выразить через соответствующие частные производные, а именно: перемещение точки B по направляющей z равно $u+\frac{\partial u}{\partial z}dz$ и по образующей s равно $v+\frac{\partial v}{\partial z}dz$, перемещение точки C по направляющей z равно $u+\frac{\partial u}{\partial s}ds$ и по образующей s равно $v+\frac{\partial v}{\partial s}ds$.

Положение элемента $ABCD$ до и после деформации представлено на рис. 7.

Относительный сдвиг элемента характеризуется суммой углов α и β, на которые поворачиваются стороны AB и CD при положительных приращениях перемещений u и v.

$$\gamma = \alpha + \beta \approx \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial s} ds\right) - u}{ds} + \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial z} dz\right) - v}{dz},$$

откуда

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}. \qquad (1)$$

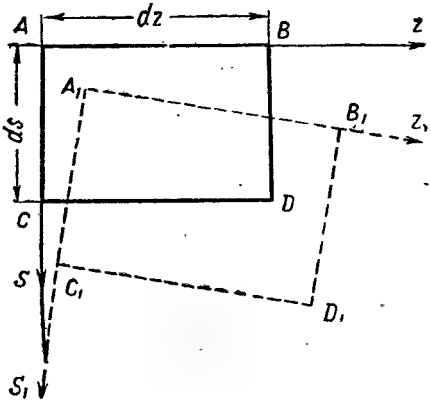


Рис. 8

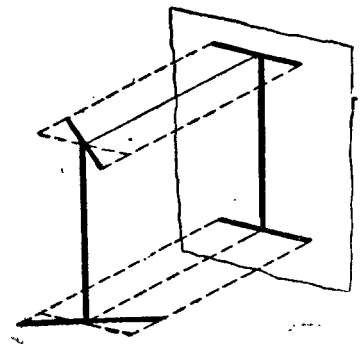


Рис. 9

Отсутствие деформаций сдвига в средней поверхности стержня, т. е. отсутствие угловой деформации между продольными волокнами и контуром стержня, очевидно, определяется равенством $\gamma = 0$.

А это значит, что рассматриваемый элемент $ABCD$ после деформации может получить линейные и угловые перемещения, но не изменит своей формы (останется прямоугольным) (рис. 8).

Таким образом, на основании формулы (1) условие, налагаемое на стержень содержанием первой гипотезы, аналитически может быть выражено так:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \qquad (2$$

Отсутствие деформаций контура сечения тонкостенного стержня, составляющее содержание второй гипотезы, заключается в том, что при переходе стержня из недеформированного состояния в деформированное проекция расстояния между любыми двумя точками поперечного сечения на плоскость поперечного сечения остается постоянной, т. е. сечение может поворачиваться, может быть депланировано так, что после деформации проекция дефор-

мированного сечения на плоскость поперечного сечения остается неизменной. Иллюстрация этой гипотезы для двутаврового сечения представлена на рис. 9.

В основу расчета замкнутых тонкостенных стержней мы не будем класть первую гипотезу, т. е. будем считать, что деформации сдвига в средней поверхности замкнутого стержня отличны от нуля и связаны с обычным законом Гука соотношением

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau}{G}. \tag{3}$$

Что же касается второй гипотезы, то она целиком принимается и при расчете тонкостенных стержней замкнутого профиля, т. е. будем принимать, что контур поперечного сечения замкнутого тонкостенного стержня не деформируется в своей плоскости.

ГЛАВА II

ЧИСТОЕ КРУЧЕНИЕ

§ 4. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЧИСТОГО КРУЧЕНИЯ

Чистым кручением выше мы назвали такой случай закручивания стержня, при котором все поперечные сечения его свободны от нормальных напряжений, а касательные напряжения распределены по всем сечениям одинаково.

Осуществление чистого кручения сплошных круглых или замкнутых полых цилиндрических стержней не представляет затруднений, так как поперечные сечения этих стержней при закручивании остаются плоскими. Чистое же кручение некруглых стержней и, в частности, тонкостенных стержней, как мы видели выше, возможно только при отсутствии препятствий к искажению поперечных сечений; только в этом случае продольные волокна стержня не будут при кручении менять свою длину и в сечениях не возникнут нормальные напряжения.

Практически в некруглых стержнях кручение в чистом виде почти никогда не встречается, так как при передаче внешних крутящих моментов возникают препятствия к искажению поперечных сечений, вследствие чего появляются нормальные напряжения. Однако как теоретическое, так и экспериментальное изучение чистого кручения представляется совершенно необходимым, так как оно входит в качестве составного элемента в общий случай кручения.

Большинство тонкостенных стержней состоит из отдельных прямоугольных полос. Так как расчет таких стержней, как увидим далее, сводится к расчету прямоугольного сечения, то мы начнем с краткого изложения сведений из теории кручения стержня прямоугольного сечения.

Пусть δ и b — толщина и высота (ширина) сечения прямоугольной полосы (рис. 10,*а*);

θ' — относительный угол закручивания, т. е. угол взаимного поворота двух сечений, отстоящих друг от друга на единицу длины (величина, характеризующая депланацию сечения);

$M_{кр}$ — крутящий момент;

G — модуль упругости материала при сдвиге;

J_d — момент инерции сечения полосы при чистом кручении (крутильное сопротивление).

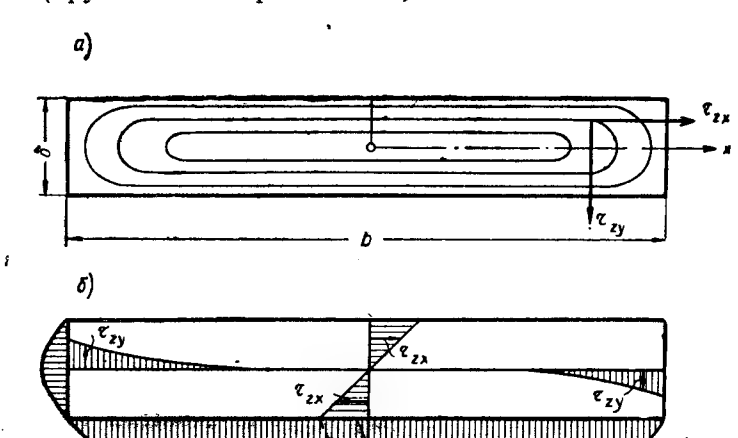


Рис. 10

При малом значении δ по сравнению с b можно из точного решения получить следующие приближенные формулы для основных расчетных величин:

крутящий момент

$$M_{кр} = GJ_d\theta'; \tag{4}$$

момент инерции при чистом кручении

$$J_d = \frac{1}{3}\delta^3(b - 0{,}63\delta) \approx \frac{b\delta^3}{3}; \tag{5}$$

максимальное касательное напряжение

$$\max \tau_{кр} = \frac{M_{кр}\delta}{J_d}. \tag{6}$$

Траектории и эпюры касательных напряжений в сечении скручиваемой прямоугольной полосы изображены на рис. 10,*а* и *б*. Эти эпюры показывают, что касательные напряжения, параллельные длинной стороне прямоугольника (τ_{zx}), распределяются по толщине полосы (вдоль оси y) по линейному закону и на значитель-

ном протяжении вдоль прямоугольника почти не зависят от x, напряжения τ_{zy} имеют значительную величину лишь вблизи коротких сторон прямоугольника.

В восприятии крутящего момента основную роль, очевидно, играют напряжения τ_{zx}, а так как плечо этих напряжений (равное $\frac{2}{3}\delta$) очень мало, то для того, чтобы уравновесить крутящий момент $M_{кр}$, напряжения эти должны быть очень большими. Этим и объясняется весьма малое сопротивление скручиванию такого рода узких прямоугольников.

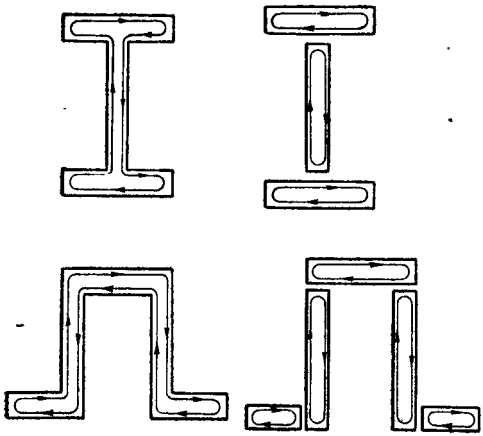


Рис. 11

Максимальное касательное напряжение, определяемое формулой (6), имеет место по середине длинных сторон наружного контура прямоугольника.

Результаты многочисленных теоретических и экспериментальных исследований показали, что формулы (4), (5) и (6) остаются приближенно верными и для других открытых тонкостенных профилей.

1. Для профилей, состоящих из узких прямоугольников, например уголков, двутавров, швеллеров и т. п., момент инерции при чистом кручении определяется формулой

$$J_d = \alpha \sum \frac{b\,\delta^3}{3}, \tag{7}$$

где b и δ — высота и толщина отдельных прямоугольников, из которых составлен профиль;

α — опытный коэффициент, зависящий от формы сечения.

Наибольшая величина касательного напряжения получается по середине наружного края наиболее толстого прямоугольника

$$\max \tau_{кр} = \frac{M_{кр}\,\delta_{max}}{J_d}, \tag{6'}$$

причем J_d в формуле (6′) вводится без поправочного коэффициента α.

Таким образом, при чистом кручении отдельные полоски профиля работают как бы независимо одна от другой и каждая из них воспринимает часть крутящего момента, пропорциональную значению своего момента инерции при чистом кручении J_d.

В справедливости этого легко убедиться, если рассмотреть траектории касательных напряжений в целых и разрезанных профилях (рис. 11).

За исключением небольших областей, где стенки соединяются с полками, касательные напряжения в общих случаях тождественны. Эта неточность в формуле (7) учитывается поправочным коэффициентом α, зависящим от формы поперечного сечения стержня.

2. Теорию расчета на кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля наиболее полно изложил в своей работе проф.

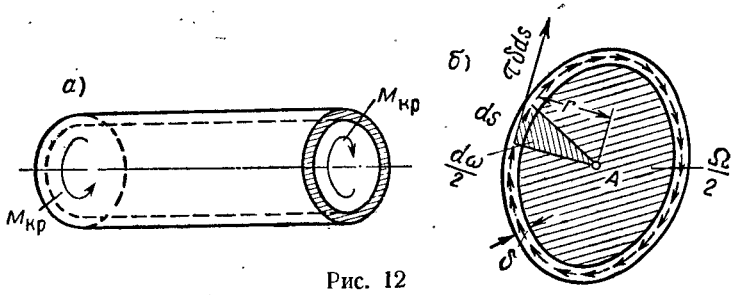


Рис. 12

А. А. Уманский. Будем считать, что в поперечном сечении стержня действует закручивающий момент $M_{кр}$ (рис. 12). Пусть центр кручения замкнутого профиля находится в точке A. Элементарный закручивающий момент от касательных усилий, действующих на этом участке, относительно центра кручения A будет равен

$$dM_{кр} = \tau\delta\, ds\, r,$$

где τ — касательное напряжение, которое мы считаем равномерно распределенным по толщине стенки δ;

r — плечо элементарного усилия $\tau\delta ds$ относительно центра кручения A.

Так как произведение rds равно удвоенной площади заштрихованного на рис. 12, *б* элементарного сектора, обозначив которую через $d\omega$, получим

$$rds = d\omega.$$

Полный момент выразится интегралом

$$M_{кр} = \oint \tau\delta\, ds\, r = \oint \tau\delta\, d\omega = \tau\delta \oint d\omega = \tau\delta\Omega,$$

где Ω равно удвоенной площади, ограниченной средней линией контура сечения стержня (на рис. 12, *б* эта площадь обозначена редкой штриховкой).

Символом $\oint$ обозначен интеграл, взятый по замкнутому контуру.

Откуда получаем

$$\tau = \frac{M_{кр}}{\Omega\delta}. \qquad (8)$$

По формуле (8) определяется среднее касательное напряжение при чистом кручении замкнутого тонкостенного стержня. Эта известная формула Бредта является основной для замкнутых тонкостенных стержней и применяется при практических расчетах.

§ 5. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ЧИСТОГО КРУЧЕНИЯ

1. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ ДЛЯ ИСПЫТАНИЯ СТЕРЖНЕЙ НА ЧИСТОЕ КРУЧЕНИЕ. ИСПЫТАНИЕ ПРОКАТНЫХ ОБРАЗЦОВ

Испытания металлических стержней на чистое кручение производились в лаборатории строительной механики б. ЦНИПС на специальной установке, запроектированной и выполненной под ру-

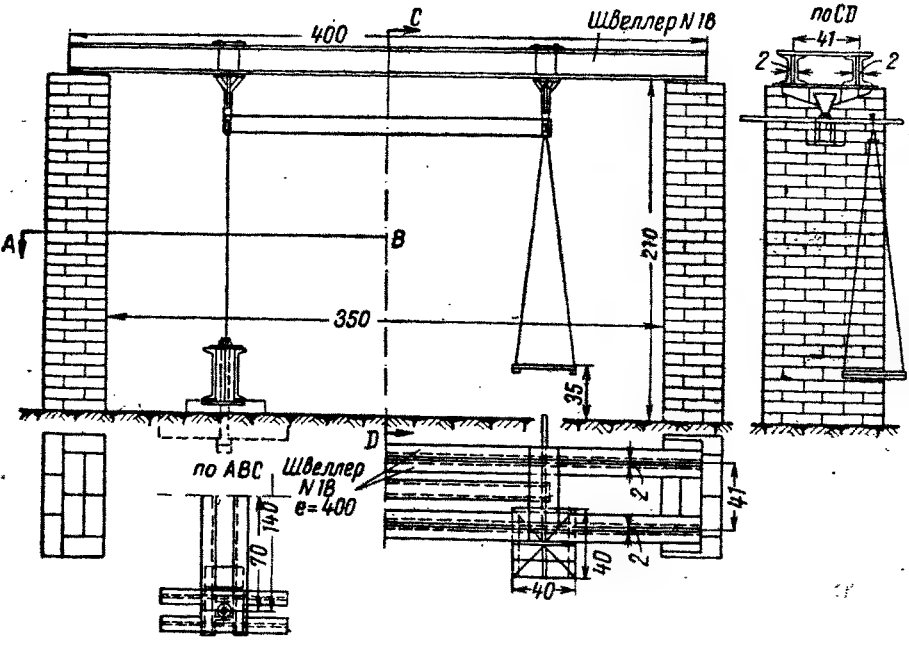


Рис. 13

ководством старшего научного сотрудника Н. Г. Добудогло и техника Ф. А. Перн.

Общий вид этой установки показан на рис. 13, а детали подвесной конструкции к ней показаны на рис. 14.

Образец подвешивается в горизонтальном положении. Один конец его, зажатый в хомуте, закрепляется неподвижно при помо-

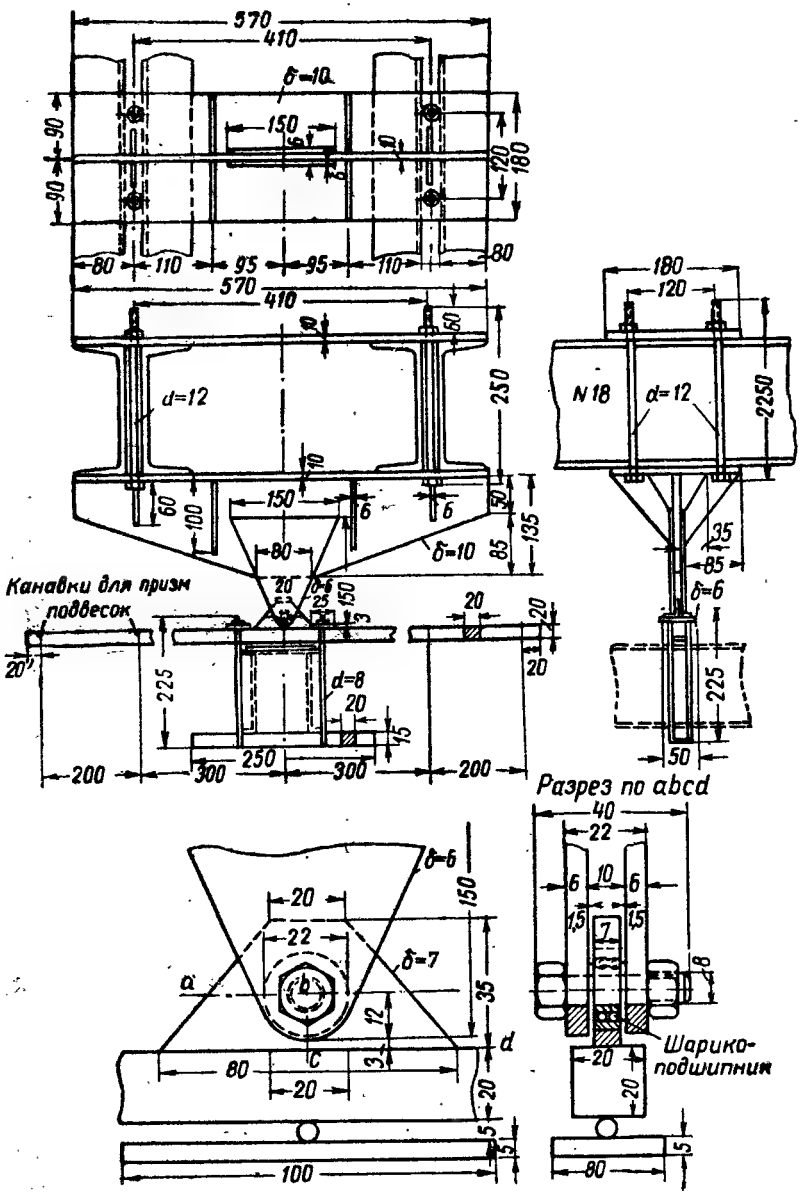

570
410
δ=10
150
90
90
120
180
80
110
95
95
110
80
570
410
60
250
d=12
10
60
100
150
6
6
50
135
δ=10
85
80
20
δ=6
25
150
3
Канавки для призм подвесок
20
20
20
20
225
d=8
20
15
200
300
250
300
200
180
120
N 18
d=12
2250
35
85
δ=6
225
50
Разрез по abcd
40
22
6
10
6
1,5
1,5
7
8
Шарико-подшипник
20
20
5
80
δ=6
150
20
22
δ=7
a
b
35
12
d
c
80
3
20
20
5
5
100

Рис. 14

щи двуплечего рычага и круглых металлических тяг, заанкеренных между парой швеллеров у пола.

К другому концу, также зажатому в хомуте, прилагается крутящий момент при помощи нагрузки, укладываемой на платформу, которая подвешивается к такому же двуплечему рычагу. Применение двуплечего рычага позволяет производить закручивание образца как в одну, так и в другую сторону.

Для возможности свободной депланации (искривления) поперечных сечений испытываемого образца рычаги хомутов опираются на элемент профиля посредством стального шарика, расположенного в плоскости симметрии профиля (при испытании несимметричных профилей применялись специальные опоры). Нижние элементы образца обладают относительно меньшей свободой депланации, так как они опираются непосредственно на нижнюю перекладину хомута.

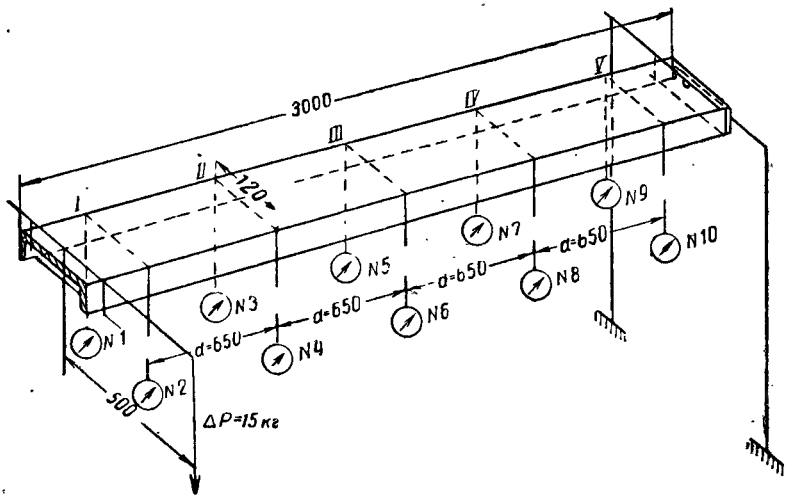


Рис. 15

Мы проверили эту установку в действии, предварительно испытав на ней несколько прокатных металлических образцов: швеллер № 12, двутавр № 16 и четыре прокатных уголка. Целью испытания было определение действительной жесткости при чистом кручении GJ_d.

Испытывавшийся швеллер имел длину 3 *м*. В пяти сечениях образца на расстоянии 65 *см* друг от друга было установлено по два прогибомера, при помощи которых измерялись вертикальные перемещения крайних точек каждого из этих сечений (рис. 15). Закручивающий момент $M_{кр}$ изменялся ступенями путем добавления нагрузки по 15 *кг* на плече 50 *см*, следовательно, приращение закручивающего момента составляло

$$\Delta M_{кр} = 15 \cdot 50 = 750 \text{ кгсм}.$$

Цикличность загрузки и разгрузки схематически можно изобразить так:

$$0; 1; 2; 3; 2; 1; 0; 1; 2; 3; 2; 1; 0.$$

Нагрузка № 0 равнялась 15 *кг* и составлялась из собственного веса платформы и некоторого начального груза, который при дальнейших испытаниях оставался постоянно на платформе; нагрузка № 1 была 30 *кг*, № 2 — 45 *кг*, № 3 — 60 *кг*. Закручивание производилось в обе стороны: по ходу часовой стрелки (положительное кручение) и обратно ходу часовой стрелки (отрицательное кручение) с той же схемой цикличности загружения. Результаты испытания и сравнение полученного значения J_d с теоретическим подсчетом даны в табл. 1.

Относительный угол закручивания θ' определялся по формуле

$$\theta' = \frac{R}{bd}, \tag{9}$$

где R — разность между суммой приращений из показаний двух поставленных в одном сечении прогибомеров и такой же суммой приращений в смежном сечении;

b — расстояние между проволоками прогибомеров по ширине образца;

d — расстояние между сечениями.

Искомая жесткость образца при чистом кручении GJ_d определялась по формуле

$$GJ_d = \frac{\Delta M_{кр}}{\theta'}, \tag{10}$$

где $\Delta M_{кр}$ — приращение закручивающего момента.

Полученная в результате обработки испытаний жесткость GJ_d представляет собой среднее из 96 величин [12 циклов × 2 (положительное и отрицательное кручение) × 4 (I—II сечения, II—III сечения, III—IV сечения, IV—V сечения)].

Сравнительно небольшая разница экспериментальных величин, полученных в разных участках по длине образца, как это видно из табл. 1, убеждает нас в том, что при подобных испытаниях нет необходимости ставить большое количество приборов, а потому в дальнейшем при испытании других образцов мы ставили прогибомеры не более чем в четырех или даже трех сечениях образца.

Так как мы для данного образца не определяли непосредственно модуля упругости при сдвиге G, то приняли его равным среднему значению для стали, т. е. 800 000 *кг/см*².

Сравнение полученного экспериментального значения J_d с теоретическим подсчетом его по формуле (7) дает поправочный коэффициент 1,10. По экспериментам А. Феппля для шести испытанных им швеллеров тот же коэффициент колебался в пределах 0,98—

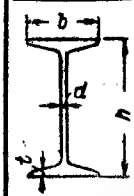
Таблица 1

Результаты испытания на чистое кручение швеллера № 12

Тип образца [№ 12	Разности между суммами приращений отсчетов в смежных сечениях в *мм*				Средняя из восьми разностей в *мм*	Расстояние между приборами в одном сечении b в *мм*	Расстояние между сечениями d в *мм*	Относительный угол закручивания θ' в $мм^{-1}$	Приращение крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в *кгмм*	Жесткость при чистом кручении GJ_d в *кгсм²*	Принятый модуль упругости G в *кг/см²*	J_d по экспериментальным данным в *см⁴*	Действительные размеры образца в *мм*				J_d по формуле: $J_d = \Sigma \frac{b\,\delta^3}{3}$ в *см⁴*	Поправочный коэффициент α
	I—II	II—III	III—IV	IV—V									h	b	d	t		
	Положительное кручение				1,62	120	650	$20{,}8\cdot10^{-6}$	7 500	$3{,}61\cdot10^{6}$	$0{,}8\cdot10^{6}$	4,51	119	52,9	5,5	10	4,08	1,1
	1,59	1,6	1,63	1,66														
	Отрицательное кручение																	
	1,615	1,54	1,65	1,64														

Таблица 2

Результаты испытания на чистое кручение двутавра № 16

Тип образца I № 16	Средние разности между суммами приращений отсчетов в смежных сечениях в *мм*		Средняя из четырех разностей в *мм*	Расстояние между приборами в одном сечении b в *мм*	Расстояние между сечениями d в *мм*	Относительный угол закручивания θ' в $мм^{-1}$	Приращение крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в *кгмм*	Жесткость при чистом кручении GJ_d в *кгсм²*	Принятый модуль упругости G в *кг/см²*	J_d по экспериментальным данным в *см⁴*	Действительные размеры образца в *мм*				J_d по формуле: $J_d = \Sigma \frac{b\,\delta^3}{3}$ в *см⁴*	Поправочный коэффициент α
	I—II	II—III									h	b	d	t		
	Положительное кручение		1,246	200	600	$10{,}38\cdot10^{-6}$	10 000	$9{,}63\cdot10^{6}$	$0{,}8\cdot10^{6}$	12	159	89	7,4	10,5	8,73	1,37
	1,271	1,257														
	Отрицательное кручение															
	1,208	1,248														

1,25. По аналогичным экспериментам, проведенным в Иллинойсском университете, сравнение результатов испытаний с подсчетами по той же формуле (7) дает поправочный коэффициент, заключающийся в пределах 1,01—1,25.

Полученный нами поправочный коэффициент 1,10 находится в тех же пределах.

Переходим к описанию испытания прокатного двутавра № 16. Длина образца составляла 2 *м*. Приборы были поставлены в трех сечениях на расстоянии $d=60$ *см* друг от друга. Расстояние между проволоками прогибомеров в каждом сечении было доведено до $b=20$ *см* путем приварки к верхней полке образца круглых стержней с выступающими концами, к которым привязывались проволоки прогибомеров. Ступень изменения нагрузки была принята в 20 *кг* на том же плече 50 *см*. Цикличность загрузки и разгрузки была такая же, как и при испытании швеллера. Результаты этого испытания и сравнение полученного значения J_d с теоретическим подсчетом даны в табл. 2.

По экспериментам А. Феппля для пяти испытанных им обыкновенных (не широкополочных) двутавров поправочный коэффициент колебался в пределах 1,16—1,44, причем для двутавра № 14 он равнялся 1,44, а для двутавра № 20 — 1,32. Полученный нами поправочный коэффициент для двутавра № 16 — 1,37 вполне укладывается в эти рамки.

Кроме проведенных нами экспериментов над швеллером и двутавром, нами были испытаны четыре образца из прокатных уголков, каждый длиной по три метра: два равнобоких и два неравнобоких.

Приборы при испытании каждого образца ставились в трех или в двух сечениях на расстоянии 60 *см* друг от друга. Расстояние между проволоками прогибомеров в каждом сечении было равно 20 *см*. Ступень изменения нагрузки была принята в 15 *кг*. Цикличность нагрузки и разгрузки была такая же, как и при испытании швеллера и двутавра.

Результаты этих испытаний приведены в табл. 3. В последней графе этой таблицы помещены экспериментальные поправочные коэффициенты, которые колеблются от 1,007 до 1,106.

По экспериментам А. Феппля для одиннадцати испытанных им образцов равнобоких и неравнобоких уголков поправочный коэффициент колебался в пределах 0,86—1,10. Полученные нами коэффициенты находятся примерно в тех же пределах.

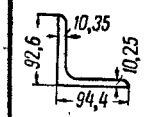
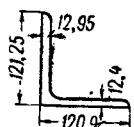
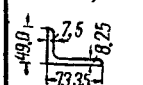
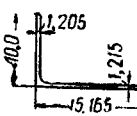
Таким образом, результаты испытания прокатных швеллера, двутавра и уголков подтвердили полную пригодность нашей установки для испытания металлических образцов на чистое кручение.

2. ИСПЫТАНИЕ СВАРНЫХ ДВУТАВРОВЫХ ОБРАЗЦОВ

Испытание сварных двутавровых образцов на чистое кручение производилось с целью установить действительную жесткость GJ_d и степень изменения ее при наличии ребер жесткости или планок

Таблица 3

Результаты испытаний на чистое кручение прокатных уголковых профилей

Сечение образца	Средние разности между суммами приращений отсчетов в смежн. сечениях в *мм*		Средняя из двух разностей в *мм*	Расстояние между приборами в одном сечении в *мм*	Расстояние между сечениями в *мм*	Относит. угол закручивания θ' в $мм^{-1}$	Приращение крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в *кгсм*	Жесткость при чистом кручении GJ_d в $кгсм^2$	Принятый модуль упругости G в $кг/см^2$	Экспериментальн. данные J_d в $см^4$	По формуле: $J_d=\Sigma\frac{b\delta^3}{3}$ в $см^4$	Поправочный коэффициент α
	положит. кручение	отрицат. кручение										
	1,618	1,546	1,582	200	593	$1,332\cdot10^{-4}$	7 500	$5,631\cdot10^6$	$0,8\cdot10^6$	7,039	6,44	1,093
	0,629	0,678	0,653	200	601	$0,541\cdot10^{-4}$	7 500	$13,869\cdot10^6$	$0,8\cdot10^6$	17,336	15,676	1,106
	1,886	1,87	1,878	200	596	$1,576\cdot10^{-4}$	2 500	$1,586\cdot10^6$	$0,8\cdot10^6$	1,983	1,921	1,032
	1,065	1,03	1,047	200	600	$0,875\cdot10^{-4}$	10 000	$11,428\cdot10^6$	$0,8\cdot10^6$	14,285	14,179	1,007

в зависимости от расстояния между ними по длине стержня. Нами были запроектированы и изготовлены в мастерских ЦНИПС под руководством техника Ф. А. Перн два сварных образца длиной по 2 *м*: один без ребер и планок, а второй — с ребрами жесткости, расположенными на расстоянии 48 *см* друг от друга. Геометрические размеры образцов даны на рис. 16. После первого испытания к пол-

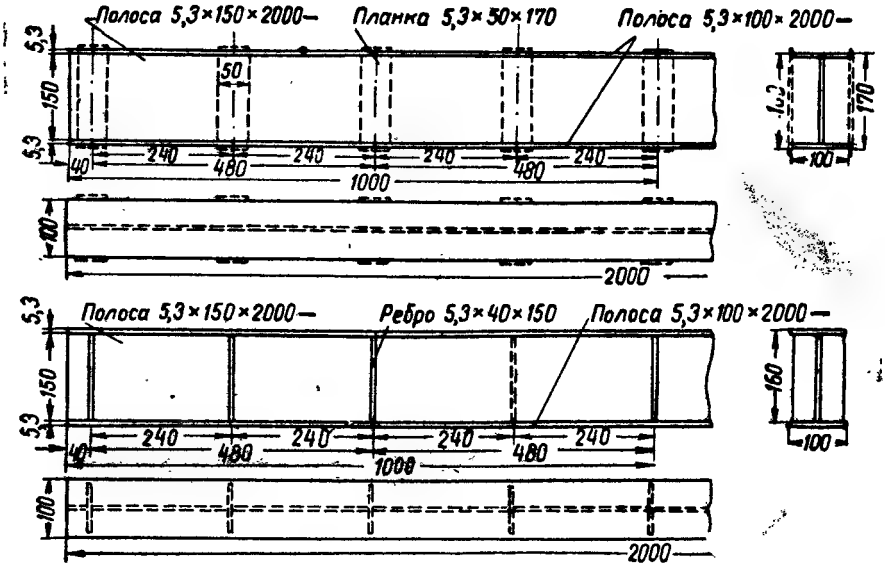


Рис. 16

кам первого образца (без ребер) были приварены с обеих сторон вертикальные планки шириной в 50 *мм* на расстояниях между осями в 48 *см*; после второго испытания между ними были приварены еще дополнительные планки, так что шаг планок стал в 24 *см*. Точно так же и ко второму образцу (с ребрами) после первого испытания были приварены дополнительные ребра жесткости, и общий шаг их стал равен 24 *см*. Таким образом, всего было испытано на чистое кручение 5 сварных образцов.

Приборы при испытаниях каждого образца ставились в трех сечениях на расстоянии 60 *см* друг от друга. Расстояние между проволоками прогибомеров в каждом сечении было равно 20 *см*.

Ступень изменения нагрузки была принята: 5 *кг* для первого испытания обоих образцов, 10 *кг* — для второго испытания обоих образцов и, наконец, 15 *кг* для третьего испытания первого образца.

Кроме этих пяти испытаний, было произведено еще испытание двутаврового стержня длиной 1,5 *м*, сваренного из трех листов: стенки 150×5,3 *мм* и полок 130×5,3 *мм* с ребрами жесткости на

взаимном расстоянии 37,5 *см*. Приборы для измерения углов закручивания ставились также в трех сечениях, отстоящих друг от друга на 37,5 *см*. Расстояние между проволоками прогибомеров в каждом сечении было равно ширине полки, т. е. 13 *см*. Ступень изменения нагрузки составляла 10 *кг*.

Плечо приложения нагрузки во всех испытаниях было принято в 50 *см*. Цикличность нагрузки и разгрузки была такая же, как и при испытании прокатных образцов. Результаты этих испытаний приведены в табл. 4.

Модуль упругости металла, из которого были изготовлены образцы, определялся непосредственным испытанием круглых образцов, вырезанных из того же листа стали, и получился равным $0{,}815 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, это значение G и принято нами при обработке результатов эксперимента. На вопросе об определении механических характеристик стали мы подробнее остановимся в § 8, п. 1, г.

Последняя графа табл. 4, в которой помещены экспериментальные поправочные коэффициенты к формуле (7), позволяет сделать следующие выводы.

Для сварного двутавра без ребер и планок поправочный коэффициент получился 1,34. Так как этот профиль с точки зрения сопротивляемости его чистому кручению мало чем отличается от прокатных широкополочных двутавров, то мы считаем возможным сравнить результаты нашего эксперимента с соответствующими опытными данными А. Феппля. Для шести испытанных им широкополочных балок поправочные коэффициенты получились в пределах 1,21—1,47. Как видим, наш коэффициент 1,34 находится в тех же пределах.

Для трех сварных образцов с ребрами жесткости поправочные коэффициенты у нас получились: 1,50, 1,56 и 1,38. Сравнительно небольшое расхождение между ними показывает, что наличие ребер жесткости, а также изменение расстояний между ними не сильно влияют на жесткость стержня. Поэтому мы считаем возможным при определении по формуле (7) значения J_d для сварных двутавровых балок, в которых фактически всегда имеются ребра жесткости, рекомендовать поправочный коэффициент α принимать равным 1,5.

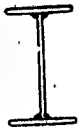
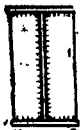
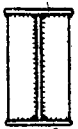
Для образцов с планками получились поправочные коэффициенты: 2,34 при редком расположении планок и 3,33 при частых планках. Сравнение этих коэффициентов с коэффициентом 1,34, полученным для стержня без планок, дает возможность установить следующее: во-первых, планки значительно увеличивают жесткость двутаврового стержня и, во-вторых, с уменьшением расстояния между ними жесткость эта увеличивается.

3. ИСПЫТАНИЕ КЛЕПАНЫХ ДВУТАВРОВЫХ ОБРАЗЦОВ

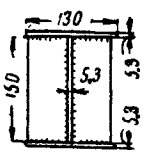
Нами были испытаны на чистое кручение четыре клепаных двутавровых образца. Целью испытания было определить действительную жесткость образцов и степень влияния на нее наличия

Таблица 4

Результаты испытаний на чистое кручение сварных двутавровых образцов

Тип образца	Средние разности между суммами приращений отсчетов в смежных сечениях в *мм*		Средняя из четырех разностей в *мм*	Расстояние между приборами в одном сечении в *мм*	Расстояние между сечениями в *мм*	Относительный угол закручивания θ^1 в *мм*$^{-1}$	Приращение крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в *кгсм*	GJ_d в *кгсм*^{2}	Модуль упругости G в *кг/см*^{2}	J_d по экспериментальным данным в *см*^{4}	J_d по формуле: $J_d = \Sigma \frac{b\,\delta^3}{3}$ в *см*^{4}	Поправочный коэффициент α
	I—II	II—III										
	Положительное кручение 1,583	1,571 Отрицательное кручение 1,632	1,579	200	600	$13{,}16 \cdot 10^{-6}$	2 500	$1{,}9 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	2,33	1,74	1,34
 Шаг ребер 48см	Положительное кручение 1,432	1,383 Отрицательное кручение 1,414	1,405	200	600	$11{,}71 \cdot 10^{-6}$	2 500	$2{,}13 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	2,62	1,74	1,5
 Шаг ребер 24см	Положительное кручение 2,787	2,641 Отрицательное кручение 2,832	2,719	200	600	$22{,}66 \cdot 10^{-6}$	5 000	$2{,}21 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	2,72	1,74	1,56

Продолжение табл. 4

Тип образца	Средние разности между суммами приращений отсчетов в смежных сечениях в *мм*		Средняя из четырех разностей в *мм*	Расстояние между приборами в одном сечении в *мм*	Расстояние между сечениями в *мм*	Относительный угол закручивания θ' в $мм^{-1}$	Приращение крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в *кгмм*	GJ_d в $кгсм^2$	Модуль упругости G в $кг/см^2$	J_d по экспериментальным данным в $см^4$	J_d по формуле: $J_d = \Sigma \frac{b^3}{3}$ в $см^4$	Поправочный коэффициент α
	I—II	II—III										
Шаг планок 48 см	Положительное кручение 1,806	1,808	1,806	200	600	$15,05 \cdot 10^{-6}$	5 000	$3,32 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	4,07	1,74	2,34
	Отрицательное кручение 1,782	1,828										
Шаг планок-24 см	Положительное кручение 1,951	1,851	1,901	200	600	$15,84 \cdot 10^{-6}$	7 500	$4,73 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	5,8	1,74	3,33
	Отрицательное кручение 1,922	1,878										
 Шаг ребер 37,5 см	Положительное кручение 1,039	1,145	1,069	130	375	$21,93 \cdot 10^{-6}$	5 000	$2,28 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	2,8	2,035	1,38
	Отрицательное кручение 0,957	1,135										

поясных заклепок (горизонтальных и вертикальных) и уголков жесткости. Для испытания был запроектирован и изготовлен в мастерских ЦНИПСа один двутавровый образец длиной 2 *м*, склепанный из вертикального листа 150×5 *мм* и четырех равнобоких уголков 50×50×5,3 *мм*. Общий вид и размеры его даны на рис. 17.

Отверстия для поясных заклепок были приняты в 10 *мм* при диаметре стержня заклепки 9,5 *мм*; шаг заклепок — 60 *мм*. Клепка

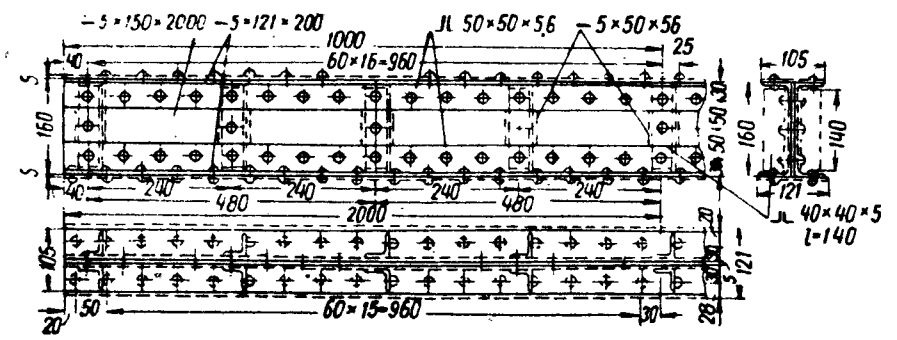


Рис. 17

производилась вручную в горячем состоянии заклепки. Модуль упругости материала при сдвиге $G=0{,}815\cdot10^6$ *кг/см²**.

После первого испытания в горизонтальных полках поясных уголков были просверлены дыры и к уголкам были приклепаны дополнительные горизонтальные листы размером 121 · 5 *мм*. Вертикальные заклепки поставлены в шахматном порядке по отношению к горизонтальным с тем же шагом 60 *мм*. После второго испытания к образцу были приклепаны с обеих сторон вертикальные уголки жесткости из профилей 40×40×5 *мм* на взаимном расстоянии 48 *см*. Наконец, после третьего испытания были установлены дополнительные уголки жесткости так, что общий шаг их составлял 24 *см*. Таким образом, всего было испытано четыре клепаных образца.

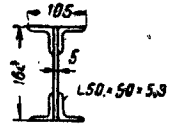
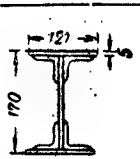
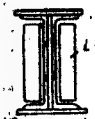
Число измерительных приборов и места их установки были такие же, как и при испытании сварных образцов. Ступень изменения нагрузки для образца без горизонтальных листов была принята в 10 *кг*, а для остальных трех образцов — в 20 *кг*. Плечо закручивающего момента и цикличность загрузки и разгрузки такие же, как и в предыдущих испытаниях. Результаты этих испытаний приведены в табл. 5.

В предпоследней графе табл. 5 даны значения J_d, вычисленные по формуле $J_d=\Sigma\frac{bs^3}{3}$ (без поправочного коэффициента). Для

* См. выше испытание сварных двутавровых образцов.

Таблица 5

Результаты испытаний на чистое кручение клепаных двутавровых образцов

Тип образца	Средние разности между суммами приращений отсчетов в смежных сечениях в *мм*		Средняя из четырех разностей в *мм*	Расстояние между приборами в одном сечении в *мм*	Расстояние между сечениями d в *мм*	Относительный угол закручивания θ' в $мм^{-1}$	Приращение крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в *кгмм*	Жесткость при чистом кручении GJ_d в $кгсм^2$	Принятый модуль упругости G в $кг/см^2$	J_d по экспериментальным данным в $см^4$	J_d по формуле: $J_d = \Sigma \frac{b\delta^3}{3}$ в $см^4$	Поправочный коэффициент α
	I—II	II—III										
	Положительное кручение 2,043	2,054	2,02	200	600	$16,83 \cdot 10^{-6}$	5 000	$2,97 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	3,64	12,6	0,289
	Отрицательное кручение 1,978	2,004										
	Положительное кручение 1,299	1,453	1,338	200	600	$11,15 \cdot 10^{-6}$	10 000	$8,97 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	11	19,35	0,568
	Отрицательное кручение 1,260	1,340										
 Шаг уголков жесткости 48 см	Положительное кручение 1,326	1,323	1,313	200	600	$10,94 \cdot 10^{-6}$	10 000	$9,14 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	11,2	19,35	0,579
	Отрицательное кручение 1,302	1,302										
Шаг уголков жесткости 24 см	Положительное кручение 1,275	1,401	1,322	200	600	$11,02 \cdot 10^{-6}$	10 000	$9,07 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	11,13	19,35	0,575
	Отрицательное кручение 1,268	1,344										

этих подсчетов сечения были разложены на элементы, как это изображено на рис. 18 и 19 для первого образца и на рис. 20 и 21 для трех остальных.

Для первого образца, состоящего из вертикального листа и четырех приклепанных к нему одним рядом заклепок поясных угол-

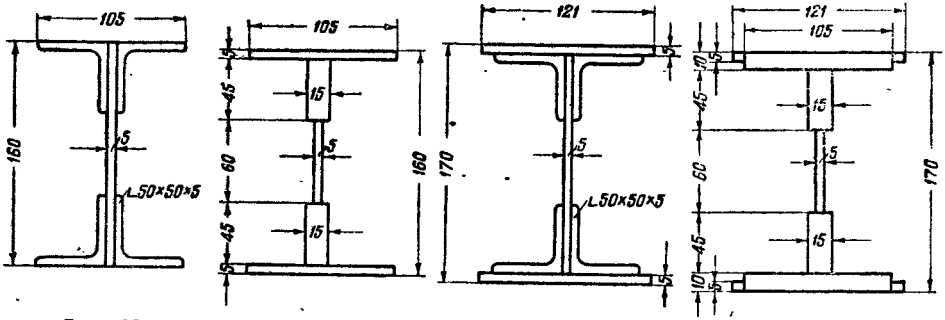


Рис. 18 Рис. 19 Рис. 20 Рис. 21

ков, полученная действительная жесткость при кручении составляет только 30% от расчетной (поправочный коэффициент 0,289≈ ≈0,3). Это показывает весьма слабую сопротивляемость кручению однорядных горизонтальных поясных заклепок. В этом случае соединение сопротивляется закручивающему моменту лишь до тех пор, пока не будет преодолено трение между листами, вызванное обжатием заклепок при охлаждении после клепки. Но как только между листами возникает скольжение, элементы профиля начинают работать не совместно, а порознь. Если, учтя это обстоятельство, мы вычислим величину J_d, разложив сечение на элементы по рис. 22, то получим $J_d = 2{,}505$ *см*⁴. Сравнение с экспериментальной величиной дает в этом случае поправочный коэффициент, равный $\frac{3{,}64}{2{,}505} = 1{,}45$, что находится в пределах колебаний поправочных коэффициентов для несоставных (прокатных) двутавров.

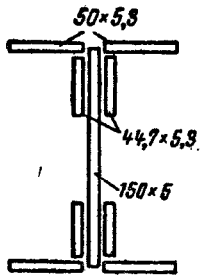


Рис. 22

Результаты испытаний второго образца, клепаного двутавра с горизонтальными листами, дали поправочный коэффициент 0,568, т. е. почти вдвое больший, чем для предыдущего образца. Это объясняется тем, что вертикальные поясные заклепки, связывающие горизонтальные листы с поясными уголками, находятся в отношении сопротивляемости соединения скручиванию в более выгодных условиях, чем горизонтальные. В этом случае каждый из горизонтальных листов приклепан не одним, а двумя рядами заклепок, а поэтому крутящий момент воспринимается не

только трением между листами, но и частично суммой моментов заклепочных пар, равных произведению усилий, возникающих в заклепках, на расстояние между рядами этих заклепок.

Наконец, результаты испытаний последних двух образцов явно свидетельствуют о том, что наличие уголков жесткости почти не влияет на жесткость стержня при чистом кручении. Этот факт можно объяснить тем, что уголки жесткости в клепаных балках в отличие от сварных балок не соединены с полками, а потому при закручивании они не оказывают никакого препятствия свободной депланации полок и не увеличивают сопротивляемости стержня кручению.

Наш вывод вполне совпадает с заключением Ф. Блейха о работе заклепок на кручение.

В книге «Теория и расчет железных мостов» Ф. Блейх говорит, что в клепаных стержнях «надо самым тщательным образом следить за появлением даже небольших крутящих моментов, так как они способны оказывать вредное действие на заклепочные соединения. Можно прямо сказать, что нет лучшего средства разрушить заклепочные соединения жесткой балки, как подвергнуть ее действию кручения. Особенно неблагоприятна в этом случае работа тех частей сечения, которые соединены только одним рядом заклепок».

Практически условия работы заклепочных соединений складываются несколько лучше, так как в чистом виде кручение в конструкциях почти никогда не встречается и часть крутящего момента, как увидим ниже, уравновешивается напряжениями от изгиба.

Изучение клепаных стержней в условиях кручения мы по существу только начали; небольшое количество экспериментов, произведенных над двутавровыми стержнями, конечно, полностью не разрешает задачи, и ясно, что работа в этом направлении должна продолжаться. Тем не менее, учитывая результаты наших экспериментов и аналогичных опытов, проведенных А. Фепплем, полагаем возможным рекомендовать при практических расчетах клепаных двутавров следующее:

1) при вычислении величины J_d по формуле (7) сечение разлагать на элементы, как изображено на рис. 19 и 21;

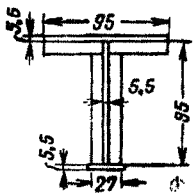
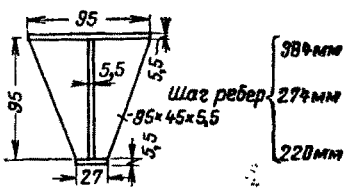
2) поправочный коэффициент α к этой формуле принимать: для балок без горизонтальных листов $\alpha = 0{,}25$, а для балок с горизонтальными листами $\alpha = 0{,}5$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ СВАРНЫХ ТАВРОВЫХ ОБРАЗЦОВ

Старший научный сотрудник лаборатории строительной механики ЦНИПС Н. Г. Добудогло испытал на чистое кручение 11 образцов таврового сечения длиной по 2 *м*, сваренных из вертикального и горизонтального листов размерами 95×5,5 *мм* и продольного ребра жесткости 27×5,5 *мм*. По длине стержней имелись вертикальные ребра жесткости у первых восьми образцов № 1—8, они

Таблица 6

Результаты испытаний на чистое кручение тавровых сварных образцов

Сечение образца (размеры в *мм*)	№ образцов	GJ_d по экспериментальным данным в *кг см²*		Модуль упругости G в *кг/см²*	J_d по экспериментальным данным в *см⁴*	J_d по формуле: $J_d = \Sigma \frac{b\delta^3}{3}$ в *см⁴*	Поправочный коэффициент α
		для каждого образца	среднее				
	1	$1{,}147 \cdot 10^6$	$1{,}255 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	1,54	1,201	1,28
	2	$1{,}243 \cdot 10^6$					
	3	$1{,}305 \cdot 10^6$					
	4	$1{,}282 \cdot 10^6$					
	5	$1{,}364 \cdot 10^6$					
	6	$1{,}286 \cdot 10^6$					
	7	$1{,}235 \cdot 10^6$					
	8	$1{,}177 \cdot 10^6$					
	9	$1{,}347 \cdot 10^6$		$0{,}815 \cdot 10^6$	1,65	1,201	1,37
	10	$1{,}416 \cdot 10^6$		$0{,}815 \cdot 10^6$	1,74	1,201	1,45
	11	$1{,}552 \cdot 10^6$		$0{,}815 \cdot 10^6$	1,9	1,201	1,58

были изготовлены из узких в 1 *см* шириной полосок, сваренных под прямым углом и поставленных на расстоянии 27,4 *см* друг от друга. У остальных трех образцов ребра были обычные треугольные и были поставлены на взаимном расстоянии: в образце № 9 — 38,4 *см*, в № 10 — 27,4 *см* и в № 11 — 22 *см*. Результаты этих испытаний представлены в табл. 6*. Из последней графы этой таблицы видно, что поправочный коэффициент (1,28) к формуле (7) для этих стержней, являющихся по существу несимметричными двутаврами, лишь немного меньше соответствующего коэффициента 1,34 для симметричного двутавра без ребер жесткости (см. табл. 4). Обычно применяемые в практике для этих стержней треугольные ребра увеличивают жесткость, так же как и для сварных двутавров, лишь на 10—15%. Изменение расстояний между ребрами оказывает сравнительно небольшое влияние на величину жесткости при кручении.

При определении величины J_d для подобного типа стержней с треугольными ребрами жесткости, обычно применяемых для поясов сварных стропильных ферм, можно рекомендовать поправочный коэффициент α принимать равным 1,4.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ СВАРНЫХ П-ОБРАЗНЫХ ОБРАЗЦОВ

Сварные образцы П-образного сечения были испытаны старшим научным сотрудником Н. Г. Добудогло с целью выявить влияние планок и различного типа решеток на жесткость стержня при чистом кручении. Всего было испытано 16 образцов длиной по 2 *м*. Геометрические размеры образцов, типы решеток и результаты испытаний представлены в табл. 7. Рассматривая эту таблицу, прежде всего следует констатировать четко выявленную картину увеличения жесткости П-образного профиля по мере заполнения открытой части его дополнительными связями в виде планок и решеток, т. е. по мере приближения его к типу профилей с замкнутым сечением. Поправочный коэффициент к формуле (7) для первых четырех эталонных образцов без планок и решеток с редко расположенными слабыми небольшими ребрами получился равным 1,48, т. е. несколько выше, чем для сварных двутавра (1,34) и тавра (1,28). Этого и следовало ожидать, так как поправка к формуле (7) в виде коэффициента α объясняется, как известно, дополнительным увеличением объема мыльной пленки в местах сопряжения элементов сечения между собой. Здесь в отличие от двутаврового сечения мы имеем не два, а четыре места сопряжения.

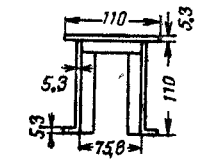
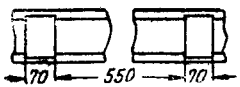
В образцах с планками жесткость увеличивается по мере уменьшения расстояния между планками, причем нетрудно заметить, что жесткость почти пропорциональна числу планок: без планок $\alpha = 1{,}48$, для образца с четырьмя планками (№ 5 и 6) $\alpha = 6{,}29$,

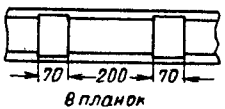
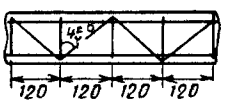
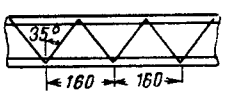
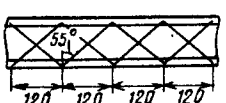
---

* При составлении табл. 6 и 7 модуль упругости 2-го рода был принят $G = 0{,}815 \cdot 10^6$ *кг/см*², так как эти образцы были изготовлены из той же партии стали, для которой G определялся экспериментально (см. п. 1, г, § 8).

Таблица 7

Результаты испытаний на чистое кручение П-образных сварных образцов

Сечение образца и тип решетки (размеры в *мм*)	№ образцов	GJ_d по экспериментальным данным в *кгсм²*		Модуль упругости G в *кг/см²*	J_d по экспериментальным данным в *см⁴*	J_d по формуле: $J_d = \Sigma \frac{b\delta^3}{3}$ в *см⁴*	Поправочный коэффициент α
		для каждого образца	среднее				
 Эталонный с небольшими ребрами из полос в 15 мм шириной шаг ребер-384 мм	1 2 3 4	$2{,}176 \cdot 10^6$ $2{,}15 \cdot 10^6$ $2{,}081 \cdot 10^6$ $2{,}199 \cdot 10^6$	$2{,}151 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	2,64	1,78	1,48
 4 планки	5 6	$9{,}26 \cdot 10^6$ $8{,}534 \cdot 10^6$	$8{,}897 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	11,2	1,78	6,29
6 планок	7 8	$14{,}532 \cdot 10^6$ $13{,}438 \cdot 10^6$	$13{,}98 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	17,15	1,78	9,63

Сечение образца и тип решетки (размеры в *мм*)	№ образцов	GJ_d по экспериментальным данным в *кгсм*^{2}		Модуль упругости G в *кг/см*^{2}	J_d по экспериментальным данным в *см*^{4}	J_d по формуле: $J_d = \Sigma \frac{b\delta^3}{3}$ в *см*^{4}	Поправочный коэффициент α
		для каждого образца	среднее				
	9 10	$19{,}999 \cdot 10^6$ $19{,}581 \cdot 10^6$	$19{,}79 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	24,3	1,78	13,65
	11 12	$78{,}96 \cdot 10^6$ $81{,}04 \cdot 10^6$	$80 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	96,3	1,78	54,1
	13 14	92, [illegible] 10^6 $91{,}21 \cdot 10^6$	$92{,}09 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	113	1,78	63,5
	15 16	$176{,}77 \cdot 10^6$ $121{,}43 \cdot 10^6$	$149{,}1 \cdot 10^6$	$0{,}815 \cdot 10^6$	183	1,78	103,8

с шестью планками (№ 7 и 8) $\alpha = 9{,}63$ и с восемью планками (№ 9 и 10) $\alpha = 13{,}65$.

Результаты испытаний последних шести образцов показывают, что особенно сильно влияют на увеличение жесткости стержня раскосные элементы решетки. Даже наиболее жесткий профиль с планками (№ 9 и 10) в 4 раза слабее наименее жесткого из профилей с решетками при наличии раскосных элементов (№ 11 и 12). Сравнивая жесткость профилей № 11 и 12 с жесткостью профилей № 13 и 14, можно видеть, что уменьшение угла наклона раскосов более эффективно влияет на увеличение жесткости, чем добавление к решетке дополнительных стоек.

Наконец, сравнивая жесткость последних двух профилей (№ 15 и 16) с жесткостью профилей № 11 и 12, мы видим, что постановка второй системы перекрестных раскосов при той же панели увеличивает жесткость стержня почти вдвое; это еще раз свидетельствует о том, что стойки решетки значительно меньше влияют на жесткость стержня, чем раскосы.

Фридрих и Ганс Блейхи рекомендуют рассчитывать открытый профиль, стенки которого соединены раскосными элементами, как профиль с замкнутым сечением. Чтобы убедиться в правильности этого предложения, определим жесткость рассматриваемого нами профиля как замкнутого. По формуле $J_d = \frac{(2F)^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$ получим $J_d = 397$ *см*^{4}, что приблизительно вдвое больше момента инерции самого жесткого из рассматриваемых нами профилей, в то время как тот же профиль без решетки и планок имеет $J_d = 2{,}64$ *см*^{4} (табл. 7), т. е. приблизительно в 70 раз меньше самого жесткого из испытанных профилей.

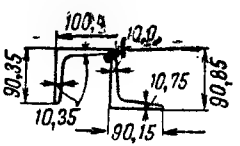
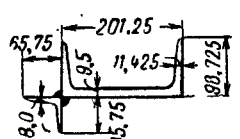
6. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ СОСТАВНЫХ ОБРАЗЦОВ, СВАРЕННЫХ ИЗ ПРОКАТНЫХ ПРОФИЛЕЙ

Для того чтобы установить действительную жесткость на чистое кручение стержней, составленных при помощи продольных сварных швов из прокатных профилей, нами были испытаны два прокатных образца, каждый длиной по 3 *м*: один — сваренный из двух равнобоких уголков, а другой — из уголка и швеллера. Испытание производилось совершенно так же, как и для описанных выше других образцов. Действительные размеры этих образцов и результаты испытаний приведены в табл. 8.

Поправочные коэффициенты α, помещенные в последней графе этой таблицы, для образца из двух уголков — 1,055, а для образца из швеллера и уголка — 1,17 показывают, что наличие одного продольного шва не увеличивает суммарной жесткости отдельных элементов, ибо для образца из двух уголков поправочный коэффициент примерно такой же, как и для отдельных уголков (см. табл. 3), а для образца из швеллера и уголка — не больше, чем для одиночного швеллера (см. табл. 1).

Таблица 8

Результаты испытаний на чистое кручение составных образцов, сваренных из прокатных профилей

Сечение образца	Средние разности между суммами приращений отсчетов в смежных сечениях в *мм*		Средняя из двух разностей в *мм*	Расстояние между приборами в одном сечении в *мм*	Расстояние между сечениями в *мм*	Относительн. угол закручивания θ^{-1} в *мм*	Приращен. крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в *кгсм*	Жесткость при чистом кручении GJ_d в *кгсм²*	Принятый модуль упругости G в *кг/см²*	Экспериментальные данные J_d в *см⁴*	По формуле $J_d = \Sigma \frac{b\delta^3}{3}$ в *см⁴*	Поправочный коэффициент α
	положит. кручение	отрицат. кручение										
	1,127	1,119	1,123	200	602	$0{,}933 \cdot 10^{-4}$	10 000	$10{,}718 \cdot 10^6$	$0{,}8 \cdot 10^6$	13,397	12,701	1,055
	0,793	0,705	0,749	200	597	$0{,}627 \cdot 10^{-4}$	10 000	$15{,}94 \cdot 10^6$	$0{,}8 \cdot 10^6$	19,925	17,025	1,17

7. ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

При определении величины J_d момента инерции при чистом кручении рекомендуем руководствоваться следующими указаниями.

1. В качестве основной расчетной формулы принять формулу (7)

$$J_d = \alpha \Sigma \frac{b\delta^3}{3},$$

где b и δ — ширина и толщина прямоугольников, на которые можно разложить сечение;

α — опытный коэффициент.

2. Составные сечения следует разбить на элементы, как показано на рис. 19 и 21.

3. Для прокатных двутавров и швеллеров по ОСТ 10016—39 и 10017—39 руководствоваться данными, приведенными в сортаменте (приложения 1, 2, 3 и 4).

4. Для прокатных двутавров, швеллеров и уголков, действительные размеры которых не соответствуют указанным в п. 3 ОСТ, руководствоваться формулой (7) и принимать поправочный коэффициент α равным: для двутавров — 1,20, для швеллеров — 1,12 и для уголков — 1,0. При этом за толщину полок у двутавров и швеллеров принимать среднюю их величину.

5. Для сварных двутавровых балок при наличии ребер жесткости, приваренных к вертикальному и горизонтальным листам принимать коэффициент $\alpha = 1{,}50$.

6. Для клепаных двутавровых балок принимать поправочный коэффициент α равным: для балок без горизонтальных листов 0,25, а для балок с горизонтальными листами — 0,5.

7. Для сварных тавровых профилей по типу изображенных на фигуре в табл. 6 с приваренными к стенке и полке треугольными ребрами коэффициент α принимать равным 1,4.

8. Для профилей, составленных из прокатных двутавров, швеллеров или уголков, соединенных между собой не более чем одним рядом заклепок или сварным швом по одной кромке, по типу сечений, изображенных на рис. 23, величину J_d рекомендуется определять по формуле

$$J_d = J_d^{\mathrm{I}} + J_d^{\mathrm{II}} + J_d^{\mathrm{III}} + \cdots, \tag{11}$$

где $J_d^{\mathrm{I}}, J_d^{\mathrm{II}}, J_d^{\mathrm{III}}$ — значения J_d для отдельных элементов, составляющих профиль; их следует брать из сортамента или определять указанным в предыдущих пунктах способом.

9. Одним из конструктивных мероприятий, увеличивающим в несколько раз жесткость профиля на кручение, является приварка или приклепка планок, причем последними наиболее целесообразно соединять точки профиля с наибольшей разностью секториальных координат.

Так, например, для третьего профиля, изображенного на рис. 23, постановку планок целесообразнее производить по рис. 24, а не по рис. 25.

10. Наиболее эффективным конструктивным мероприятием, увеличивающим жесткость стержня на кручение в несколько де-

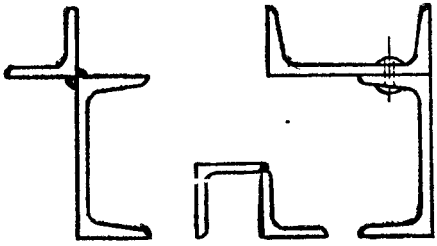


Рис. 23

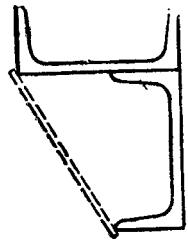


Рис. 24

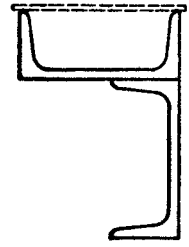


Рис. 25

сятков раз и приближающим его к типу замкнутых профилей, является постановка треугольной (без дополнительных стоек) или, еще лучше, перекрестной решетки.

§ 6. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ J_d

Пример 1. Определить величину J_d для двутавра, сваренного из трех листов: вертикального 700×10 *мм* и двух горизонтальных 220×20 *мм* и снабженного ребрами жесткости (рис. 26).

$$J_d = 1{,}5\Sigma\frac{b\delta^3}{3} = 1{,}5\,\frac{1}{3}(2\cdot 22\cdot 2^3 + 70\cdot 1^3)\,см^4 = 211\,см^4.$$

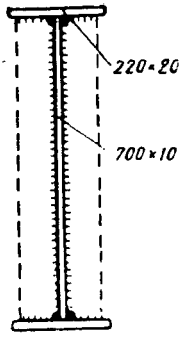


Рис. 26

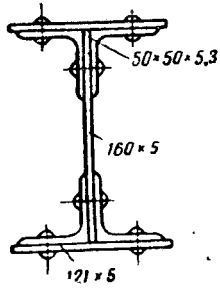


Рис. 27

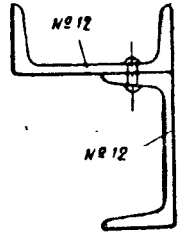


Рис. 28

Пример 2. Определить величину J_d для клепаного двутавра, составленного из вертикального листа 160×5 *мм*, четырех уголков 50×50×5,3 *мм* и двух горизонтальных листов 121×5 *мм* (рис. 27 и 21).

$$J_d = 0{,}5\Sigma\frac{b\delta^3}{3} = 0{,}5\frac{1}{3}(4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5^3 + 2\cdot 10{,}5\cdot 1{,}03^3 +$$

$$+ 2\cdot 4{,}47\cdot 1{,}56^3 + 6\cdot 0{,}5^3) = 9{,}67\,см^4.$$

Пример 3. Определить величину J_d для сечения (рис. 28), составленного из двух швеллеров № 12, склепанных одним рядом заклепок. Профиль применяется для ригеля фахверка промышленных зданий.

$$J_d = 2J_d^{шв} = 2\cdot 3{,}634 = 7{,}27\,см^4.$$

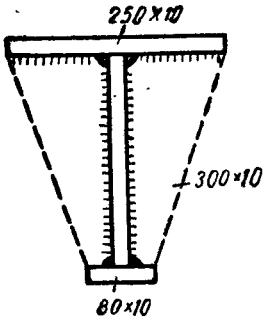


Рис. 29

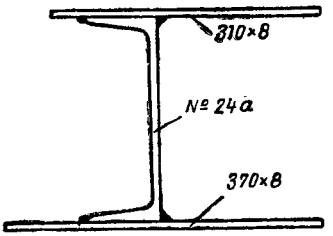


Рис. 30

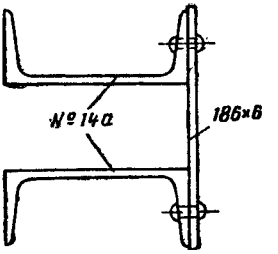


Рис. 31

Пример 4. Определить величину J_d для профиля, изображенного на рис. 29.

$$J_d = \alpha\,\Sigma\frac{b\delta^3}{3} = 1{,}4\frac{1}{3}(25 + 30 + 8)\,1^3 = 29{,}4\,см^4.$$

Пример 5. Определить величину J_d для сварного профиля, составленного из швеллера № 24а и двух листов 310×8 *мм* и 370×8 *мм* (рис. 30).

Профиль предложен Техническим управлением Промстройпроекта для ригелей фахверка промышленных зданий.

$$J_d = \Sigma\frac{b\delta^3}{3} = \frac{1}{3}[(31 - 7{,}8)\,0{,}8^3 + (37 - 7{,}8)\,0{,}8^3 +$$

$$+ 2\cdot 7{,}8(0{,}8 + 1{,}2)^3 + (24 - 2{,}4)\,0{,}65^3] = 52{,}5\,см^4.$$

Пример 6. Определить величину J_d для профиля (рис. 31), составленного из двух швеллеров № 14а и одного листа 186×6 *мм*, взаимно соединенных однорядными заклепками.

Этот профиль применяется в качестве ригеля обмуровочного щита прямоточного котла (пример 21, § 27).

$$J_d = 2J_d^{шв} + J_d^{л} = 2\cdot 4{,}815 + \frac{1}{3}\,18{,}6\cdot 0{,}6^3 = 9{,}63 + 1{,}34 = 10{,}97\,см^4.$$

ГЛАВА III

СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ

§ 7. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СТЕСНЕННОГО КРУЧЕНИЯ

Если закручиваемый стержень некруглого сечения и по концам его или в каких-либо поперечных сечениях имеются препятствия свободному искривлению сечений, то стержень уже не будет находиться в условиях чистого кручения. Продольные перемещения точек сечения в этом случае стеснены, и кручение поэтому будет сопровождаться появлением нормальных напряжений.

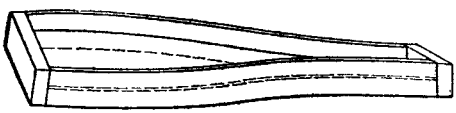


Рис. 31а

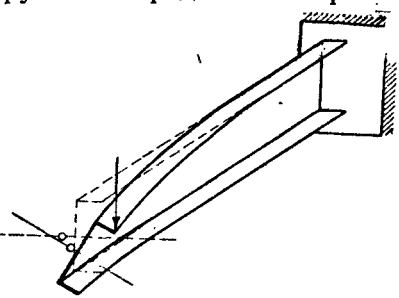


Рис. 31б

Препятствие свободному искривлению поперечных сечений может быть осуществлено различными способами: например, можно приварить к торцам стержня достаточно жесткие из своей плоскости диафрагмы (рис. 31, а) или можно один конец стержня защемить в стену, а к другому приложить закручивающий момент (рис. 31, б).

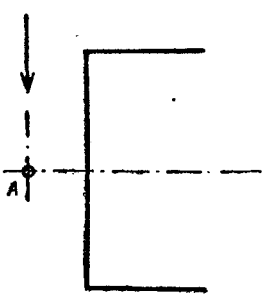


Рис. 31в

Кручение может сопровождаться продольными напряжениями не только при наличии специальных конструктивных защемлений, но и в случае изменения закручивающего момента (см. рис. 4) или размеров поперечного сечения по длине стержня.

Закручивание тонкостенного стержня при стесненном кручении происходит вокруг оси, проходящей через так называемый центр изгиба сечения. Эта особая точка сечения обладает следующим свойством. Если действующая на стержень поперечная нагрузка, т. е. равнодействующая касательных напряжений, проходит через этот центр и если нормальные напряжения на концах стержня равны нулю или распределены по плоскостному закону, то стержень будет испытывать только изгиб (без кручения).

Для двутаврового стержня и вообще для стержней, сечение которых имеет две оси симметрии, центр изгиба совпадает с цент-

ром тяжести сечения. Для стержней же, сечение которых имеет одну или вовсе не имеет осей симметрии, центр изгиба не совпадает с центром тяжести сечения, а отстоит от него на некотором расстоянии. В частности, для швеллерного сечения (рис. 31, б и 31, в) центр изгиба находится вне сечения и расположен на оси симметрии на некотором расстоянии от стенки профиля.

1. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассмотрим произвольное сечение открытого тонкостенного профиля. На рис. 32 изображено сечение серединной поверхности этого профиля (средняя линия сечения). В дальнейшем эту кривую или ломаную будем называть контуром профиля.

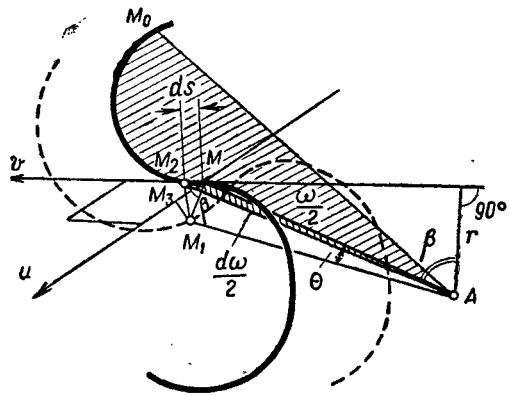


Рис. 32

Пусть рассматриваемое сечение повернулось на некоторый малый угол θ вокруг центра кручения A, пока нам неизвестного, причем за положительный угол условимся принимать поворот против часовой стрелки.

Новое положение какой-нибудь произвольной точки M контура обозначим через M_1. Тогда проекция полного перемещения MM_1 на касательную к контуру будет равна

$$v = MM_2 = MM_1 \cos\beta = AM\theta\cos\beta = r\theta, \tag{12}$$

где r — перпендикуляр из центра кручения на касательную к контуру в точке M.

Проекцию полного перемещения на образующую стержня, характеризующую искажение сечения, обозначим через MM_3, т. е. $u = MM_3$.

Для установления связи между u и v воспользуемся уравнением (2), откуда

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial z} = -r\theta'. \tag{13}$$

Разрешая уравнение (13) относительно искомой функции u частным интегрированием по s, получим

$$u = -\int_0^s r\theta' ds + f(z), \tag{14}$$

где $f(z)$ — произвольная функция, зависящая только от z.

Произведение rds, очевидно, равно удвоенной площади изображенного на рис. 32 элементарного треугольника (сектора), основанием которого служит дифференциал дуги контура ds, а вершиной — центр кручения A.

$$rds = d\omega. \tag{15}$$

Обозначим эту удвоенную площадь через $d\omega$ и подставим в выражение (14). Получим

$$u = -\theta' \int_0^s d\omega + f(z) = -\theta'\omega + f(z), \tag{16}$$

где через ω мы обозначили удвоенную секториальную площадь точки M, отсчитанную от начальной точки M_0. На рис. 32 эта площадь, ограниченная радиусами-векторами AM_0 и AM и контуром сечения, заштрихована редкой штриховкой.

Начало отсчета секториальных площадей (точку M_0) всегда можно выбрать так, чтобы произвольная функция $f(z)$ обратилась в нуль.

Тогда будем иметь

$$u = -\theta'\omega, \tag{17}$$

т. е. перемещения, возникающие при кручении вследствие депланации (искажения) сечения стержня, изменяются по закону секториальных площадей.

2. НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Если незамкнутый тонкостенный стержень находится в условиях стесненного кручения, т. е. имеется то или иное препятствие свободной депланации поперечных сечений, то в поперечных сечениях возникают нормальные и сопутствующие им дополнительные касательные напряжения.

Будем считать, что по толщине сечения нормальные напряжения распределяются равномерно (рис. 33). Что же касается закона распределения их по контуру сечения, то его нетрудно установить, воспользовавшись формулой (17) для продольных деформаций и законом Гука.

Беря от u частную производную по z, получаем относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z} = -\theta''\omega \tag{18}$$

(при чистом кручении $u = \text{const}$, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$).

По закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon = -E\theta''\omega$$

или

$$\sigma_\omega = -E\theta''\omega. \tag{19}$$

Формула (19) показывает, что **нормальные напряжения** при стесненном кручении распределяются по сечению по **закону секториальных площадей**.

В дальнейшем эти напряжения будем называть **секториальными нормальными напряжениями** и обозначать через σ_ω.

Касательные напряжения в крайних точках сечения бруса, боковая поверхность которого свободна от напряжений, всегда на-

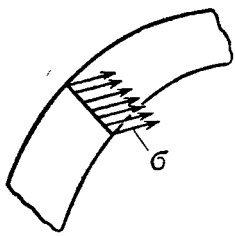


Рис. 33

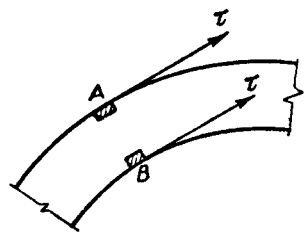


Рис. 34

правлены по касательной к контуру (рис. 34). Вследствие же малой толщины стержня по сравнению с общими размерами его принимают, что по толщине стержня, т. е. при переходе от точки A к

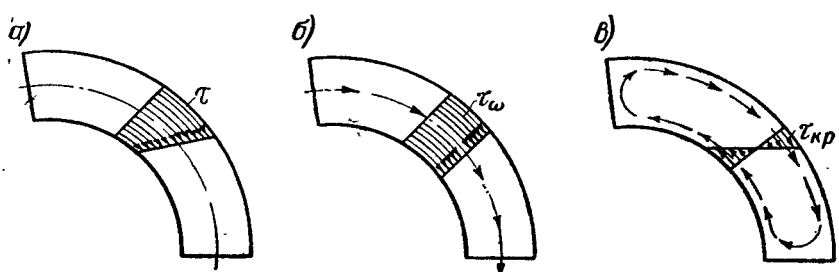


Рис. 3

точке B, направление касательных напряжений меняется незначительно.

Поэтому будем считать, что касательные напряжения в любой точке сечения тонкостенного стержня направлены параллельно касательной к дуге контура и по толщине стержня меняются по линейному закону (рис. 35, *а*).

При этих допущениях касательные напряжения приводятся к сдвигающим силам, действующим по направлению касательной к дуге контура (рис. 35, *б*) и крутящим моментам, возникающим вследствие разности касательных напряжений в крайних точках по толщине сечения (рис. 35, *в*).

Первые из них, сопровождающие секториальные нормальные напряжения, вследствие изгиба отдельных элементов сечения будем называть секториальными касательными напряжениями и будем обозначать их через τ_ω; последние же, соответствующие чистому кручению, эквивалентны крутящему моменту и определяются по формуле (6).

Для определения секториальных касательных напряжений τ_ω выделим двумя поперечными и одним продольным сечением элемент профиля длиной dz и рассмотрим равновесие нормальных и касательных усилий, действующих на этот элемент (рис. 36).

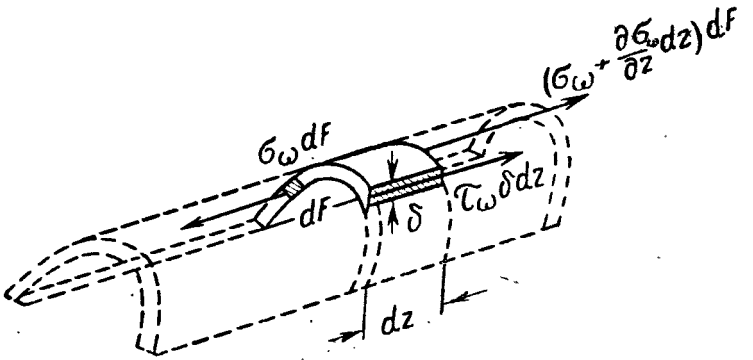


Рис. 36

Из уравнения проекций на направление образующей (на ось z) будем иметь

$$-\int_{F_{отс}} \sigma_\omega dF + \int_{F_{отс}} \left(\sigma_\omega + \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} dz\right) dF + \tau_\omega \delta dz = 0.$$

Подставив в это выражение значение σ_ω из формулы (19) и разделив его на dz, получим

$$\tau_\omega \delta + \int_{F_{отс}} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} dF = 0; \quad \tau_\omega \delta - E\theta''' \int_{F_{отс}} \omega dF = 0,$$

откуда

$$\tau_\omega = \frac{E\theta'''}{\delta} \int_{F_{отс}} \omega dF; \tag{20}$$

$\int_{F_{отс}} \omega df$ в формуле (20) есть секториальный статический момент, вы-

числяемый только для отсеченной части сечения; обозначим его через $S_\omega^{отс}$

$$S_\omega^{отс} = \int_{F_{отс}} \omega\, dF. \tag{21}$$

Тогда формула (20) примет вид

$$\tau_\omega = E\theta''' \frac{S_\omega^{отс}}{\delta}. \tag{22}$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

Каждая точка контура сечения тонкостенного стержня характеризуется не двумя, а тремя координатами: двумя линейными x y и одной секториальной ω (секториальной площадью), измеряемой в квадратных сантиметрах (рис. 37).

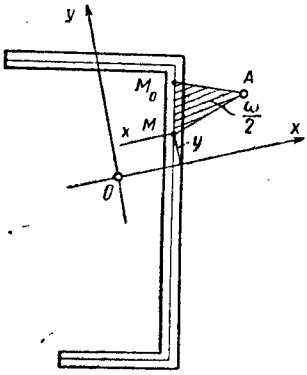


Рис. 37

Для отсчета линейных координат, как известно, необходимо знать центр тяжести сечения O и главные центральные оси x и y. Совершенно аналогично, для отсчета секториальных координат, как мы видели выше, необходимо знать другую центральную точку сечения — центр изгиба A и начальную точку отсчета секториальных площадей M_0, которую по аналогии будем называть главной секториальной точкой сечения.

В теории расчета тонкостенных стержней на стесненное кручение наряду с общеизвестными геометрическими характеристиками, связанными с линейными координатами сечения ($S_x = \int_F y dF$; $S_y = \int_F x dF$; $J_x = \int_F y^2 dF$; $J_y = \int_F x^2 dF$), встречаются новые геометрические характеристики, связанные с секториальной координатой ω, выраженные интегралами следующего вида:

$$\int_F \omega\, dF,\ \int_F \omega\, x dF,\ \int_F \omega\, y dF \text{ и } \int_F \omega^2 dF.$$

В соответствии с общеизвестной теорией моментов инерции мы для этих интегралов ввели следующие наименования и обозначения.

Первый интеграл мы назвали секториальным статическим моментом и обозначили через S_ω

$$S_\omega = \int_F \omega\, dF. \tag{23}$$

(измеряется в *см*^{4}).

Второй и третий назвали секториально-линейными статическими моментами и обозначили через $S_{\omega x}$ и $S_{\omega y}$

$$S_{\omega x} = \int_F \omega\, x dF; \tag{24}$$

$$S_{\omega y} = \int_F \omega\, y dF \tag{25}$$

(измеряются в *см*^{5}).

И, наконец, четвертый интеграл назвали секториальным моментом инерции и обозначили через $J\omega$

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF \tag{26}$$

(измеряется в *см*^{6}).

Отношение секториального момента инерции J^ω к секториальной координате наиболее удаленной (крайней) точки контура сечения к ω_{max} обозначим через W_ω (по аналогии с $W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$ и $W_y = \frac{J_y}{x_{max}}$) и назовем секториальным моментом сопротивления

$$W_\omega = \frac{J_\omega}{\omega_{max}} \tag{27}$$

(измеряется в *см*^{4}).

Секториальный статический момент S_ω и секториально-линейные статические моменты $S_{\omega x}$ и $S_{\omega y}$, как видно из формул (24), (25) и (26), могут быть положительными, отрицательными и равными нулю, секториальный же момент инерции J_ω, определяемый формулой (26), — величина существенно положительная, так как координата ω входит в подынтегральное выражение в квадрате.

4. КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ИЗГИБА И НАЧАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТСЧЕТА СЕКТОРИАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

При кручении тонкостенного стержня силы в любом поперечном сечении его приводятся к крутящему моменту и не могут давать изгибающих моментов относительно главных осей сечения Ox и Oy. Поэтому для нахождения координат центра изгиба можно использовать два условия равновесия

$$\Sigma M_x = 0 \text{ и } \Sigma M_y = 0.$$

Первое из них в развернутом виде, очевидно, запишется так:

$$\Sigma M_x = -\int_F \sigma_\omega\, y dF = \int_F E\theta''\omega\, y dF = E\theta'' \int_F \omega\, y dF.$$

Так как $E\theta'' \neq 0$, то будем иметь

$$\int_F \omega_A \, y dF = 0. \tag{28}$$

Аналогично, используя второе уравнение равновесия, получим

$$\int_F \omega_A \, x dF = 0. \tag{29}$$

Значком A у ω подчеркнуто, что секториальная площадь берется относительно центра кручения A.

Для определения координат центра изгиба рассмотрим открытый тонкостенный профиль, находящийся в условиях косого изгиба (рис. 38).

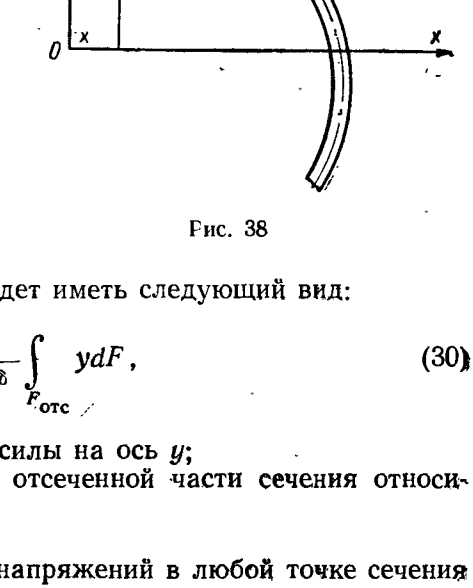


Рис. 38

Отнесем сечение к главным центральным осям Ox и Oy и рассмотрим сначала случай простого изгиба относительно оси Ox.

В сечениях стержня возникнут нормальные и сопутствующие им касательные напряжения. Последние, как известно, определяются по формуле Журавского, которая в данном случае будет иметь следующий вид:

$$\tau = \frac{Q_y}{J_x \delta} \int_{F_{отс}} y dF, \tag{30}$$

где Q_y — проекция поперечной силы на ось y;

$\int_{F_{отс}} y dF$ — статический момент отсеченной части сечения относительно оси x.

Направление касательных напряжений в любой точке сечения тонкостенного профиля, как было сказано выше, совпадает с направлением касательной к контуру сечения в данной точке.

Пусть точка A является искомым центром изгиба сечения, а r — перпендикуляр, опущенный из этого центра на касательную к контуру в рассматриваемой точке профиля.

Элементарный момент усилия $\delta\tau ds$ относительно центра изгиба A выразится формулой

$$dM = r \tau \delta \, ds = \tau \delta \, d\omega, \tag{31}$$

где rds, согласно формуле (15), равно секториальной площади $d\omega$.

Подставив τ из формулы (30) в формулу (31), получим

$$dM = \frac{Q_y}{J_x} d\omega \int_{F_{отс}} y dF. \tag{32}$$

Момент касательных усилий на участке стержня длиной s, очевидно, будет равен

$$M = \int_0^s \frac{Q_y}{J_x} \left(\int_{F_{отс}} y dF \right) d\omega. \tag{33}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$M = \frac{Q_y}{J_x} \left[\omega \int_{F_{отс}} y\, dF - \int_0^s \omega\, y\, dF \right]. \tag{34}$$

Если интегралы формулы (34) распространить на все сечение профиля, то мы, очевидно, будем иметь момент равнодействующей касательных усилий относительно центра изгиба A. Кроме того, первый из интегралов формулы (34) как статический момент всего сечения относительно нейтральной оси обратится в нуль, и формула (34) примет следующий вид:

$$M = -\frac{Q_y}{J_x} \int_F \omega\, y dF. \tag{35}$$

Выше было указано, что центр изгиба есть точка, через которую проходит равнодействующая касательных напряжений.

В таком случае выражение (35) должно быть равно нулю, и так как $\frac{Q_y}{J_x} \neq 0$, то, следовательно, первое уравнение для определения координат центра изгиба запишется так:

$$\int_F \omega_A y dF = 0. \tag{36}$$

Аналогичным образом, рассматривая случай простого изгиба относительно оси Oy, мы получим другое уравнение

$$\int_F \omega_A x dF = 0. \tag{37}$$

Напомним, что секториальная площадь ω в уравнениях (36) и (37) берется относительно центра изгиба сечения, что мы и подчеркнули знаком A у ω, и что оси X и Y являются главными центральными осями сечения.

Уравнения (36) и (37) совершенно аналогичны уравнениям (28) и (29), а это значит, что центр кручения при стесненном кручении совпадает с центром изгиба.

Прежде чем вывести формулы для определения координат центра изгиба, покажем, как изменяется секториальная площадь ω при переходе к новому полюсу.

Пусть полюс перенесен из точки A в точку B (рис. 39); обозначим через ω_A и ω_B секториальные площади, соответствующие полюсам в точках A и B. Дифференциалы этих площадей выразятся формулами

$$d\omega_A = r_A\, ds\,, \tag{38}$$

$$d\omega_B = r_B\, ds\,. \tag{39}$$

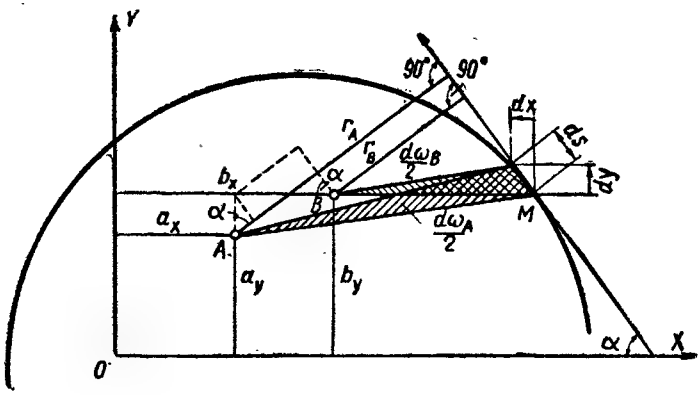


Рис. 39

Из рисунка видно, что

$$r_B = r_A - (b_x - a_x)\sin\alpha - (b_y - a_y)\cos\alpha\,, \tag{40}$$

где α — угол наклона касательной в точке M к оси X.

Подставляя значение r_B из (40) и (39) и имея в виду, что $ds\cos\alpha = -dx$ и $ds\sin\alpha = dy$, будем иметь

$$d\omega_B = d\omega_A - (b_x - a_x)\,dy + (b_y - a_y)\,dx\,. \tag{41}$$

Интегрируя обе части равенства (41), получаем:

$$\omega_B = \omega_A - (b_x - a_x)\,y + (b_y - a_y)\,x + \omega_0\,, \tag{42}$$

где ω_0 — произвольная постоянная, зависящая от начала отсчета секториальных площадей.

Представим формулу (42) в следующем виде:

$$\omega_A = \omega_B + (b_x - a_x)\,y - (b_y - a_y)\,x - \omega_0\,. \tag{43}$$

Формула (43) есть формула преобразования секториальных площадей при переносе полюса.

Подставим значение ω_A из этой формулы в уравнения (36) и (37) для определения координат центра изгиба:

$$\left.\begin{aligned}\int_F \omega_A y dF &= \int_F \omega_B y dF + (b_x - a_x)\int_F y^2 dF - (b_y - a_y)\int_F xy dF - \\ &\quad - \omega_0 \int_F y\, dF = 0; \\ \int_F \omega_A x dF &= \int_F \omega_B x dF + (b_x - a_x)\int_F xy dF - (b_y - a_y)\int_F x^2 dF - \\ &\quad - \omega_0 \int_F x dF = 0.\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

В этих уравнениях $\int_F y dF$, $\int_F x dF$ и $\int_F xy dF$ как статические моменты и центробежный момент инерции сечения относительно главных осей сечения X и $У$ равны нулю

$$\int_F x dF = \int_F y\, dF = \int_F xy\, dF = 0,$$

а так как $\int_F x^2 dF = J_y$ и $\int_F y^2 dF = J_x$ — главные моменты инерции сечения, то уравнения (44) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\int_F \omega_B y dF + J_x (b_x - a_x) &= 0; \\ \int_F \omega_B x dF - J_y (b_y - a_y) &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Считая точку A искомым центром изгиба, а точку B произвольной точкой сечения и введя обозначения

$$\left.\begin{aligned}a_x - b_x &= \alpha_x \\ a_y - b_y &= \alpha_y,\end{aligned}\right\}, \quad (46)$$

и получаем

$$\left.\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{\int_F \omega_B\, y dF}{J_x}; \\ \alpha_y &= \frac{-\int_F \omega_B\, x dF}{J_y}.\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Координаты центра изгиба A, определяемые формулами (47), выражаются таким образом через координаты другой произвольно выбранной точки сечения B, которая служит полюсом для вспомогательной секториальной площади ω_B.

Интегралы, стоящие в числителях формул (47), есть секториально-линейные статические моменты, определяемые формулами (24) и (25), т. е.

$$\left.\begin{aligned} S_{\omega_B x} &= \int_F \omega_B x dF; \\ S_{\omega_B y} &= \int_F \omega_B y dF. \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

Подставив их в формулы (47), получим

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{S_{\omega_B y}}{J_x}; \\ \alpha_y &= -\frac{S_{\omega_B x}}{J_y}. \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Формулы (49) для определения координат центра изгиба по виду напоминают формулы для определения координат центра тяжести сечения

$$x_C = \frac{S_y}{F} \text{ и } y_C = \frac{S_x}{F},$$

с той лишь разницей, что в числителях вместо статических моментов стоят секториально-линейные статические моменты, а в знаменателях вместо площади — главные моменты инерции сечения.

За полюс B может быть принята произвольная точка, взятая на контуре сечения, от которой и отсчитываются по направлению главных осей Ox и Oy искомые координаты α_x и α_y (рис. 40).

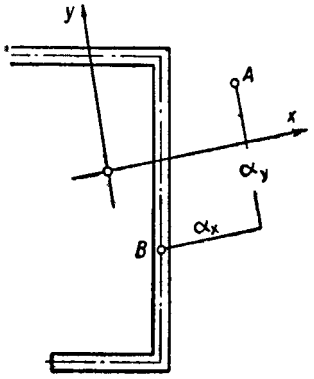


Рис. 40

Если сечение имеет ось симметрии, то, выбрав вспомогательный полюс и начальную точку отсчета секториальных координат на этой оси, получим, что секториально-линейный статический момент относительно полюса и этой оси будет равен нулю, а это значит, что центр изгиба лежит на оси симметрии.

Если сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба лежит на пересечении этих осей, т. е. совпадает с центром тяжести сечения.

Этим же свойством обладают профили, удовлетворяющие так называемой точечной симметрии, как, например, зетовый профиль, хотя они и несимметричны, но центр изгиба их также совпадает с центром тяжести сечения.

Центр изгиба уголкового, таврового или крестового сечения и вообще любого профиля, состоящего из пучка пластинок (рис. 41),

находится в точке пересечения осей отдельных граней (в центре пучка). Это вытекает из формул (49); выбрав вспомогательный полюс B в центре пучка, получим, что числители этих формул обратятся в нуль.

Главные оси сечения, как известно, находятся из условия, что центробежный момент инерции сечения относительно их равен нулю.

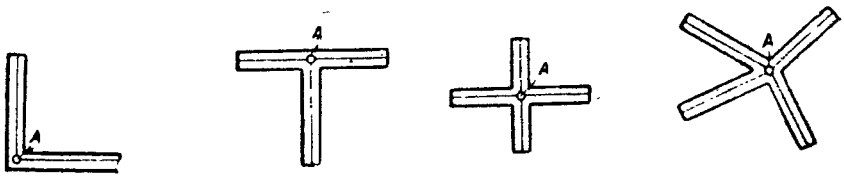


Рис. 41

Главная же секториальная точка (рис. 37), служащая началом отсчета секториальных координат, находится из аналогичного условия

$$S_\omega = 0. \qquad (50)$$

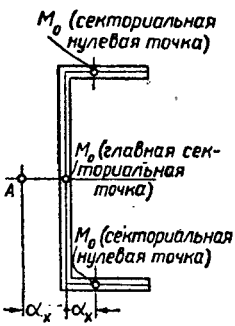


Рис. 42

Условию (50), как правило, удовлетворяет не одна, а несколько точек сечения, имеющих секториальные координаты, равные нулю. Главной секториальной точкой условимся считать ту из них, которая находится на кратчайшем расстоянии от центра изгиба. Например, у швеллера, соответственно числу граней его, имеются три секториальные нулевые точки (рис. 42), главной же из них будем считать точку пересечения оси симметрии профиля с осью стенки как ближайшую к центру изгиба.

Вообще у стержней, имеющих одну ось симметрии, главная секториальная точка находится в точке пересечения контура сечения с этой осью.

У стержней, сечение которых имеет две оси симметрии, главная секториальная точка совпадает с центром изгиба, являющимся, как указывалось выше, в данном случае и центром тяжести сечения. В уголковых, тавровых и крестовых профилях главная секториальная точка также совпадает с центром изгиба, т. е. находится в точке пересечения осей сечения отдельных граней.

В практических расчетах в качестве главной секториальной точки рекомендуется принять произвольную точку на оси грани, ближайшей к центру изгиба сечения, выразив координаты ее в функции какого-нибудь параметра t (например, в функции расстояния от одного из концов этой грани), и затем из уравнения (50) найти это значение t.

5. ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ДЕПЛАНАЦИЕЙ СЕЧЕНИЯ

Из курса сопротивления материалов нетонкостенных стержней известно, что если стержень находится в условиях сложного сопротивления, то имеют место следующие соотношения:

$$N = \int_F \sigma\, dF;\ M_y = \int_F \sigma\, x dF;\ M_x = \int_F \sigma\, y dF.$$

Первое из них показывает, что интеграл нормальных усилий σdF, распространенный на всю площадь сечения стержня, приводит к продольной силе N.

Второе равенство показывает, что интеграл произведений тех же усилий σdF на координату x (на расстояние их от оси y), распространенный на всю площадь сечения, приводит к изгибающему моменту относительно оси y и, наконец, третье равенство — интеграл произведений σdF на координату y приводит к изгибающему моменту относительно оси x.

Если по аналогии с этим равенством составить произведение σdF на секториальную координату точки сечения, выражаемую секториальной площадью ω, взятой относительно центра изгиба A и главной секториальной точки M_0, и проинтегрировать его по всей площади сечения, то получим новую статическую величину, которую мы обозначим через B_ω и назовем изгибно-крутящим бимоментом, т. е.

$$B_\omega = \int_F \sigma\omega\, dF. \tag{51}$$

Понятие этого нового статического фактора, связанного с распределением нормальных напряжений по сечению тонкостенного стержня, по закону секториальных площадей можно трактовать как работу внешних продольных усилий σdF на единичных перемещениях, распределенных по сечению стержня по закону секториальных площадей.

В самом деле, если мы зададимся единичными продольными перемещениями, равномерно распределенными по сечению стержня, то работа внешних продольных усилий на таких единичных перемещениях, очевидно, будет равна продольной силе N.

Точно так же работа внешних продольных усилий на единичных перемещениях, распределенных по сечению по плоскостному закону с нулевой линией на главной оси сечения x (или y), будет соответственно равна изгибающему моменту M_x (или M_y).

Совершенно аналогично работа внешних продольных усилий на единичных перемещениях, распределенных по сечению стержня по секториальному закону, определяемая формулой (51), будет равна изгибно-крутящему бимоменту B_ω.

Подставив в правую часть выражения (51) вместо σ его значение при стесненном кручении из формулы (19), получим

$$B_\omega = -\int_F E\theta''\omega^2 dF = -E\theta''\int_F \omega^2 dF$$

или, воспользовавшись формулой (26), будем иметь

$$B_\omega = -EJ_\omega\theta''. \tag{52}$$

Тогда формулу (19) для нормальных напряжений можно будет окончательно представить так:

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega\,\omega}{J_\omega}. \tag{53}$$

Формулу (53) нетрудно запомнить, ибо она по своему виду аналогична соответствующей формуле нормальных напряжений при поперечном изгибе

$$\sigma_x = \frac{M_x y}{J_x} \text{ или } \sigma_y = \frac{M_y x}{J_y}.$$

Но в числителе формулы (53) вместо изгибающего момента M_x (или M_y) стоит изгибно-крутящий бимомент B_ω, а на месте линейной координаты y (или x) точки, в которой определяется напряжение, стоит секториальная координата соответствующей точки ω. В знаменателе же вместо экваториального момента инерции J_x (или J_y) стоит секториальный момент инерции J_ω.

Нормальные напряжения в крайних точках сечения можно определить по формуле

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{W_\omega}, \tag{54}$$

где W_ω — секториальный момент сопротивления, определяемый формулой (27).

Остановимся на понятии о бимоменте. Наглядно его можно иллюстрировать на двутавровом профиле.

Нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях двутаврового тонкостенного стержня, находящегося в условиях стесненного кручения, очевидно, приводятся к двум параллельным, равным и противоположно направленным парам сил, действующим в плоскостях полок двутавра (рис. 43).

Подобную совокупность сил будем называть **бипарой сил** и изображать так, как представлено на рис. 43, *б*. Произведение момента одной из пар на плечо бипары (кратчайшее расстояние между плоскостями пар) будем называть **моментом бипары**, или, как было сказано выше, **бимоментом**.

Бимомент вызывает изгиб полок рассматриваемого стержня, а так как полки его изгибаются в противоположные стороны, то изгиб сопровождается кручением всего стержня вокруг его оси.

Поэтому бимомент этот мы назвали **изгибно-крутящим бимоментом**. Измеряется он в *кгсм*^{2}.

В. п. 2 настоящего параграфа мы установили, что в любом сечении тонкостенного стержня, находящегося в условиях стесненного кручения, возникают секториальные касательные напряжения τ_ω и касательные напряжения при чистом кручении $\tau_{кр}$. Первые из них для всего сечения стержня приводятся к моменту, который мы

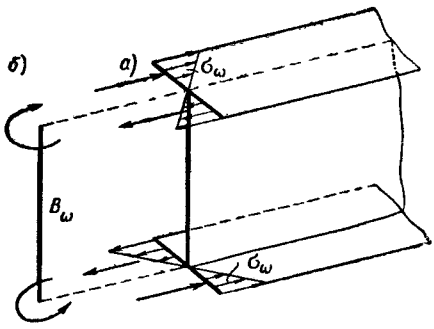


Рис. 43

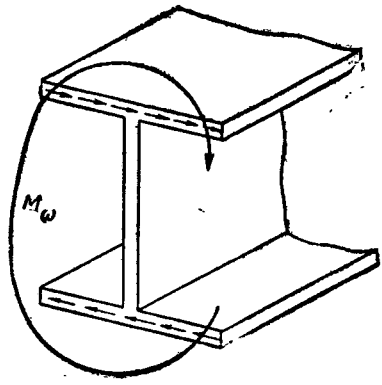


Рис. 44

будем называть **изгибно-крутящим моментом** и обозначать через M_ω.

Вторые, соответствующие чистому кручению, приводятся к **крутящему моменту** $M_{кр}$.

Для стержня двутаврового сечения это приведение представлено на рис. 44 и 45.

Алгебраическую сумму изгибно-крутящего момента M_ω и крутящего момента $M_{кр}$ будем обозначать через L

$$L = M_\omega + M_{кр} \tag{55}$$

и называть **общим крутящим моментом**.

Все перечисленные моменты измеряются в *кгсм*.

Изгибно-крутящий момент определим как интеграл моментов из элементарных секториальных касательных усилий относительно центра изгиба A, распространенный на всю площадь сечения стержня (рис. 46), а именно:

$$M_\omega = \int_F \tau_\omega \delta r ds = \int_F \tau_\omega \delta d\omega .$$

Интегрируя его по частям (полагая $\tau_\omega \delta = u$ и $d\omega = dv$), получим

$$M_\omega = uv - \int_F v du = \left| \tau_\omega \delta \omega \right|_F - \int_F \omega \frac{\partial}{\partial s} (\tau_\omega \delta) ds.$$

Первое слагаемое правой части этого выражения будет равно нулю, так как на продольных кромках рассматриваемого сечения касательные напряжения отсутствуют, следовательно, по свойству взаимности они должны быть равны нулю и в крайних точках поперечного сечения.

В таком случае будем иметь

$$M_\omega = -\int_F \omega \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{E\theta'''}{\delta}\int \omega\, dF\right)\delta\, ds = -E\theta'''\int_F \omega^2 dF,$$

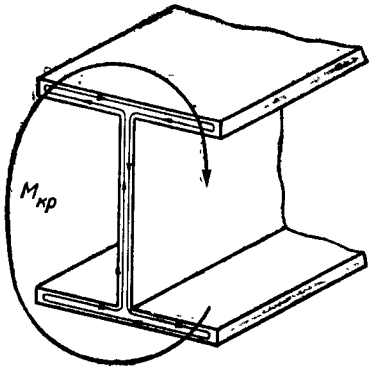


Рис. 45

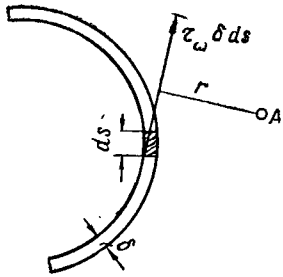


Рис. 46

Подставив в последнее уравнение значение τ_ω из формулы (20) и значение J_ω из формулы (26), получим окончательное выражение для изгибно-крутящего момента M

$$M_\omega = -EJ_\omega\theta'''. \tag{56}$$

Сравнивая выражение (56) с выражением (52), мы заключаем, что между изгибно-крутящим моментом M_ω и изгибно-крутящим бимоментом существует дифференциальная зависимость, напоминающая аналогичную зависимость между поперечной силой и изгибающим моментом в сопротивлении материалов нетонкостенных стержней, а именно:

$$M_\omega = \frac{dB_\omega}{dz}. \tag{57}$$

Подставив значение M_ω из формулы (56) в формулу (22), получим окончательное выражение для секториальных касательных напряжений

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^{отс}}{J_\omega \delta}. \tag{58}$$

Рассмотрим уравнение (55), определяющее общий крутящий момент L, и подставим в него значения M_ω и $M_{кр}$ из формул (4) и (56). Получим

$$-EJ_\omega \theta''' + GJ_d \theta' = L. \tag{59}$$

Дифференцируя уравнение (59) по z, будем иметь

$$-EJ_\omega \theta^{IV} + GJ_d \theta'' = \frac{dL}{dz}. \tag{60}$$

Если внешняя нагрузка q будет неравномерно распределена по длине стержня, то и интенсивность закручивающих моментов m относительно центра изгиба будет также величиной переменной

$$m = m(z).$$

Интенсивность сплошной моментной нагрузки $m(z)$ можно рассматривать как интенсивность изменения внешних (общих) крутящих моментов по длине балки

$$m = \frac{dL}{dz}.$$

В самом деле, рассмотрим элемент тонкостенного стержня длиной dz, находящийся в условиях загружения моментной нагрузкой интенсивностью m. По торцам этого элемента будут действовать крутящие моменты L и $L+dL$ (рис. 47).

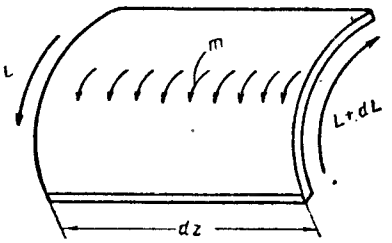


Рис. 47

Составим условие равновесия этого элемента

$$-L - mdz + (L + dL) = 0,$$

откуда

$$\frac{dL}{dz} = m. \tag{61}$$

Дифференциальная зависимость (61) аналогична известной зависимости между поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки $\left(\frac{dQ}{dz} = -q\right)$.

Подставив значение $\frac{dL}{dz}$ в уравнение (60), будем иметь

$$-EJ_\omega \theta^{IV} + GJ_d \theta'' = m. \tag{62}$$

Дифференциальное уравнение (62) будем называть **дифференциальным уравнением упругой линии углов закручивания** (по аналогии с дифференциальным уравнением упругой линии при изгибе).

В этом уравнении

EJ_ω — секториальная жесткость депланации тонкостенного стержня;

GJ_d — жесткость при чистом кручении.

Применяя уравнение (62) для участков стержня непосредственно незагруженных, следует принять в нем

$$m = 0.$$

Разделив его на EJ_ω и введя обозначение

$$\frac{GJ_d}{EJ_\omega} = k^2, \tag{63}$$

получим

$$\theta^{IV} - k^2\theta'' = -\frac{m}{EJ_\omega}. \tag{64}$$

k в уравнении (64) будем называть изгибно-крутильной характеристикой стержня. Измеряется она в $см^{-1}$.

Подставив в уравнение (64) значение θ'' из формулы (52)

$$\theta'' = -\frac{B_\omega}{EJ_\omega} \text{ и } \theta^{IV} = -\frac{B''_\omega}{EJ_\omega},$$

получим дифференциальное уравнение бимоментов

$$B''_\omega - k^2 B_\omega = m, \tag{65}$$

которым удобно пользоваться, когда требуется определить только силовые факторы, возникающие в сечениях тонкостенного стержня.

§ 8. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ СТЕСНЕННОГО КРУЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

В 1938—1939 гг. в лаборатории строительной механики б. ЦНИПС с целью проверки рассмотренной выше теории проф. Власова нами было проведено несколько экспериментов над двумя

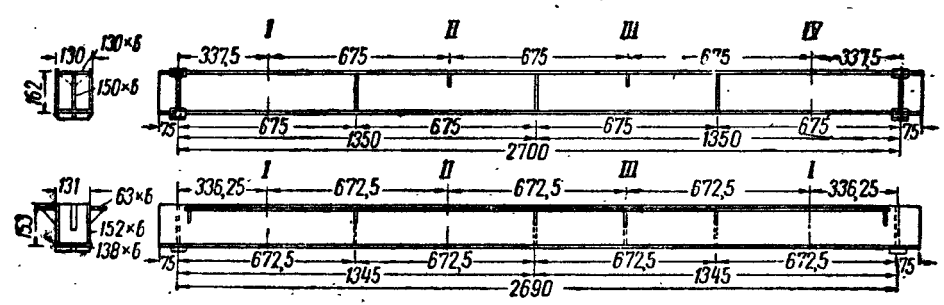


Рис. 48

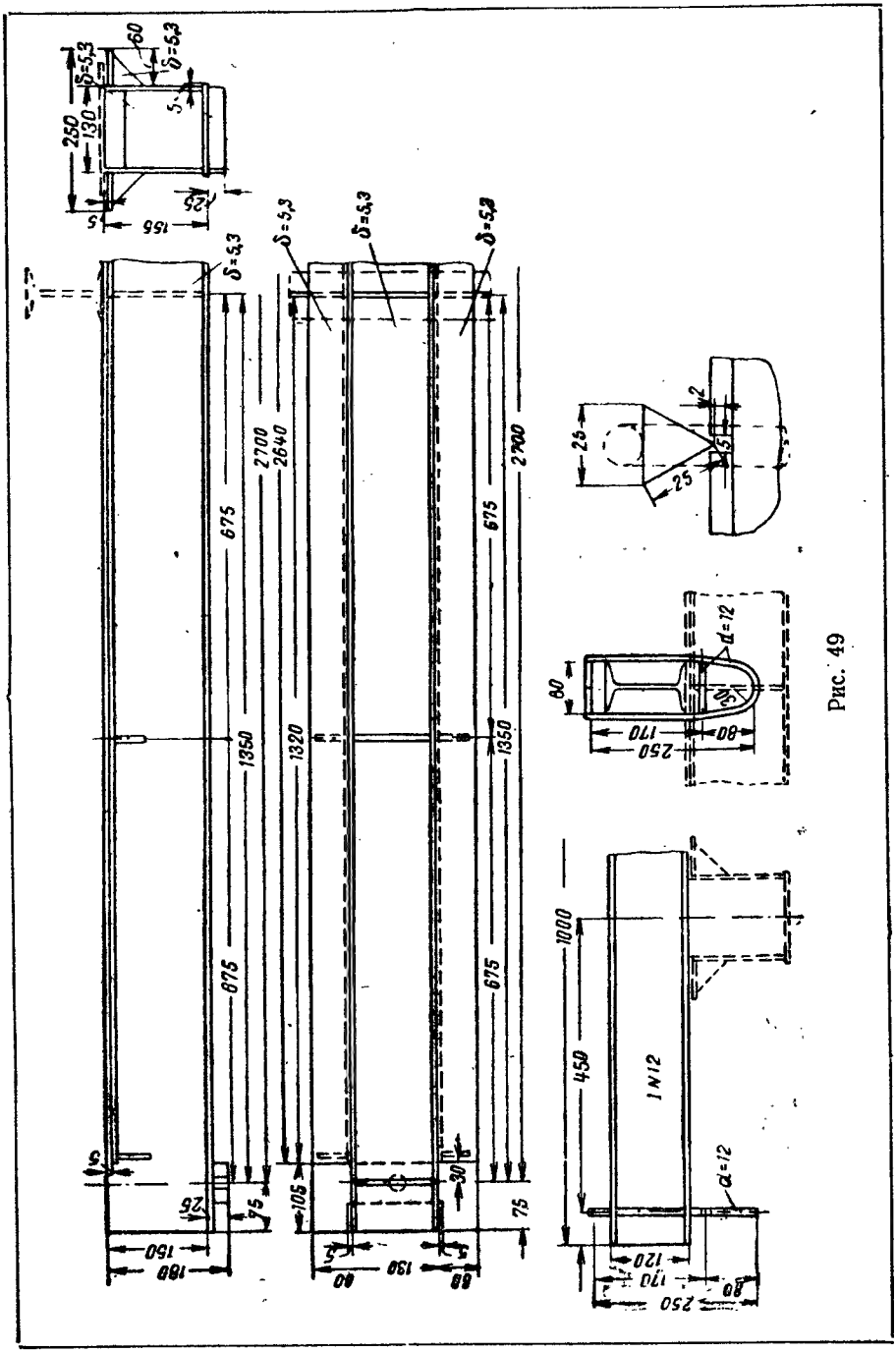

δ=5,3
60
250
130
5
25
155
2700
2640
675
1350
1320
875
105
30
75
150
180
80
130
25
2
5
d=12
80
170
250
1000
450
1N12
120

Рис. 49

металлическими образцами двутаврового и П-образного сечений (рис. 48).

Остановимся здесь лишь на описании результатов испытаний второго из этих образцов.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЗАКОНА СЕКТОРИАЛЬНЫХ ПЛОЩАДЕЙ НА БАЛКЕ П-ОБРАЗНОГО СЕЧЕНИЯ

а) Описание модели

Для испытания была изготовлена из 5,3-*мм* листовой стали марки 3 сварная балка П-образного сечения пролетом 2,7 *м* (рис. 49).

У опорных сечений образца продольные ребра были срезаны для возможности упирания в боковые шариковые опоры.

Во избежание излишней жесткости профиля диафрагмы по длине образца (за исключением среднего сечения в месте приложения нагрузки) не ставились. По условиям сварки (для устранения коробления) были поставлены в четвертях пролета только тонкие соединительные планки. При изготовлении образца было обращено особое внимание на полное соответствие действительных размеров с проектными и на высокое качество самой сварки. Это было достигнуто благодаря непосредственному участию и постоянному наблюдению опытного техника лаборатории Ф. А. Перн.

б) Постановка эксперимента

Первой частью эксперимента являлось испытание образца на чистое кручение на специальной установке для определения действительной жесткости образца GJ_d. Описание этой установки дано в главе II настоящей работы.

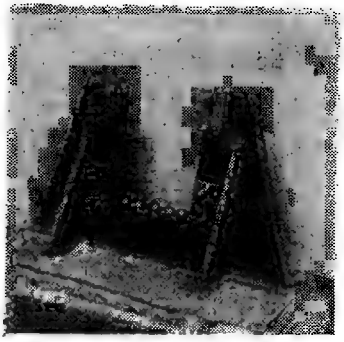


Рис. 50

Весьма важной конструктивной деталью при испытании на совместное действие изгиба и кручения являлись специально запроектированные опорные части. Они состояли из толстого 20-*мм* металлического листа, вертикально приваренного к опорному листу такой же толщины и укрепленного четырьмя треугольными перпендикулярно к нему приваренными ребрами. В вертикальном листе был сделан вырез, соответствовавший контурным размерам образца; к нижней горизонтальной плоскости выреза была приварена опорная плитка с закраинами, между которыми были уложены опорные стальные шарики. Вертикальные края балки также упирались в шарики, уложенные в специальных вырезах, закрытых

с обеих сторон прикрепленными на болтах плитками. В одной из опор был предусмотрен штырь. Общий вид конструкции опоры показан на рис. 50.

Такое устройство опор обеспечивает выполнение принятых в задаче граничных условий, а именно:

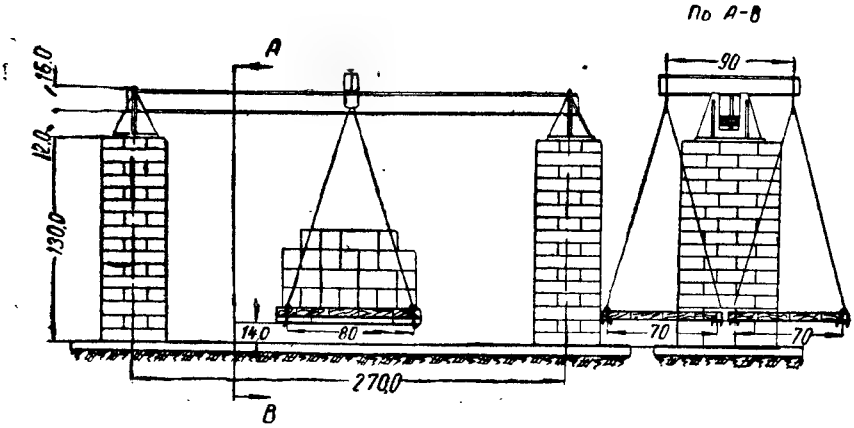


Рис. 51

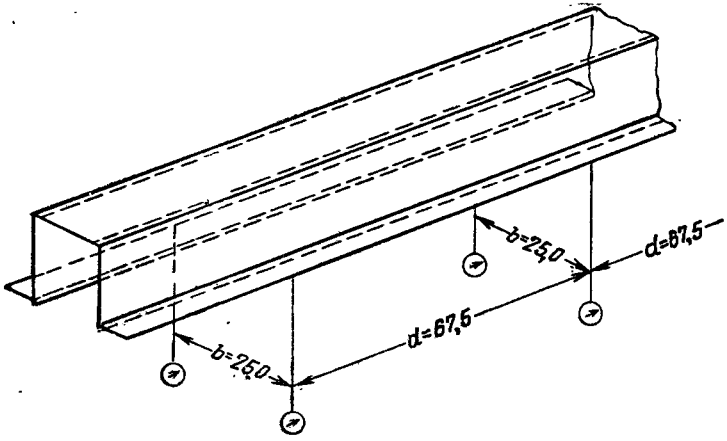


Рис. 52

1) возможны свободные продольные перемещения опорного сечения (отсутствие на опоре нормальных напряжений, что соответствует $\theta''=0$);

2) возможен свободный поворот сечения относительно горизонтальной и вертикальной осей ($\varphi_x \neq 0$ $\varphi_y \neq 0$);

3) угол закручивания на опоре отсутствует ($\theta=0$).

Описанные опоры были установлены на кирпичные столбы вы-

сотой в 1,3 *м* для удобства загружения и чтения отсчетов по приборам при проведении испытаний (рис. 51).

Грузовые платформы в количестве 2 шт. были подвешены к свободным концам специальной поперечной балочки (двутавр № 12) длиной 90 *см*, симметрично приваренной к верхнему поясу П-образной балки (рис. 49 и 51).

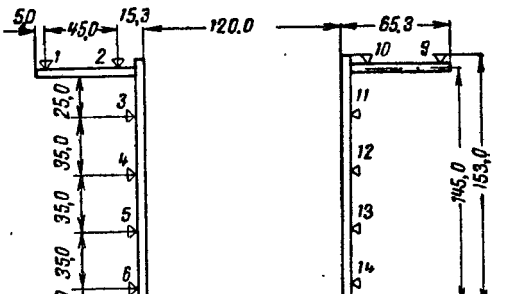


Рис. 53

Платформы нагружались чугунными чушками. Величина нагрузки была рассчитана из условия получения фибровых напряжений, не превышающих 1500—1600 *кг/см*², так как испытание проводилось только в пределах упругости материала балки. Изменение точки приложения нагрузки на балку достигалось изменением величины груза на каждой платформе, благодаря чему перемещалась равнодействующая давлений обеих платформ.

Измерительными приборами при испытании на чистое кручение являлись прогибомеры системы Емельянова, которые ставились в четырех сечениях образца, отстоящих на 67,5 *см* друг от друга, по два прибора в каждом сечении (рис. 52).

Рис. 54

При испытании на совместное действие изгиба и кручения мы пользовались тензометрами Хуггенбергера, которые ставили в двух сечениях по длине образца на расстоянии 101,25 *см* от опор. В каждом сечении было поставлено по 16 приборов (рис. 53 и 54). По ширине каждого из трех основных элементов балки (двух стенок и полки) было расположено по 4 тензометра, это и дало возможность выявить закон распределения напряжений как по ширине каждого элемента, так и по сечению в целом.

в) Проведение эксперимента

Испытание на чистое кручение производилось во всем одинаково с тем, как описано в главе II, § 5.

При испытании на совместное действие изгиба и кручения плоскость действия нагрузки перемещалась по отношению к линии центров изгиба семь раз, а именно: одно загружение на центральный изгиб ($e=0$), три загружения с эксцентрицитетом в одну сторону ($e=+2{,}29$ *см*, $e=+4{,}66$ *см* и $e=+6{,}82$ *см*) и три загружения с такими же эксцентрицитетами в другую сторону ($e=-2{,}29$ *см*, $e=-4{,}66$ *см* и $e=-6{,}82$ *см*).

Численное значение эксцентрицитета приложения нагрузки определялось по формуле

$$e = \frac{45\,(P_B - P_A)}{P_B + P_A}, \qquad (66)$$

где P_A — вес груза на одной платформе;

P_B — вес груза на второй платформе.

Начальные отсчеты приборов брались под нагрузкой, состоявшей из собственного веса балки, веса платформ и некоторой нагрузки (10% максимальной); причем эта начальная нагрузка в процессе всего испытания не снималась. В дальнейшем эта нагрузка обозначена № 0. Затем балка последовательно загружалась нагрузкой № 1, составлявшей треть максимальной, № 2 — $^2/_3$

Таблица 9

Величины нагрузок в *кг* при испытании П-образного образца

Эксцентрицитет e в *см*	№ нагрузок		
	1	2	3
0	450/450	900/900	1350/1350
+2,29	310/280	620/560	930/840
—2,29	280/310	560/620	840/930
+4,66	240/195	480/390	720/585
—4,66	195/240	390/480	585/720
+6,82	190/140	380/280	570/420
—6,82	140/190	280/380	420/570

Примечание: В числителе указаны нагрузки на одну платформу, в знаменателе — на другую.

максимальной и № 3 — равной максимальной. Загрузка и разгрузка по указанной схеме повторялись дважды.

Величины нагрузок соответственно номерам загружения приведены в табл. 9.

Схему цикличности загружения можно представить так:

$$0; 1; 2; 3; 2; 3; 2; 1; 0; 1; 2; 3; 2; 1; 0,$$

что составляет по 15 отсчетов по всем приборам для каждого эксцентрицитета.

г) Результаты испытаний

Физические характеристики материала образца: модуль упругости 1-го рода — E, модуль упругости 2-го рода — G и коэффициент Пуассона — μ были определены в лаборатории испытаний материалов Московского государственного университета на образцах, вырезанных из того же листа стали, из которых была изготовлена балка. Для определения модуля E было изготовлено три плоских образца, для определения модуля G — три круглых образца и для определения коэффициента μ — один плоский образец. Результаты испытаний, хорошо между собой согласующиеся, получились следующие:

$$E = \frac{2{,}16 \cdot 10^6 + 2{,}15 \cdot 10^6 + 2{,}14 \cdot 10^6}{3} = 2{,}15 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$G = \frac{0{,}817 \cdot 10^6 + 0{,}813 \cdot 10^6 + 0{,}816 \cdot 10^6}{3} = 0{,}815 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$\mu = 0{,}334.$$

Действительная жесткость GJ_d при испытании на чистое кручение определялась в результате обработки экспериментальных данных как средняя из 72 величин [12 циклов×2 (положительное и отрицательное кручение)×3 (I—II сечение, II—III сечение и III—IV сечение)] и получилась равной

$$GJ_d = 5{,}54 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

При испытании на совместное действие изгиба и кручения нормальные напряжения определялись путем измерения тензометрами Хуггенбергера фибровых деформаций на длине (на базе) 100 *мм* между двумя сечениями; в каждом из них было установлено по 16 приборов. В табл. 10 приводятся величины экспериментальных напряжений, полученные как среднее из 56 величин для каждой пары приборов [14 циклов×2 (нагрузка справа и слева от линии центров изгиба)×2 (сечение I и II)].

Необходимо отметить, что отклонения между отдельными величинами, из которых бралось среднее арифметическое, были небольшие.

Средние экспериментальные напряжения от совместного действия изгиба и кручения П-образного образца

№ приборов	Экспериментальные напряжения при величине эксцентрицитетов *e* в *см*			
	0	2,29	4,66	6,82
1	—264	—277	—253	—221
2	—272	—114	—52	— 15
3	—170	— 46	+1	+ 25
4	—33	+ 7	+16	+ 26
5	+113	+57	+32	+ 20
6	+247	+103	+46	+ 18
7	+305	+132	+58	+ 19
8	+287	+165	+111	+ 75
9	—264	—77	— 8	+ 29
10	—272	—234	—206	—176
11	—170	—181	—169	—154
12	—33	—48	— 52	— 50
13	+113	+85	+ 65	+ 57
14	+247	+212	+182	+161
15	+305	+270	+242	+205
16	+287	+205	+161	+130

д) Обработка результатов эксперимента на совместное действие изгиба и кручения по способу наименьших квадратов

Измеренные напряжения (вернее, деформации) представляют собой сумму отдельных напряжений, вызываемых в волокнах балки четырьмя причинами: вертикальным изгибом и кручением (основные напряжения), горизонтальным изгибом и продольным сжатием или растяжением (дополнительные напряжения). Эти измеренные напряжения нам нужно разложить на четыре составляющие, соответствующие четырем видам работы балки.

Обозначим эти четыре компонента напряжений через:

σ_0 — от продольной силы;

σ_x — от изгиба в вертикальной плоскости;

σ_y — от изгиба в горизонтальной плоскости;

σ_ω — от кручения.

Первые три из этих составляющих могут быть выражены обычными формулами сопротивления материалов

$$\sigma_0 = \frac{N}{F};$$

$$\sigma_x = \frac{M_x y}{J_x};$$

$$\sigma_y = \frac{M_y x}{J_y}.$$

Четвертая составляющая по теории проф. В. З. Власова выражается формулой (53)

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega\,\omega}{J_\omega}.$$

Разложение полученных при эксперименте напряжений на компоненты σ_o, σ_x, σ_y и σ_ω сводится к решению системы линейных уравнений, число которых равно числу приборов, стоящих в сечении, т. е. в нашем случае 16 уравнений. Таким образом, число уравнений превышает число неизвестных, и для решения задачи приходится прибегнуть к статической обработке, решая систему по способу наименьших квадратов.

Обозначим измеренные напряжения (вернее, средние из них, как указывалось выше) через σ_1, σ_2, σ_3, ..., σ_{15} и σ_{16}, где индекс указывает номер прибора (рис. 53).

Система линейных уравнений для определения компонентов напряжений σ_0, σ_x, σ_y и σ_ω будет иметь вид, представленный в табл. 11. Если бы все измеренные напряжения были абсолютно точными, то, решая любые четыре из этих уравнений, мы получили бы одни и те же значения для σ_o, σ_x, σ_y и σ_ω, другими словами, одна и та же система корней удовлетворяла бы всем уравнениям. Но так как каждое измерение содержит некоторую погрешность,

Таблица 11

Система уравнений для разложения экспериментальных напряжений на четыре компонента

№ уравнений	Коэффициенты при				Правая часть уравнений
	$\frac{N}{F}$	$\frac{M_x}{J_x}$	$\frac{M_y}{J_y}$	$\frac{B_\omega}{J_\omega}$	
	1,0	(y_l)	(x_l)	(ω_l)	
1	1,0	—7,49	+12,03	—58,04	σ_1
2	1,0	—7,49	+7,53	+31,63	σ_2
3	1,0	—4,46	+6,53	+39,53	σ_3
4	1,0	—0,96	+6,53	+17,6	σ_4
5	1,0	+2,54	+6,53	—4,33	σ_5
6	1,0	+6,04	+6,53	—26,26	σ_6
7	1,0	+7,54	+6,0	—32,56	σ_7
8	1,0	+7,54	+2,0	—10,85	σ_8
9	1,0	—7,49	—12,03	+58,04	σ_9
10	1,0	—7,49	—7,53	—31,63	σ_{10}
11	1,0	—4,46	—6,53	—39,53	σ_{11}
12	1,0	—0,96	—6,53	—17,6	σ_{12}
13	1,0	+2,54	—6,53	+4,33	σ_{13}
14	1,0	+6,04	—6,53	+26,26	σ_{14}
15	1,0	+7,54	—6,00	+32,56	σ_{15}
16	1,0	+7,54	—2,0	+10,85	σ_{16}

то невозможно точно удовлетворить всем 16 уравнениям одними и теми же значениями σ_0, σ_x, σ_y и σ_ω. Все наши измерения заслуживают одинакового доверия, поэтому корни уравнения должны быть выбраны так, чтобы возможно лучше согласовать все измерения. Этому условию лучше всего удовлетворяет решение уравнений по способу наименьших квадратов, который заключается в следующем.

Подставим в уравнение табл. 11 вместо неизвестных

$$\frac{N}{F}, \quad \frac{M_x}{J_x}, \quad \frac{M_y}{J_y} \quad \text{и} \quad \frac{B_\omega}{J_\omega}$$

какие-либо четыре величины u, v, w и z. Всем уравнениям эти величины, конечно, не удовлетворят, и правые части этих уравнений примут вид

$$\sigma_1 + \delta_1, \ \sigma_2 + \delta_2, \ldots, \sigma_{15} + \delta_{15}, \ \sigma_{16} + \delta_{16},$$

где $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{15}$ и δ_{16} — числа, выражающие величину ошибки (величину «отклонения»).

Таким образом, для произвольного прибора номера i получим уравнение вида

$$u + y_i v + x_i w + \omega_i z = \sigma_i + \delta_i; \tag{67}$$

например, для прибора № 3 это уравнение запишется так:

$$1 \cdot u - 4{,}46v + 6{,}53w + 39{,}53z = \sigma_3 + \delta_3 \tag{68}$$

и таких уравнений будет 16 в соответствии с числом измерительных приборов.

Из уравнения (67) находим ошибку δ_i

$$\delta_i = u + y_i v + x_i w + \omega_i z - \sigma_i \tag{69}$$

и квадрат этой ошибки

$$\delta_i^2 = (u + y_i v + x_i w + \omega_i z - \sigma_i)^2. \tag{70}$$

Определим теперь u, v, w и z так, чтобы сумма квадратов ошибок $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_{15}^2 + \delta_{16}^2$ была наименьшей, т. е. чтобы функция четырех независимых переменных u, v, w и z, представляющая сумму вида

$$S = \sum_{i=1}^{i=16} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{i=16} (u + y_i v + x_i w + \omega_i z - \sigma_i)^2, \tag{71}$$

имела минимум.

Для этого, как известно из дифференциального исчисления, мы должны взять от этой функции S частные производные по каждому переменному, приравнять их нулю и из четырех полученных таким образом уравнений найти u, v, w и z, удовлетворяющие поставленному условию.

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial S}{\partial u}\sum_{i=1}^{i=16}(u+y_iv+x_iw+\omega_iz-\sigma_i)=0;\\
&\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial S}{\partial v}\sum_{i=1}^{i=16}(u+y_iv+x_iw+\omega_iz-\sigma_i)\,y_i=0;\\
&\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial S}{\partial w}\sum_{i=1}^{i=16}(u+y_iv+x_iw+\omega_iz-\sigma_i)\,x_i=0;\\
&\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial S}{\partial z}\sum_{i=1}^{i=16}(u+y_iv+x_iw+\omega_iz-\sigma_i)\,\omega_i=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(72)$$

Решая эти четыре уравнения, получаем значения u, v, w и z.

Нетрудно заметить, что в нашем случае эта система распадается на две независимые системы с двумя неизвестными в каждой.

Из табл. 11 усматриваем, что для нашего образца

$$\sum_{i=1}^{i=16}x_i=\sum_{i=1}^{i=16}\omega_i=\sum_{i=1}^{i=16}y_ix_i=\sum_{i=1}^{i=16}y_i\omega_i=0\qquad(73)$$

(это происходит вследствие симметричности профиля и симметричного расположения приборов).

Поэтому уравнения (72) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=16}(u+y_iv-\sigma_i)=0;\\
&\sum_{i=1}^{i=16}y_i(u+y_iv-\sigma_i)=0;
\end{aligned}\right\}\qquad(74)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=16}x_i(x_iw+\omega_iz-\sigma_i)=0;\\
&\sum_{i=1}^{i=16}\omega_i(x_iw+\omega_iz-\sigma_i)=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(75)$$

В табл. 12 эти уравнения приведены в числовом выражении для трех эксцентрицитетов приложения нагрузки.

В таблице не помещены результаты обработки испытания для $e=0$.

Для этого случая задача сводится к решению системы только двух уравнений с двумя неизвестными, поскольку отсутствуют компоненты σ_y и σ_ω. Собственно этот случай $e=0$ приводится только

Таблица 12

Окончательные уравнения для определения параметров четырех компонентов напряжений

№ уравнений	$\frac{N}{F}=u$	$\frac{M_x}{J_x}=v$	Правые части уравнений при величине эксцентрицитета e в *см*		
			2,29	4,66	6,82
1	16	6,52	259	174	149
2	6,52	579,28	14393,91	10607,53	7978,45
	$\frac{M_y}{J_y}=w$	$\frac{B_\omega}{J_\omega}=z$			
3	823,98	—1007,6	—2064,31	—2541,16	—2531,42
4	—1007,6	16255,39	29619,01	37255,51	38584,2

для полноты картины, по существу же поставленного вопроса он, конечно, ничего дать не может. Результаты обработки экспериментальных данных помещены в табл. 13.

е) Определение теоретических напряжений и сравнение их с экспериментальными

Поперечное сечение образца со всеми размерами дано на рис. 55. Геометрические характеристики сечения следующие:

$$F = 30{,}95\,см^2;$$

$$J_x = 1090\,см^4;$$

$$J_y = 1396{,}3\,см^4.$$

Координата центра изгиба, отсчитываемая от оси горизонтального листа

$$\alpha_y = 5{,}427\,см.$$

Секториальный момент инерции $J_\omega = 29\,013$ *см*^{6}.

Все указанные характеристики подсчитаны с учетом площади сварных швов. Линейные и секториальные координаты (x, y и ω) точек сечения, в которых были установлены тензометры, даны в табл. 11 $\left(\text{как коэффициенты при } \frac{M_x}{J_x}, \frac{M_y}{J_y} \text{ и } \frac{B_\omega}{J_\omega}\right)$.

Для сравнения с данными, полученными из эксперимента, вычислены нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости σ_x и нормальные напряжения от кручения σ_ω, а также и сумма их для тех точек сечения, в которых были установлены тензометры.

Таблица 13

Результаты разложения экспериментальных нормальных напряжений на компоненты σ_o, σ_x, σ_y и σ_ω для П-образного образца

№ приборов	$e = 0$			$e = 2{,}29$					$e = 4{,}66$					$e = 6{,}82$				
	компоненты		σ после обработки	компоненты				σ после обработки	компоненты				σ после обработки	компоненты				σ после обработки
	σ_o	σ_x		σ_o	σ_x	σ_y	σ_ω		σ_o	σ_x	σ_y	σ_ω		σ_o	σ_x	σ_y	σ_ω	
1	11,2	−284,2	−273	6,1	−185,6	−3,6	−104,7	−287,8	3,4	−136,8	−3,7	−131,9	−269	3,7	−102,8	−2,2	−137,1	−238,4
2	11,2	−284,2	−273	6,1	−185,6	−2,3	+ 57	−124,8	3,4	−136,8	−2,3	+71,9	−63,8	3,7	−102,8	−1,4	+74,7	− 25,8
3	11,2	−169,2	−157	6,1	−110,5	−2	+ 71,3	−35,1	3,4	− 81,5	−2	+89,9	+9,8	3,7	− 61,2	−1,2	+93,4	+ 34,7
4	11,2	− 36,4	− 25,2	6,1	− 23,8	−2	+ 31,7	+12	3,4	− 17,5	−2	+40	+23,9	3,7	− 13,2	−1,2	+41,6	+ 30,9
5	11,2	+ 96,4	+107,6	6,1	+ 62,9	−2	− 7,8	+59,2	3,4	+ 46,4	−2	− 9,8	+38	3,7	+ 34,9	−1,2	−10,2	+ 27,2
6	11,2	+229,2	+240,4	6,1	+149,7	−2	− 47,4	+106,4	3,4	+110,4	−2	−59,7	+52,1	3,7	+ 82,9	−1,2	−62	+ 23,4
7	11,2	+286,1	+297,3	6,1	+186,8	−1,8	− 58,7	+132,4	3,4	+137,8	−1,8	−74	+65,4	3,7	+103,5	−1,1	−76,9	+ 29,2
8	11,2	+286,1	+297,3	6,1	+186,8	−0,6	− 19,6	+172,7	3,4	+137,8	−0,6	−24,7	+115,9	3,7	+103,5	−0,4	−25,6	+ 81,2
9	11,2	−284,2	−273	6,1	−185,6	+3,6	+104,7	−71,2	3,4	−136,8	+3,7	+131,9	+2,2	3,7	−102,8	+2,2	+137,1	+ 40,2
10	11,2	−284,2	−273	6,1	−185,6	+2,3	− 57	−234,2	3,4	−136,8	+2,3	−71,9	−203	3,7	−102,8	+1,4	−74,7	−172,4
11	11,2	−169,2	−157	6,1	−110,5	+2	− 71,3	−173,7	3,4	− 81,5	+2	−89,9	−166	3,7	− 61,2	+1,2	−93,4	−149,7
12	11,2	− 36,4	− 25,2	6,1	− 23,8	+2	− 31,7	−47,4	3,4	− 17,5	+2	−40	−52,1	3,7	− 13,2	+1,2	−41,6	− 49,9
13	11,2	+ 96,4	+107,6	6,1	+ 62,9	+2	+ 7,8	+78,8	3,4	+ 46,4	+2	+19,8	+61,6	3,7	+ 34,9	+1,2	+10,2	+ 50
14	11,2	+229,2	+240,4	6,1	+149,7	+2	+ 47,4	+205,2	3,4	+110,4	+2	+59,7	+175,5	3,7	+ 82,9	+1,2	+62	+149,8
15	11,2	+286,1	+297,3	6,1	+186,8	+1,8	+ 58,7	+253,4	3,4	+137,8	+1,8	+74	+217	3,7	+103,5	+1,1	+76,9	+185,2
16	11,2	+286,1	+297,3	6,1	+186,8	+0,6	+ 19,6	+213,1	3,4	+137,8	+0,6	+24,7	+166,5	3,7	+103,5	+0,4	+25,6	+133,2

Нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости σ_x подсчитывались по формуле

$$\sigma_x = \frac{Pz}{2J_x} y, \tag{76}$$

где P — равнодействующая нагрузок на обеих платформах, равная (см. табл. 9) для

$e = 0$ *см* $\quad P = 900$ *кг*

$e = 2{,}29$ *см* $\quad P = 590$ *кг*

$e = 4{,}66$ „ $\quad P = 435$ „

$e = 6{,}82$ „ $\quad P = 330$ „

z — расстояние сечения, в котором были расположены приборы, от опоры образца, равное 101,25 *см*.

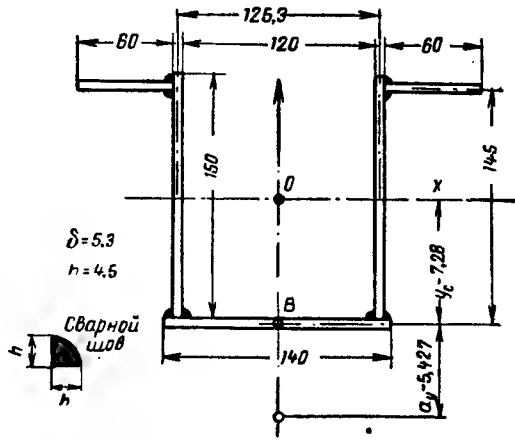


Рис. 55

Нормальные напряжения от кручения σ_ω подсчитаны по формуле (53)

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega \omega}{J_\omega},$$

где ω — секториальные координаты точек, в которых были расположены тензометры;

B_ω — изгибно-крутящий бимомент, вычисленный по формуле 7 приложения 8

$$B_\omega = \frac{Pe}{2k} \cdot \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}. \tag{77}$$

Здесь P имеет то же значение, которое указано выше;

e — эксцентрицитет приложения нагрузки;

$k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$ — упругая изгибно-крутильная характеристика образца.

Для сравнения с результатами эксперимента в табл. 14 даны все вычисленные напряжения как от изгиба, так и от кручения, а также их сумма.

На рис. 56 дан график напряжений по сечению образца для центрального загружения и трех случаев эксцентричного приложения нагрузок. На этом графике нанесены: 1) результаты, полученные из эксперимента; 2) результаты, полученные после обработ-

ки экспериментальных данных по способу наименьших квадратов, и 3) напряжения, полученные теоретическим путем.

Сравнение результатов проведенного нами эксперимента с теоретическими данными (табл. 13—14 и графики на рис. 56) совершенно определенно свидетельствует о том, что при совместном дей-

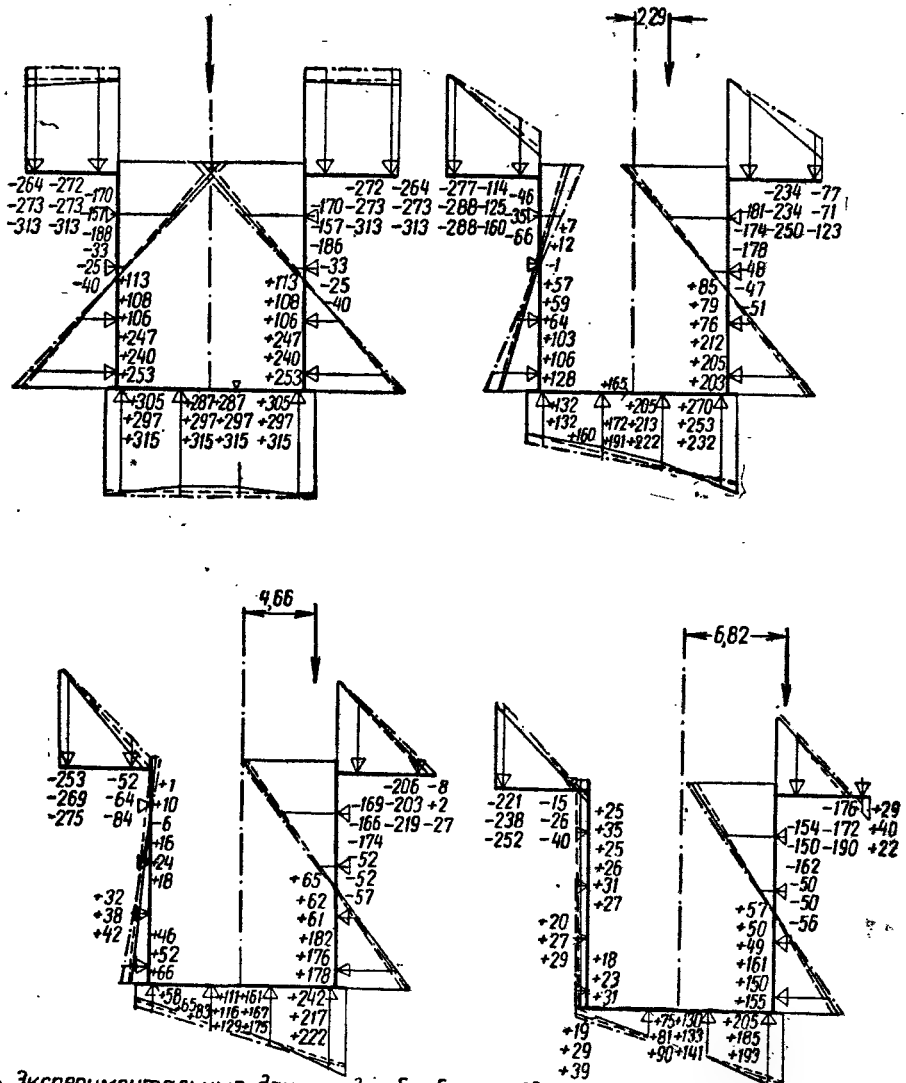


Рис. 56

ствии изгиба и кручения нормальные напряжения в поперечных сечениях металлических балок распределяются по закону секториальных площадей.

2. ОБРАБОТКА ПО ЧЕТЫРЕХЧЛЕННОЙ ФОРМУЛЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ СО ШВЕЛЛЕРНОЙ БАЛКОЙ, ПРОВЕДЕННЫХ БАХОМ В 1909—1910 гг.

Бах испытывал на изгиб в вертикальной испытательной машине швеллерную балку № 30 ($J_x = 7975$ *см*^{4}) длиной 3 *м*; нагрузка прилагалась по схеме, указанной на рис. 57. Фибровые деформации измерялись на базе 200 *мм* по одну сторону от середины пролета в четырех точках сечения *1*, *2*, *3* и *4* (рис. 58), расположенных на

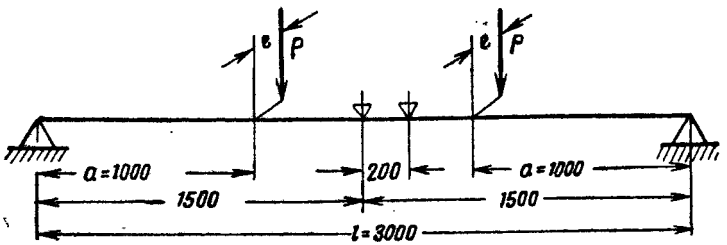


Рис. 57

расстоянии 145 *мм* от главной горизонтальной оси. Измерения производились с помощью зеркальных тензометров. Плоскость действия нагрузки и опорных реакций проходила параллельно стенке, в одном случае через центр самой стенки (испытание I, рис. 59), а во втором — через центр тяжести всего сечения (испытание II, рис. 60). Нормальные напряжения в направлении измерявшихся фибровых деформаций при нагрузке $P = 250/1750$ *кг* и модуле продольной упругости $E = 2\,100\,000$ *кг/см*^{2} получились следующие:

Испытание I	Испытание II
$\sigma_1 = -45$ *кг/см*^{2}	$\sigma_1 = +104$ *кг/см*^{2}
$\sigma_2 = -417$ „	$\sigma_2 = -518$ „
$\sigma_3 = +313$ „	$\sigma_3 = -16$ „
$\sigma_4 = +370$ „	$\sigma_4 = +456$ „

Соответствующие эпюры экспериментальных напряжений изображены на рис. 59 и 60.

Совершенно так же, как мы это сделали при обработке материалов проведенных нами экспериментов (см. § 8, п. 1), для разложения полученных напряжений на компоненты составим систему четырех линейных уравнений

Таблица 14

Теоретические нормальные напряжения от изгиба σ_x и от кручения σ_ω для балки П-образного сечения в местах установки приборов при испытании

№ приборов	$e=0$	$e=2{,}29$			$e=4{,}66$			$e=6{,}82$		
	σ_x	σ_x	σ_ω	$\sigma=\sigma_x+\sigma_\omega$	σ_x	σ_ω	$\sigma=\sigma_x+\sigma_\omega$	σ_x	σ_ω	$\sigma=\sigma_x+\sigma_\omega$
1	—313,1	—205,2	—82,4	—287,6	—151,3	—123,6	—274,9	—114,8	—137,2	—252
2	—313,1	—205,2	+44,9	—160,3	—151,3	+ 67,4	— 83,9	—114,8	+ 74,8	— 40
3	—186,4	—122,2	+56,1	— 66,1	— 90,1	+ 84,2	— 5,9	— 68,4	+ 93,5	+ 25,1
4	— 40,1	— 26,3	+25	— 1,3	— 19,4	+ 37,5	+ 18,1	— 14,7	+ 41,6	+ 26,9
5	+106,2	+ 69,6	—6,1	+63,5	+ 51,3	— 9,2	+ 42,1	+ 38,9	— 10,2	+ 28,7
6	+252,5	+165,5	—37,3	+128,2	+122	— 55,9	+ 66,1	+ 92,6	— 62,1	+ 30,5
7	+315,2	+206,6	—46,2	+160,4	+152,3	— 69,3	+ 83	+115,6	— 77	+ 38,6
8	+315,2	+206,6	—15,4	+191,2	+152,3	— 23,1	+129,2	+115,6	— 25,7	+ 89,9
9	—313,1	—205,2	+82,4	—122,8	—151,3	+123,6	— 27,3	—114,8	+137,2	+ 22,4
10	—313,1	—205,2	—44,9	—250,1	—151,3	— 67,4	—218,7	—114,8	— 74,8	—189,6
11	—186,4	—122,2	—56,1	—178,3	—90,1	— 84,2	—174,3	— 68,4	— 93,5	—161,9
12	— 40,1	—26,3	—25	—51,3	—19,4	— 37,5	— 56,9	— 14,7	— 41,6	— 56,3
13	+106,2	+69,6	+6,1	+75,7	+51,3	+ 9,2	+ 60,5	+ 38,9	+ 10,2	+ 49,1
14	+252,2	+165,5	+37,3	+202,8	+122	+55,9	+177,9	+ 92,6	+ 62,1	+154,7
15	+315,2	+206,6	+46,2	+252,8	+152,3	+69,3	+221,6	+115,6	+ 77	+192,6
16	+315,2	+206,6	+15,4	+222	+152,3	+23,1	+175,4	+115,6	+ 25,7	+141,3

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{N}{F} - \frac{M_x}{J_x}14{,}5 + \frac{M_y}{J_y}7{,}3 + \frac{B_\omega}{J_\omega}86{,}34 = \sigma_1;\\
&\frac{N}{F} - \frac{M_x}{J_x}14{,}5 - \frac{M_y}{J_y}2{,}7 - \frac{B_\omega}{J_\omega}45{,}61 = \sigma_2;\\
&\frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x}14{,}5 + \frac{M_y}{J_y}7{,}3 - \frac{B_\omega}{J_\omega}86{,}34 = \sigma_3;\\
&\frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x}14{,}5 - \frac{M_y}{J_y}2{,}7 + \frac{B_\omega}{J_\omega}45{,}61 = \sigma_4,
\end{aligned}
\right\} \quad (78)
$$

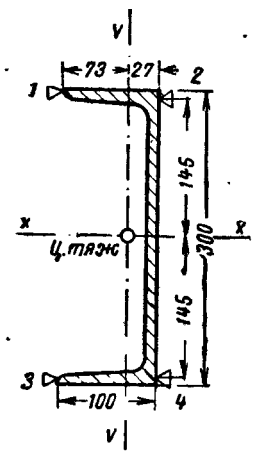


Рис. 58

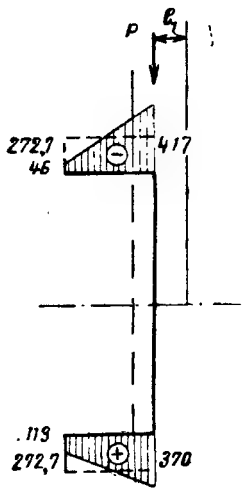


Рис. 59

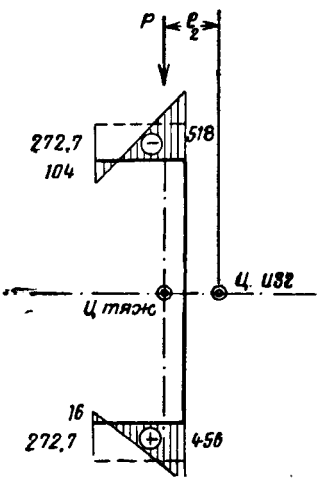


Рис. 60

где коэффициенты при $\frac{M_x}{J_x}$ и $\frac{M_y}{J_y}$ — координаты точек установки тензометров по отношению к главным осям сечения (рис. 58), а коэффициенты при $\frac{B_\omega}{J_\omega}$ — секториальные координаты (секториальные площади) тех же точек.

Решая систему (78), получаем

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{N}{F} = \frac{2{,}7(\sigma_1+\sigma_3)+7{,}3(\sigma_2+\sigma_4)}{20};\\
&\frac{M_y}{J_y} = \frac{(\sigma_1+\sigma_3)-(\sigma_2+\sigma_4)}{20};\\
&\frac{M_x}{J_x} = \frac{-91{,}22(\sigma_1-\sigma_3)-172{,}68(\sigma_2-\sigma_4)}{7\,653{,}1};\\
&\frac{B_\omega}{J_\omega} = \frac{(\sigma_1-\sigma_3)-(\sigma_2-\sigma_4)}{263{,}9}.
\end{aligned}
\right\} \quad (79)
$$

Подставив в формулу (79) значения σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4 и умножив найденные неизвестные на соответствующие координаты, получим искомые компоненты экспериментальных напряжений.

Результаты вычислений представлены в табл. 15.

Таблица 15

Экспериментальные нормальные напряжения в швеллерной балке по опытам Баха

Наименование точек	Компоненты напряжений			
	σ_o	σ_y	σ_x	σ_ω
	Испытание I			
1	—7,97	+41,9	—282,8	+205,7
2	—7,97	—15,5	—282,8	—108,7
3	—7,97	+41,9	+282,8	—205,7
4	—7,97	—15,5	+282,8	+108,7
	Испытание II			
1	—10,75	+54,75	—297,9	+357,9
2	—10,75	—20,2	—297,9	—189
3	—10,75	+54,75	+297,9	—357,9
4	—10,75	—20,2	+297,9	+189

Для определения теоретических величин напряжений вычислим дополнительные геометрические характеристики рассматриваемого германского швеллера № 30:

$$h = 300\,мм,\ b = 100\,мм,\ d = 10\,мм,\ t = 16\,мм,\ x_0 = 27\,мм,$$

$$r = t = 16\,мм,\ r_1 = \frac{1}{2}r = 8\,мм,\ J_x = 7975\,см^4;$$

уклон внутренней грани полок

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}08.$$

Координата центра изгиба с учетом уклона полок и закруглений

$$a_x = 3{,}253\,см.$$

Секториальные координаты крайних точек профиля будут равны

$$\omega_1 = 86{,}344\,см^2;$$

$$\omega_2 = 45{,}610\,см^2.$$

Секториальный момент инерции

$$J_\omega = 60\,435{,}6\,см^6.$$

Момент инерции при чистом кручении

$$J_d = 40{,}552\,см^4.$$

Отношение модулей упругости при сдвиге и растяжении, по данным Баха, равно

$$\frac{G}{E} = \frac{810\,000}{2\,100\,000} = 0{,}386\,.$$

В таком случае изгибно-крутильная упругая характеристика k будет равна

$$k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}} = 0{,}01609\,см^{-1}.$$

Изгибно-крутильный бимомент определяем по формуле

$$B_\omega = \frac{Pe}{k} \cdot \frac{\operatorname{sh} ka}{\operatorname{sh} kl}\,[\operatorname{sh} k(l-z) + \operatorname{sh} kz] =$$

$$= \frac{1\,500e}{k} \cdot \frac{\operatorname{sh} 100k}{\operatorname{sh} 300k}\,(\operatorname{sh} 140k + \operatorname{sh} 160k)\,.$$

Для I испытания

$$e_1 = \alpha_x = 3{,}25\,см\,;$$

для II испытания

$$e_2 = x_0 + \alpha_x - \frac{d}{2} = 2{,}7 + 3{,}25 - 0{,}5 = 5{,}45\,см.$$

Подставляя в формулу для B_ω величины k и e, получаем

$$B_{\omega(\mathrm{I})} = 130\,282{,}7\,кгсм^2\,;$$

$$B_{\omega(\mathrm{II})} = 218\,474\,кгсм^2.$$

Изгибающий момент для обоих испытаний будет равен:

$$M_x = Pa = 1\,500 \cdot 1000 = 1\,500\,000\,кгсм.$$

Искомые теоретические напряжения от изгиба в вертикальной плоскости и от кручения определяем по формулам

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J_x}\,y \quad \text{и} \quad \sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega}\,\omega.$$

Результаты вычислений представлены в виде табл. 16.

Сравнение компонентов σ_ω по этим результатам с данными Баха и результатами обработки этих данных Вебером дано в табл. 17.

Близкое совпадение наших результатов с указанными опытными данными подтверждает правильность обработки подобного рода экспериментов по четырехчленной формуле проф. Власова.

Таблица 16

Теоретические нормальные напряжения σ_x и σ_ω в швеллерной балке (к опытам Баха)

Наименование точек	Компоненты напряжений	
	σ_x	σ_ω
Испытание I		
1	—272,7	+201
2	—272,7	—106,2
3	+272,7	—201
4	+272,7	+106,2
Испытание II		
1	—272,7	+337
2	—272,7	—178
3	+272,7	—337
4	+272,7	+178

Таблица 17

Сравнение результатов экспериментов Баха с данными Вебера и Власова

Данные	№ испытаний и точек							
	испытание I				испытание II			
	1	2	3	4	1	2	3	4
По Веберу . .	+200	—123	—200	+123	+337	—207	—337	+207
„ Власову . .	+201	—106,2	—201	+106,2	+337	—178	—337	+178
„ Баху . . .	+205,7	—108,7	—205,7	+108,7	+357,9	—189	—357,9	+189

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЛАНОК И РЕШЕТОК НА ВЕЛИЧИНУ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В П-ОБРАЗНОМ СТЕРЖНЕ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Настоящий эксперимент был проведен нами в лаборатории строительной механики ЦНИПС для исследования влияния планок и различных типов решеток на величину нормальных напряжений в стержне, подвергающемся совместному действию изгиба и кручения.

Испытанию было подвергнуто восемь сварных образцов одинакового П-образного сечения, изготовленных в мастерских ЦНИПС из 5,3-*мм* листовой стали марки 3 (эти образцы были изготовлены старшим научным сотрудником Н. Г. Добудогло для испытания на устойчивость). Длина всех образцов составляла 2 *м*,

расчетный пролет при испытании был 1,92 *м*. Открытая часть профиля заполнялась по длине планками или решеткой (рис. 61). Два эталонных образца (№ 1 и 2) были изготовлены без всяких пла-

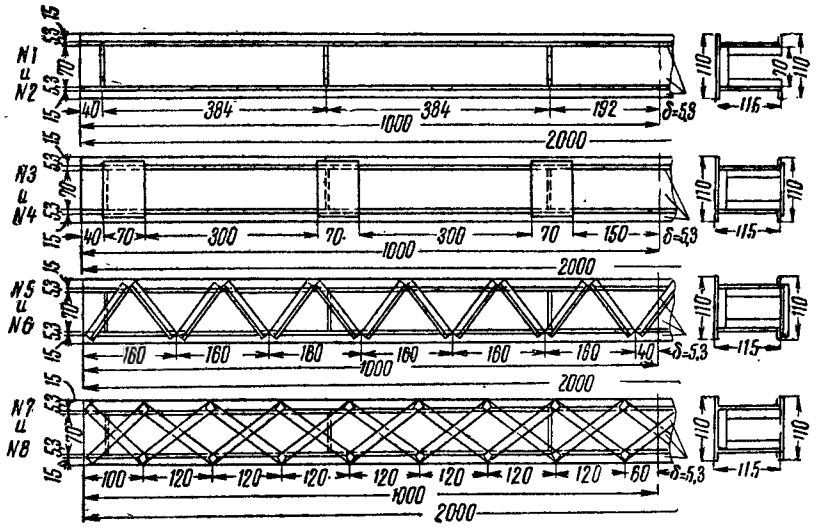


Рис. 61

нок или решеток. Два образца (№ 3 и 4) были усилены шестью планками шириной по 70 *мм*, приваренными на равных расстояниях друг от друга. Два образца (№ 5—6) имели треугольную решетку с панелью 160 *мм*; элементы решетки были выполнены из 2-*мм* листовой стали в форме уголков 20×20 *мм*. Наконец, два последних образца (№ 7 и 8) были заполнены перекрестной решеткой из полос шириной 2 *см* и толщиной 2 *мм* с панелью 120 *мм*.

По условиям сварки (во избежание коробления) по длине всех восьми образцов по внутреннему контуру сечения были поставлены однотипные и на одинаковом расстоянии тонкие диафрагмы, сваренные из полосок шириной 15 *мм*.

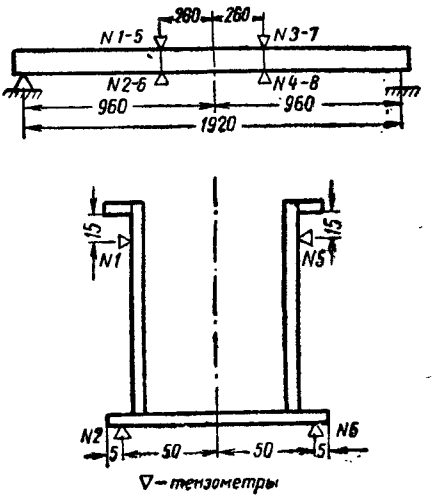


Рис. 62

Испытание указанных образцов проводилось на тех же установках и с теми же приспособлениями, как и все предыдущие вышеописанные испытания.

При испытании на совместное действие изгиба и кручения тензометры ставились в двух сечениях по длине каждого образца на расстоянии 70 *см* от опор, по четыре тензометра в сечении (рис. 62).

Плоскость действия нагрузки перемещалась по отношению к линии центров изгиба пять раз: одно загружение на центральный изгиб ($e=0$), два эксцентрицитета в одну сторону и два в другую; для разных образцов эти эксцентрицитеты даны в табл. 18.

Таблица 18

Эксцентрицитеты (в *см*) приложения нагрузки (к экспериментальному исследованию влияния планок и решеток)

№ образца	
1, 2, 3, 4, 5 и 6	7 и 8
+2,01	+3,91
+3,91	+6,43
—2,01	—3,91
—3,91	—6,43

Начальные отсчеты приборов брались под нагрузкой, состоящей из собственного веса балки, веса платформ и некоторой (10% максимальной) нагрузки, которая не снималась в процессе всего испытания. Затем балки последовательно нагружались нагрузкой № 1, составлявшей треть максимальной, № 2, составлявшей две трети максимальной, и № 3 — максимальной. Загрузка по этой схеме повторялась дважды. Величины нагрузок соответственно номерам загружений приведены в табл. 19.

Таблица 19

Величины нагрузок в *кг* при экспериментальном исследовании влияния планок и решеток на нормальные напряжения

Эксцентрицитет e в *см*	№ нагрузки		
	1	2	3
0	160/160	320/320	480/480
+2,01	175/160	350/320	525/480
—2,01	160/175	320/350	480/525
+3,91	125/105	250/210	375/315
—3,91	105/125	210/250	315/375
+6,43	120/90	240/180	360/270
—6,43	90/120	180/240	270/360

Цикличность загружения может быть представлена так:
0; 1; 2; 3; 2; 1; 0; 1; 2; 3; 2; 1; 0,

что составляет по 13 отсчетов на прибор для каждого эксцентрицитета.

Модуль упругости первого рода E был принят равным $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}; эта величина была проверена старшим научным сотрудником Н. Г. Добудогло испытанием образца, вырезанного из листа стали, на 5-*т* прессе Амслера.

Модуль упругости 2-го рода непосредственно не определялся, а из испытаний образцов на чистое кручение была определена сразу жесткость при кручении GJ_d. (Испытания образцов на чистое кручение проводил Н. Г. Добудогло.) Для тех восьми образцов, которые испытывались нами на совместное действие изгиба и кручения, эти величины GJ_d даны в табл. 20 (см. табл. 7).

Таблица 20

Жесткости при чистом кручении GJ_d (к экспериментальному исследованию влияния планок и решеток)

№ образцов	Тип усиления	Экспериментальные значения GJ_d в *кг/см*^{2}
1/2	Без усиления планками и решетками	$2{,}15 \cdot 10^6$ / $2{,}176 \cdot 10^6$
3/4	Усиленные планками (6 шт. шириной 70 *мм* каждая)	$14{,}532 \cdot 10^6$ / $13{,}438 \cdot 10^6$
5/6	Усиленные треугольной решеткой из уголков	$92{,}08 \cdot 10^6$ / $91{,}21 \cdot 10^6$
7/8	Усиленные перекрестной решеткой из полос	$176{,}77 \cdot 10^6$ / $121{,}43 \cdot 10^6$

В табл. 21 приводятся величины экспериментальных напряжений, полученные как средние из 56 величин для каждой пары приборов [14 циклов $\times$ 2 (нагрузка справа и слева от линии центров изгиба) $\times$ 2 (сечения I и II)]. Отклонения между отдельными величинами, из которых бралось среднее арифметическое, были небольшие.

Измеренные напряжения были разложены на составляющие от изгиба балки в вертикальной плоскости и от кручения способом, изложенным выше (§ 8, п. 1). Результаты обработки представлены в табл. 22.

Из рассмотрения табл. 22 можно заключить, что наличие планок и решеток, почти не сказываясь на изменении жесткости стержня на изгиб в вертикальной плоскости, значительно изменяет работу его на кручение. Стержень приближается к типу профилей с замкнутым контуром, причем наличие планок средней частоты уменьшает нормальные напряжения от кручения на 75%, а наличие

Таблица 21

Средние экспериментальные напряжения при исследовании влияния планок и решеток

№ образцов	Эксцентриситеты в *см*	№ приборов (рис. 62)			
		1	2	5	6
1	0	—133	+147	—133	+147
	2,01	— 89	+ 30	—191	+271
	3,91	— 38	— 30	—155	+232
2	0	—140	+148	—140	+148
	2,01	— 93	+ 45	—195	+268
	3,91	— 34	— 24	—159	+236
3	0	—143	+150	—143	+150
	2,01	—131	+130	—163	+183
	3,91	— 82	+ 74	—119	+139
4	0	—143	+144	—143	+144
	2,01	—134	+127	—164	+178
	3,91	— 83	+ 71	—121	+138
5	0	—130	+151	—130	+151
	2,01	—138	+156	—138	+155
	3,91	— 93	+107	— 94	+106
6	0	— 89	+147	— 89	+147
	2,01	—119	+161	—123	+154
	3,91	— 82	+102	— 83	+106
7	0	—117	+147	—117	+147
	3,91	— 84	+102	— 84	+102
	6,43	— 75	+ 97	— 75	+ 93
8	0	—112	+147	—112	+147
	3,91	— 82	+104	— 81	+ 99
	6,43	— 74	+ 94	— 74	+ 91

Таблица 22

Экспериментальные напряжения при исследовании влияния планок и решеток после обработки (компоненты от изгиба в вертикальной плоскости и от кручения)

Эксцентриситет *e* в *см*	Компонент напряжения	Образец № 1				Образец № 2			
		№ приборов							
		1	2	5	6	1	2	5	6
0	σ_x	—141	140	—141	140	—145	143	—145	143
	σ_x	—146	145	—146	145	—151	150	—151	150
2,01	σ_ω	79	— 97	— 79	97	75	— 92	— 75	92
	σ_x	— 99	98	— 99	98	—102	101	—102	101
3,91	σ_ω	87	—108	— 87	108	88	—109	— 88	109

Продолжение табл. 22

Эксцентриситет e в *см*	Компонент напряжения	Образец № 3				Образец № 4			
		№ приборов							
		1	2	5	6	1	2	5	6
0	σ_x	—146	147	—146	147	—143	144	—143	144
	σ_x	—151	152	—151	152	—150	151	—150	151
2,01	σ_ω	19	— 24	— 19	24	18	— 23	— 18	23
	σ_x	—103	104	—103	104	—103	104	—103	104
3,91	σ_ω	23	— 29	— 23	29	24	— 29	— 24	29

Продолжение табл. 22

Эксцентриситет e в *см*	Компонент напряжения	Образец № 5				Образец № 6			
		№ приборов							
		1	2	5	6	1	2	5	6
0	σ_x	—140	141	—140	141	—118	117	—118	117
	σ_x	—146	147	—146	147	—140	139	—140	139
2,01	σ_ω	—	—	—	—	—	—	—	—
	σ_x	— 99	100	— 99	100	— 93	93	— 93	93
3,91	σ_ω	—	—	—	—	—	—	—	—

Продолжение табл. 22

Эксцентриситет e в *см*	Компонент напряжения	Образец № 7				Образец № 8			
		№ приборов							
		1	2	5	6	1	2	5	6
0	σ_x	—131	133	—131	133	—130	129	—130	129
	σ_x	— 91	92	— 91	92	— 92	91	— 92	91
3,91	σ_ω	—	—	—	—	—	—	—	—
	σ_x	— 83	84	— 83	84	— 84	83	—84	83
6,43	σ_ω	—	—	—	—	—	—	—	—

решеток совершенно препятствует кручению стержня и заставляет его работать только на изгиб в вертикальной плоскости. Собственно эти результаты можно было бы предугадать уже из рассмотрения изменения жесткости при чистом кручении GJ_d в зависимости от наличия планок и решеток. Более наглядно результаты этих экспериментов представлены на графиках рис. 63, где изображены эпюры экспериментальных нормальных напряжений в зависимости от различного заполнения открытой стороны профиля планками или решеткой при одинаковых нагрузке и эксцентрицитете. Эпюры образцов с треугольной и перекрестной решетками совершенно ясно свидетельствуют о том, что здесь происходит почти только один изгиб без закручивания.

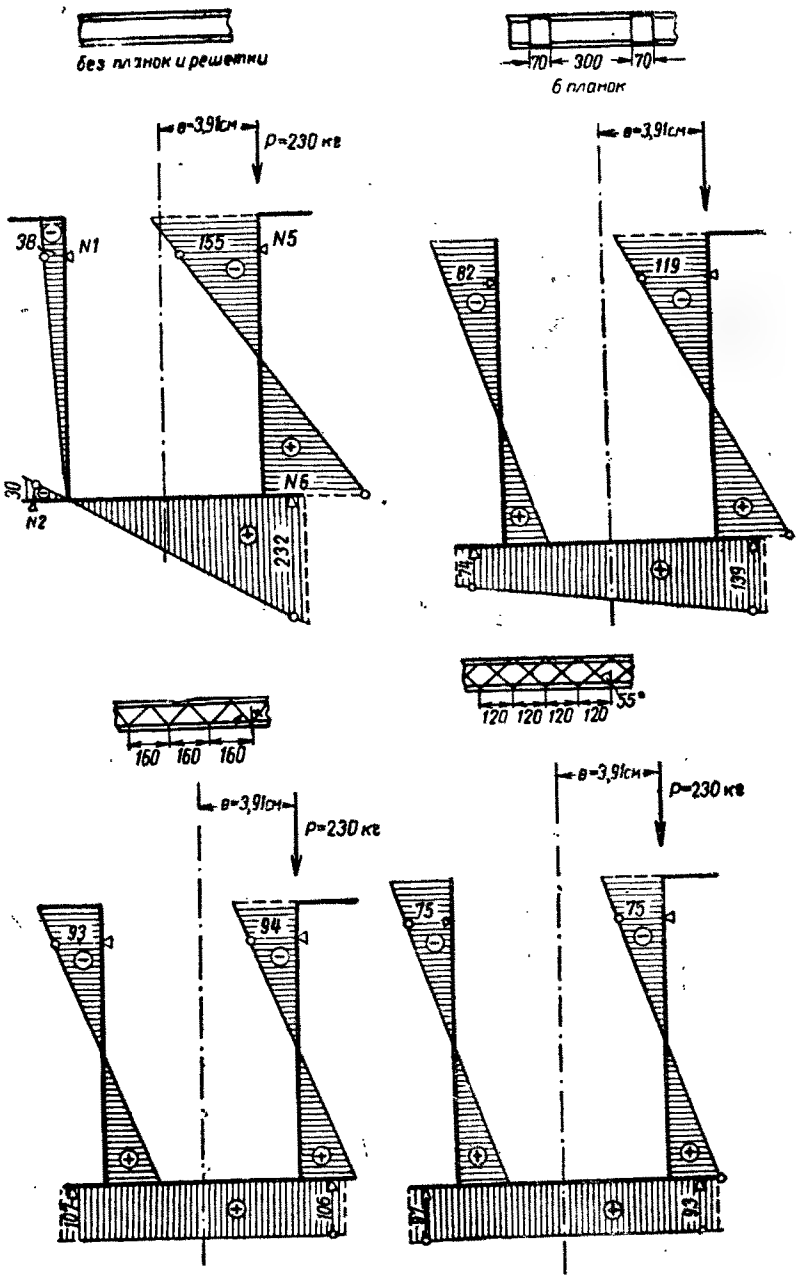

без планок и решетки
70
300
70
6 планок
в=3,91см
P=230 кг
38
N1
155
N5
30
N2
N6
232
82
119
74
139
120 120 120 120
55°
160 160 160
93
94
107
106
75
75
93

Рис. 63

ГЛАВА IV

ПРАКТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

§ 9. СЕКТОРИАЛЬНЫЕ ПЛОЩАДИ, КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ИЗГИБА И СЕКТОРИАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР СЕКТОРИАЛЬНЫХ ПЛОЩАДЕЙ (КООРДИНАТ)

Выше было указано, что секториальной площадью ω называется удвоенная площадь фигуры, заключенная между начальным радиусом вектором AM_0 и радиусом AM, проведенным из полюса A в рассматриваемую точку M средней линии сечения и контуром самого сечения. На рис. 37 эта площадь заштрихована.

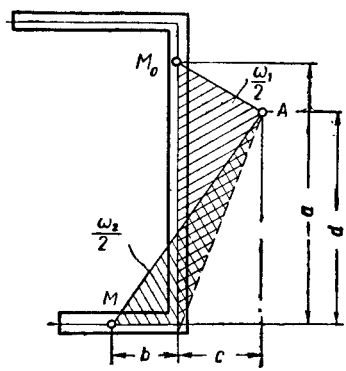


Рис. 64

Мы уже условились за положительную секториальную площадь принимать площадь, описанную начальным радиусом-вектором против движения часовой стрелки. На рис. 37 представлена положительная секториальная площадь.

Каждой точки сечения соответствует вполне определенная секториальная площадь. Поэтому в дальнейшем секториальную площадь будем рассматривать как секториальную координату соответствующей точки сечения.

Если для всех точек сечения мы определим секториальные координаты и отложим их в некотором масштабе перпендикулярно к средней линии рассматриваемого сечения стержня, то получим так называемую эпюру секториальных координат. Эта эпюра будет зависеть не только от полюса отсчета A, но и от начальной точки M_0.

Эпюру секториальных координат, построенную с полюсом в центре изгиба A и с начальной точкой, являющейся главной секториальной точкой M_0, будем называть эпюрой главных секториальных координат.

Если радиус-вектор пересекает контур сечения, то секториальная координата определяется как алгебраическая сумма двух площадей разных знаков. Например, на рис. 64 секториальная координата точки M равна

$$\omega = ac - db = \omega_1 - \omega_2 .$$

При переходе от полюса B к полюсу A рекомендуется пользоваться формулой перехода (43) и рис. 39. Эта формула может оказаться полезной при определении координат центра изгиба и начальной точки отсчета секториальных координат.

Так как $\sigma_\omega = \frac{B_\omega \omega}{J_\omega}$, а $\frac{B_\omega}{J_\omega} = \text{const}$, то эпюра главных секториальных координат будет в некотором масштабе являться и эпюрой секториальных нормальных напряжений σ_ω.

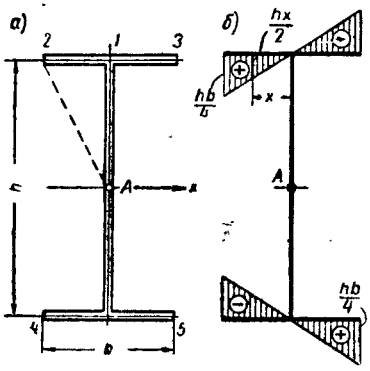


Рис. 65

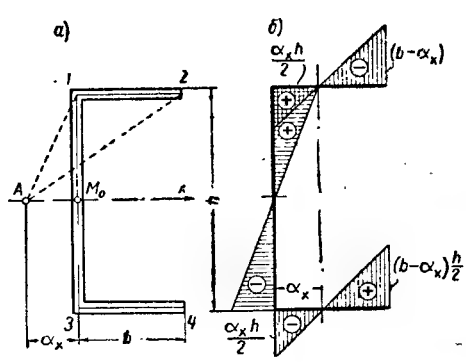


Рис. 66

Пример 7. Построить эпюру секториальных координат для стержня двутаврового сечения (рис. 65).

Так как этот стержень имеет две оси симметрии, то центр изгиба его находится в пересечении этих осей, т. е. совпадает с центром тяжести сечения. От точки *1* к точке *2* секториальная координата, очевидно, будет изменяться по линейному закону. В точке *2* она будет равна

$$\omega_2 = \frac{hb}{4}.$$

Такое же по абсолютной величине значение она будет иметь в точках *3*, *4* и *5*. В точках *2* и *5* она будет положительна, а в точках *3* и *4* — отрицательна. Соответствующая эпюра построена на рис. 65, *б*.

Пример 8. Построить эпюру главных секториальных координат для швеллерного сечения (рис. 66, *а*).

Центр изгиба швеллерного сечения, как было сказано выше, находится на оси симметрии. Обозначим расстояние его от средней линии стенки сечения через α_x. Главная секториальная точка находится на пересечении средней линии стенки с осью симметрии.

Секториальная координата точки *1* будет равна

$$\omega_1 = \frac{\alpha_x h}{2},$$

а в точке *2* она определится как алгебраическая сумма двух площадей AM_01 и $A12$, т. е.

$$\omega_2 = (b - \alpha_x)\frac{h}{2}.$$

Точно так же определим секториальные координаты в точках *3* и *4*. Эпюра главных секториальных координат построена на рис. 66, *б*.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ИЗГИБА

Пример 9. Определить положение центра изгиба для двутавра, сваренного из трех листов: вертикального 600×10 и двух горизонтальных 200×10 и 100×10 (рис. 67).

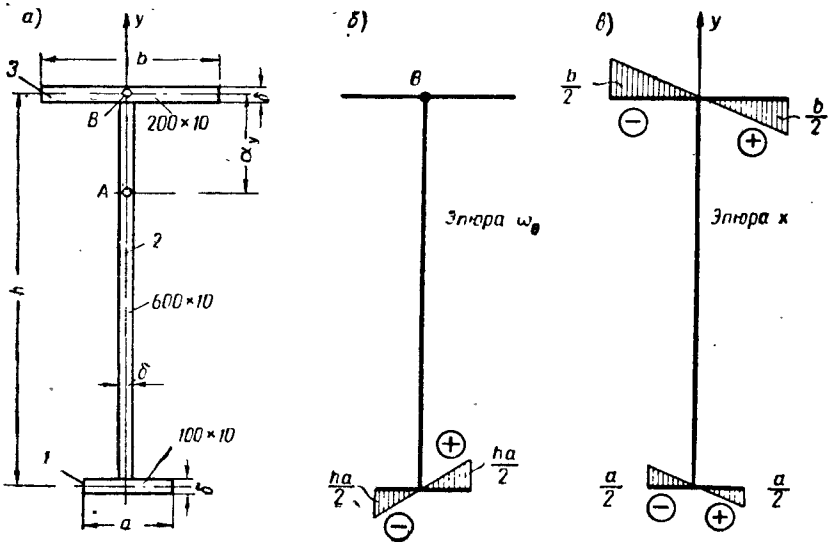


Рис. 67

Сечение имеет одну ось симметрии (ось y). Следовательно, искомый центр изгиба лежит на этой оси, т. е.

$$\alpha_x = 0.$$

Для определения координаты α_y за полюс отсчета B примем центр изгиба (центр тяжести) верхнего горизонтального листа. Тогда по формулам (49) и (48) будем иметь

$$\alpha_y = -\frac{S_{\omega_B x}}{J_y} = -\frac{\int_F \omega_B x dF}{J_y}.$$

На рис. 67, *б* построена эпюра секториальных координат с полюсом в точке *B*, а на рис. 67, *в* — эпюра линейных координат *x*. Интегрируя эти две эпюры по способу Верещагина, будем иметь

$$\alpha_y = -\frac{2\frac{ha}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\delta}{J_y} = -\frac{ha^3\delta}{12J_y}$$

или

$$\alpha_y = -\frac{J_{1y}}{J_y}h,$$

где J_{1y} — экваториальный момент инерции нижнего горизонтального листа относительно оси *y*.

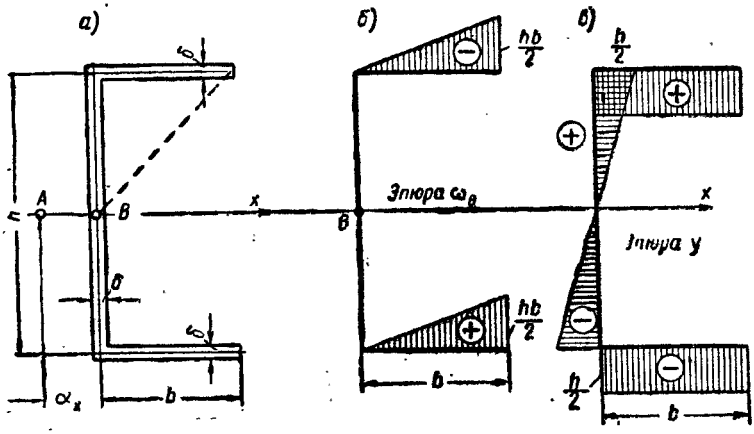


Рис. 68

Знак минус указывает на то, что искомую координату следует отложить от полюса *B* по отрицательному направлению оси *y*.

Подставив численные значения, получим

$$\alpha_y = -\frac{1\cdot10^3\cdot61\cdot12}{12(1\cdot10^3+1\cdot20^3)} = -\frac{61}{9} = -6{,}78\ см.$$

Пример 10. Определить положение центра изгиба швеллерного сечения, изображенного на рис. 68, *а*.

Сечение имеет одну ось симметрии, поэтому центр изгиба лежит на этой оси, т. е.

$$\alpha_y = 0.$$

Для определения α_x воспользуемся формулой (49), выбрав за полюс отсчета *B* точку пересечения оси симметрии с контуром сечения, и построим для этой точки эпюру секториальных коорди-

нат (рис. 68, *б*). Кроме того, чтобы воспользоваться формулой (49), нужно еще построить эпюру линейных координат x (рис. 68, *в*).

Интегрируя эти эпюры по способу Верещагина, найдем

$$\alpha_x = \frac{\int_F \omega_B \, y dF}{J_x} = \frac{-2\left(\frac{hb}{2} b \cdot \frac{1}{2} \frac{h}{2} \delta\right)}{\frac{\delta h^3}{12} + 2b\delta \frac{h^2}{4}} = -\frac{3h^2 b^2}{h^3 + 6bh^2},$$

откуда

$$\alpha_x = -\frac{3b^2}{h + 6b}.$$

Знак минус указывает на то, что координату α_x следует отложить от полюса B по отрицательному направлению оси x.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕКТОРИАЛЬНОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

Пример 11. Определить секториальный момент инерции несимметричного двутавра, изображенного на рис. 67, *а*.

Построим эпюру главных секториальных координат с полю-

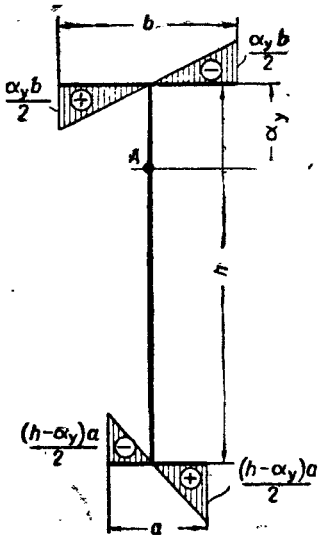


Рис. 69

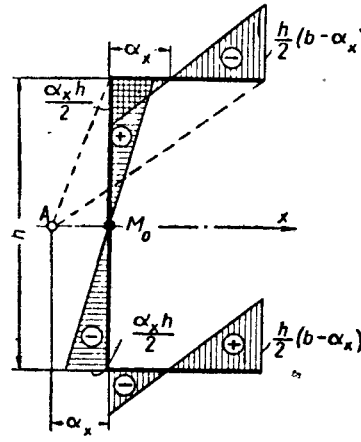


Рис. 70

сом в центре изгиба A (рис. 69) и для определения секториального момента инерции проинтегрируем ее саму с собой [см. формулу (26)]

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF = 2\left[\frac{\alpha_y b}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{\alpha_y b}{2}\delta + \frac{(h-\alpha_y)a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(h-\alpha_y)a\delta}{2}\right] = \frac{\alpha_y^2 b^3\delta}{12} + \frac{(h-\alpha_y)^2 a^3\delta}{12} = \alpha_y^2 J_{3y} + (h-\alpha_y)^2 J_{1y}.$$

Подставив значение α_y из формулы примера 9, получим

$$\frac{J_{1y}^2 h^2 J_{3y}}{J_y^2} + \left(h - \frac{J_{1y} h}{J_y}\right)^2 J_{1y} = \frac{h^2}{J_y^2}\left[J_{1y}^2 J_{3y} + (J_y - J_{1y})^2 J_{1y}\right] =$$

$$= \frac{h^2}{J_y^2}\left[J_{1y} J_{3y}\cdot(J_{1y} + J_{3y})\right]$$

и окончательно

$$J_\omega = \frac{J_{1y} J_{3y}}{J_y} h^2.$$

Подставив в это выражение численные значения, указанные в примере 9, будем иметь

$$J_\omega = \frac{\frac{1{,}10^3}{12}\cdot\frac{1{,}20^3}{12}61^2}{\frac{1{,}10^3}{12}+\frac{1{,}20^3}{12}} = 3{,}3\cdot 10^3\ см^6.$$

Пример 12. Определить секториальный момент инерции швеллера, изображенного на рис. 68, *а*.

Построим эпюру главных секториальных координат с полюсом в центре изгиба и с начальной точкой M_0 (рис. 70) и проинтегрируем ее саму с собой

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF = 2\left[\frac{\alpha_x h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{\alpha_x h}{2}\delta + \frac{\alpha_x h}{2}\cdot\frac{\alpha_x}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{2}{3}\frac{\alpha_x h}{2}\delta + \frac{h}{2}(b-\alpha_x)(b-\alpha_x)\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{h}{2}(b-\alpha_x)\delta\right] =$$

$$= \frac{h^2\delta}{12}\left[\alpha_x^2 h + 2\alpha_x^3 + 2(b-\alpha_x)^3\right] = \frac{h^2\delta}{12}\left[\alpha_x^2 h +\right.$$

$$\left.+ 2\alpha_x^3 + 2b^3 - 6b^2\alpha_x + 6\alpha_x^2 b - 2\alpha_x^3\right].$$

Подставляя сюда значение α_x из примера 10, получим

$$J_\omega = \frac{h^2\delta}{12}\left[\frac{9b^4}{(h+6b)^2}h + 2b^3 - 6b^2\frac{3b^2}{h+6b} + 6b\frac{9b^4}{(h+6b)^2}\right] =$$

$$= \frac{h^2 b^3\delta}{12(h+6b)^2}(9bh + 2h^2 + 24hb + 72b^2 - 18bh - 108b^2 + 54b^2)$$

и окончательно получим

$$J_\omega = \frac{h^2 b^3\delta}{12(h+6b)^2}(15bh + 2h^2 + 18b^2).$$

§ 10. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

1. СЕКТОРИАЛЬНАЯ КООРДИНАТА ПРИ ПЕРЕНОСЕ ПОЛЮСА

На рис. 71 изображена часть контура тонкостенного стержня, отнесенного к системе XOY осей координат. Примем точку $\overline{M}_0(x_0, y_0)$ за начало отсчета секториальных координат. Секториальная координата какой-нибудь точки $M(x, y)$ контура будет измеряться удвоенной площадью фигуры $D\overline{M}_0M$, где $D(d_x, d_y)$ — произвольно выбранный полюс отсчета секториальных координат. По знаку она положительна как описанная подвижным радиусом-вектором DM, вращающимся от начального радиуса-вектора $D\overline{M}_0$ против движения часовой стрелки. Обозначим ее через ω_D.

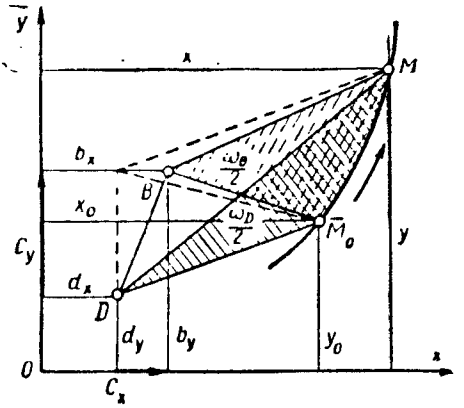


Рис. 71

Перенесем теперь полюс отсчета секториальных координат из точки D в точку B (b_x, b_y) и обозначим проекции расстояния DB на оси координат через c_x и c_y, а секториальную координату точки M при новом полюсе B через ω_B (на рис. 71 заштрихована пунктиром).

Из чертежа нетрудно получить, что

$$\omega_B = \omega_D + c_y(x - d_x) - c_x(y - b_y) - c_x(b_y - y_0) - c_y(x_0 - d_x),$$

откуда

$$\omega_B = \omega_D - c_x(y - y_0) + c_y(x - x_0). \qquad (80^*)$$

2. СЕКТОРИАЛЬНАЯ КООРДИНАТА ПРИ ПЕРЕНОСЕ НАЧАЛЬНОЙ ТОЧКИ $\overline{M}_0$

Пусть при неизменном полюсе D начальная точка $\overline{M}_0$ перенесена в точку M_0 контура (рис. 72).

Тогда нетрудно видеть, что секториальная координата точки M при новом начале отсчета M_0 выразится формулой

$$\omega_D = \overline{\omega}_D - \overline{\omega}_D^0, \qquad (81)$$

где $\overline{\omega}_D^0$ — удвоенная секториальная площадь, ограниченная векторами $D\overline{M}_0$ и DM_0 и дугой $\overline{M}_0M_0$, т. е. секториальная координата

* Формулы (80) и (81) выведены проф. В. З. Власовым и имеются в его работах.

новой начальной точки M_0, отсчитанная от старой начальной точки $\bar{M}_0$ с полюсом в точке D.

3. ЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ ПРИ ПЕРЕНОСЕ НАЧАЛА И ПОВОРОТА ОСЕЙ КООРДИНАТ

На рис. 73 изображена часть контура тонкостенного профиля, отнесенного к системе осей $\bar{\xi}\bar{O}\bar{\eta}$.

Обозначим координаты какой-нибудь точки M контура в этой системе через $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$.

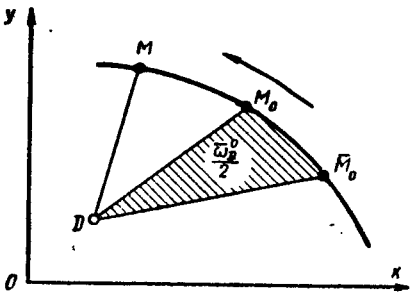


Рис. 72

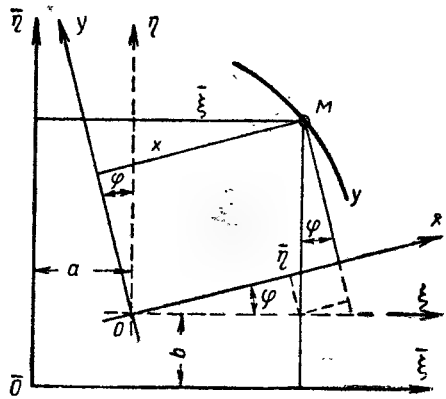


Рис. 73

Перенесем теперь начало координат $\bar{O}$ в точку O и, кроме того, повернем оси на некоторый положительный (против часовой стрелки) угол φ.

Тогда координаты точки M в новой системе осей XOY выразятся так:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\bar{\xi} - a)\cos\varphi + \\ &\quad + (\bar{\eta} - b)\sin\varphi; \\ y &= (\bar{\eta} - b)\cos\varphi - \\ &\quad - (\bar{\xi} - a)\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

где a и b — координаты нового начала в старой системе осей координат.

4. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЕКТОРИАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Для получения общей формулы преобразования секториальных координат прежде всего напишем формулы преобразования проекций c_x и c_y и разностей $x-x_0$ и $y-y_0$, входящих в формулу (80), при переносе начала и повороте системы осей координат.

Из рис. 74 нетрудно видеть, что

$$\left.\begin{aligned} c_x &= c_\xi \cos\varphi + c_\eta \sin\varphi\,; \\ c_y &= c_\eta \cos\varphi - c_\xi \sin\varphi\,. \end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

Разности $x-x_0$ и $y-y_0$ являются проекциями дуги MM_0 на оси X и Y, поэтому, пользуясь формулой (83), можем написать

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)\cos\varphi + (\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)\sin\varphi\,; \\ y - y_0 &= (\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)\cos\varphi - (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)\sin\varphi\,, \end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

где $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ координаты точки M, а $\bar{\xi}_0$ и $\bar{\eta}_0$ — координаты точки M_0 в старых осях $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$.

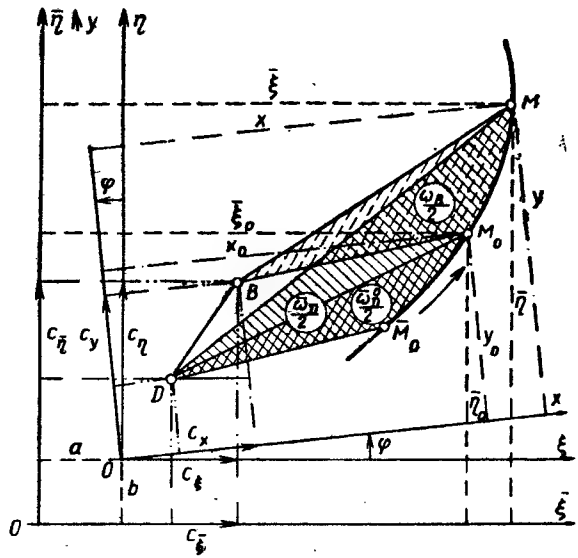


Рис. 74

Обозначим через ω_B секториальную координату произвольной точки контура M с полюсом в точке B и с началом отсчета в точке M_0 (на рис. 74 заштрихована пунктиром).

Тогда, подставив в формулу (80) вместо ω_D его значение из формулы (81), получим

$$\omega_B = \bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - c_x(y - y_0) + c_y(x - x_0)\,.$$

Будем теперь считать, что фигурирующая в последней формуле система осей координат XOY появилась в результате переноса начала и поворота на положительный угол φ системы осей $\bar{\xi}\bar{O}\bar{\eta}$. В таком случае на основании формул (83) и (84) можно написать

$$\omega_B = \bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - (c_\xi \cos\varphi + c_\eta \sin\varphi). \quad [(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)\cos\varphi -$$

$$-(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)\sin\varphi] + (c_\eta \cos\varphi - c_\xi \sin\varphi)\,[(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)\cos\varphi + (\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)\sin\varphi],$$

откуда после преобразования получим

$$\omega_B = \bar{\omega}_D = \bar{\omega}_D^0 - c_\xi(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c_\eta(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0). \tag{85}$$

Формула (85) и есть общая формула преобразования секториальных координат.

Здесь ω_B — секториальная координата произвольной точки контура M с полюсом в точке B, отсчитанная от начальной точки M_0;

$\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ и $\bar{\omega}_D$ — линейные и секториальная координаты той же точки контура M в осях $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ с полюсом в точке D и с началом отсчета в точке M_0;

$\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$ и $\bar{\omega}_D^0$ — линейные и секториальная координаты начальной точки контура M_0 в тех же осях и с тем же полюсом и началом отсчета;

c_ξ и c_η — проекции расстояния DB между полюсами D и B на оси ξ и η.

5. СЕКТОРИАЛЬНЫЙ СТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ

Подставив в подынтегральное выражение секториального статического момента

$$S_{\omega B} = \int_F \omega_B\, dF$$

значение секториальной координаты ω_B из формулы (85), получим

$$S_{\omega B} = \int_F \left[\bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - c_\xi(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c_\eta(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)\right] dF,$$

или

$$S_{\omega B} = S_{\bar{\omega}D} - S_{\bar{\xi}}\, c_\xi + S_{\bar{\eta}}\, c_\eta - F\,(\bar{\omega}_D^0 - c_\xi \bar{\eta}_0 + c_\eta \bar{\xi}_0),$$

где F — площадь, а $S_{\bar{\xi}}$ и $S_{\bar{\eta}}$ — статические моменты сечения относительно осей $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$;

$S_{\bar{\omega}D}$ — секториальный статический момент сечения относительно полюса D.

Допустим теперь, что оси $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ — центральные оси сечения, точка D — центр изгиба, а точка M_0 — секториальная нулевая точка сечения стержня, тогда

$$S_{\bar{\xi}} = S_{\bar{\eta}} = S_{\bar{\omega}D} = 0, \tag{86}$$

и формула для секториального статического момента относительно произвольного полюса B и при произвольной начальной точке отсчета M_0 примет следующий вид:

$$S_{\omega B} = F\left(c_\xi \bar{\eta}_0 - c_\eta \bar{\xi}_0 - \bar{\omega}_D^0\right). \tag{87}$$

6. СЕКТОРИАЛЬНО-ЛИНЕЙНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ

Подставив в формулы секториально-линейных статических моментов

$$S_{\omega Bx} = \int_F \omega_B x dF,$$

$$S_{\omega By} = \int_F \omega_B y dF$$

значения линейных координат x и y из формул (82) и секториальной координаты ω_B из формулы (85), получим

$$S_{\omega Bx} = \int_F \left[\bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - c_\xi\left(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0\right) + c_\eta\left(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0\right)\right] \times$$

$$\times \left[(\bar{\xi} - a)\cos\varphi + (\bar{\eta} - b)\sin\varphi\right] dF = S_{\bar{\omega}_D\bar{\xi}}\cos\varphi - S_{\bar{\omega}_D}\, a\cos\varphi +$$

$$+ S_{\bar{\omega}_D\bar{\eta}}\sin\varphi - S_{\bar{\omega}_D} b\sin\varphi - S_{\bar{\eta}}\,\bar{\omega}_D^0\cos\varphi + F\bar{\omega}_D^0 a\cos\varphi - S_{\bar{\xi}}\,\bar{\omega}_D^0\sin\varphi +$$

$$+ F\bar{\omega}_D^0 b\sin\varphi - J_{\bar{\xi}\bar{\eta}}\, c_\xi\cos\varphi + S_{\bar{\xi}}\, c_\xi a\cos\varphi - J_{\bar{\xi}}\, c_\xi\sin\varphi +$$

$$+ S_{\bar{\xi}}\, c_\xi b\sin\varphi + S_{\bar{\eta}}\, c_\xi\,\bar{\eta}_0\cos\varphi - Fc_\xi\,\bar{\eta}_0 a\cos\varphi + S_{\bar{\xi}}\, c_\xi\,\bar{\eta}_0\sin\varphi -$$

$$- Fc_\xi\,\bar{\eta}_0 b\sin\varphi + J_{\bar{\eta}}\, c_\eta\cos\varphi - S_{\bar{\eta}}\, c_\eta a\cos\varphi +$$

$$+ J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} c_\eta\sin\varphi - S_{\bar{\eta}}\, c_\eta b\sin\varphi - S_{\bar{\eta}}\, c_\eta\,\bar{\xi}_0\cos\varphi +$$

$$+ Fc_\eta\,\bar{\xi}_0 a\cos\varphi - S_{\bar{\xi}}\, c_\eta\,\bar{\xi}_0\sin\varphi + Fc_\eta\,\bar{\xi}_0 b\sin\varphi.$$

Если оси $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ являются не только центральными, но и главными, то

$$S_{\bar{\xi}} = S_{\bar{\eta}} = S_{\bar{\omega}_D} = S_{\bar{\omega}_D\bar{\xi}} = S_{\bar{\omega}_D\bar{\eta}} = J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} = 0 \tag{88}$$

и формула для секториально-линейного статического момента $S_{\omega_B x}$ примет следующий вид:

$$S_{\omega_B x} = -J_{\bar{\xi}}\, c_\xi\sin\varphi + J_{\bar{\eta}}\, c_\eta\cos\varphi +$$

$$+ F(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\left(\bar{\omega}_D^0 - c_\xi\,\bar{\eta}_0 + c_\eta\,\bar{\xi}_0\right). \tag{89}$$

Аналогичным образом получим

$$S_{\omega_B y} = -J_{\bar{\xi}}\, c_\xi\cos\varphi - J_{\bar{\eta}}\, c_\eta\sin\varphi +$$

$$+ F(b\cos\varphi - a\sin\varphi)\left(\bar{\omega}_D^0 - c_\xi\,\bar{\eta}_0 + c_\eta\,\bar{\xi}_0\right), \tag{90}$$

В формулах (89) и (90) приняты обозначения:

$J_{\bar{\xi}}$ и $J_{\bar{\eta}}$ — главные моменты инерции сечения;

φ — положительный (против часовой стрелки) угол поворота системы осей XOY по отношению к системе главных осей сечения $\bar{\xi} O \bar{\eta}$;

a и b — координаты нового начала O в системе главных осей $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$.

Остальные обозначения были даны выше, в формуле (85).

7. СЕКТОРИАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Подставив в формулу секториального момента инерции

$$J_{\omega_B} = \int_F \omega_B^2 dF$$

значение секториальной координаты ω_B из формулы (85), получим

$$J_{\omega_B} = \int_F [\bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - c_\xi(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c_\eta(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)]^2 dF =$$

$$= J_{\bar{\omega}_D} + F\bar{\omega}_D^0 + J_{\bar{\xi}} c_\xi^2 + Fc_\xi^2\bar{\eta}_0^2 - 2S_{\bar{\xi}} c_\xi^2 \bar{\eta}_0 +$$

$$+ J_{\bar{\eta}} c_\eta^2 + Fc_\eta^2\bar{\xi}_0^2 - 2S_{\bar{\eta}} c_\eta^2\bar{\xi}_0 - 2S_{\bar{\omega}_D} \bar{\omega}_D^0 -$$

$$- 2S_{\bar{\omega}_D\bar{\eta}} c_\xi + 2S_{\bar{\omega}_D} c_\xi\bar{\eta}_0 + 2S_{\bar{\omega}_D\bar{\xi}} c_\eta - 2S_{\bar{\omega}_D} c_\eta\bar{\xi}_0 +$$

$$+ 2S_{\bar{\xi}} \bar{\omega}_D^0 c_\xi - 2F\bar{\omega}_D^0 c_\xi \bar{\eta}_0 - 2S_{\bar{\eta}} \bar{\omega}_D^0 c_\eta + 2F\bar{\omega}_D^0 c_\eta \bar{\xi}_0 -$$

$$- 2J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} c_\xi c_\eta + 2S_{\bar{\xi}} c_\xi c_\eta \bar{\xi}_0 + 2S_{\bar{\eta}} c_\xi c_\eta \bar{\eta}_0 - 2Fc_\xi c_\eta \bar{\xi}_0 \bar{\eta}_0.$$

Если $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ — главные оси сечения, D — центр изгиба и M_0 — секториальная нулевая точка его, то

$$S_{\bar{\xi}} = S_{\bar{\eta}} = S_{\bar{\omega}_D} = S_{\bar{\omega}_D\bar{\xi}} = S_{\bar{\omega}_D\bar{\eta}} = J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} = 0,$$

и формула для секториального момента инерции примет следующий вид:

$$J_{\omega_B} = J_{\bar{\omega}_D} + J_{\bar{\xi}} c_\xi^2 + J_{\bar{\eta}} c_\eta^2 + F(\bar{\omega}_D^0 - c_\xi \bar{\eta}_0 + c_\eta \bar{\xi}_0)^2. \qquad (91)$$

Здесь $J_{\bar{\omega}_D}$ — секториальный момент инерции сечения с полюсом в центре изгиба его D.

Остальные обозначения даны к формулам (85) и (90).

§ 11. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СЕКТОРИАЛЬНЫМИ И ЛИНЕЙНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим сплошной незамкнутый тонкостенный профиль, сечение которого имеет одну (или две) ось симметрии и может быть разложено на элементы с осями симметрии, совмещенными

с осью симметрии всего сечения. Условию этому удовлетворяет профиль, изображенный на рис. 75. Сечение этого профиля может рассматриваться как состоящее из трех элементов *1*, *2* и *3* (элементы *1* и *3* на фигуре заштрихованы, а элемент *2* не заштрихован). Пусть центры изгиба отдельных элементов сечения известны. Обозначим их соответственно через D_1, D_2 и D_3, а расстояния их до центра изгиба всего сечения A — через α_{y1}, α_{y2} и α_{y3}. По второй из формул (49) координата центра изгиба

$$\alpha_y = -\frac{S_{\omega_B x}}{J_y}.$$

Выбираем вспомогательный полюс B в центре изгиба одного из элементов сечения, например, в точке D_1. Тогда будем иметь $S^1_{\omega_B x} = 0$, и формула (49) примет следующий вид:

$$\alpha_{y1} = -\frac{S^{(2)}_{\omega_B x} + S^{(3)}_{\omega_B x}}{J_y}. \qquad (92)$$

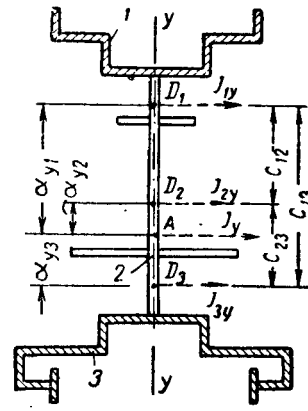


Рис. 75

Раскрывая по формуле (89) оба члена числителя в формуле (92), получаем

$$S^{(2)}_{\omega_B x} = J_{2y} c_{12}$$

(так как для элемента *2*: $\sin\varphi = 0$; $\cos\varphi = 1$; $a = 0$; $J_\eta = J_{2y}$ и $c_\eta = c_{12}$ и совершенно аналогично

$$S^{(3)}_{\omega_B x} = J_{3y} c_{13}.$$

Формула (92) поэтому примет следующий вид:

$$\alpha_{y1} = -\frac{J_{2y} c_{12} + J_{3y} c_{13}}{J_y}. \qquad (93)$$

Если при вычислении $S_{\omega_B x}$ в качестве вспомогательного полюса B выбрать центр изгиба D_2 элемента *2* или центр изгиба D_3 элемента *3*, то совершенно так же получится

$$\alpha_{y2} = \frac{J_{1y} c_{12} - J_{3y} c_{23}}{J_y}; \qquad (94)$$

$$\alpha_{y3} = \frac{J_{1y} c_{13} + J_{2y} c_{23}}{J_y}. \qquad (95)$$

Формулы (93)—(95) показывают, что операция нахождения центра изгиба составного профиля аналогична нахождению центра параллельных сил. С этой целью моменты инерции отдельных эле-

ментов J_{1y}, J_{2y}, ..., следует представить в виде взаимно параллельных векторов, проходящих через соответствующие центры изгиба элементов D_1, D_2.... Тогда линия действия равнодействующего вектора J_y будет проходить через центр изгиба составного профиля A. На рис. 75 воображаемые векторы изображены пунктирными стрелками.

Переходим теперь к определению секториального момента инерции J_ω рассматриваемого сечения.

Как известно

$$J_\omega = J_{1\omega} + J_{2\omega} + J_{3\omega} + \cdots, \tag{96}$$

где каждое из слагаемых правой части определяется по формуле (91)*.

Принимая во внимание, что для всех элементов рассматриваемого нами профиля

$$\omega_D^0 = 0; \quad c_\xi = 0 \text{ и } \xi_0 = 0,$$

получим

$$J_{1\omega} = J_{1\omega_D} + J_{1y}\alpha_{y1}^2; \tag{97}$$

$$J_{2\omega} = J_{2\omega_D} + J_{2y}\alpha_{y2}^2; \tag{98}$$

$$J_{3\omega} = J_{3\omega_D} + J_{3y}\alpha_{y3}^2. \tag{99}$$

Подставив последние выражения (97)—(99) в формулу (96) и принимая во внимание формулы (93)—(95), получим

$$J_\omega = J_{1\omega_D} + J_{2\omega_D} + J_{3\omega_D} + \frac{J_{1y}(J_{2y}c_{12} + J_{3y}c_{13})^2}{J_y^2} + \frac{J_{2y}(J_{1y}c_{12} - J_{3y}c_{23})^2}{J_y^2} + \frac{J_{3y}(J_{1y}c_{13} + J_{2y}c_{23})^2}{J_y^2}$$

или

$$J_\omega = J_{1\omega_D} + J_{2\omega_D} + J_{3\omega_D} + \frac{1}{J_y^2}\left[J_{1y}J_{2y}c_{12}^2(J_{2y} + J_{1y}) + J_{1y}J_{3y}c_{13}^2(J_{3y} + J_{1y}) + J_{2y}J_{3y}c_{23}^2(J_{3y} + J_{2y}) + 2J_{1y}J_{2y}J_{3y}(c_{12}c_{13} - c_{12}c_{23} + c_{13}c_{23})\right].$$

Принимая во внимание, что

$$2(c_{12}c_{13} - c_{12}c_{23} + c_{13}c_{23}) = c_{12}(c_{13} - c_{23}) + c_{13}c_{23} + c_{12}c_{13} + c_{23}(c_{13} - c_{12}) = c_{12}^2 + c_{13}(c_{12} + c_{23}) + c_{23}^2 = c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2,$$

* В дальнейшем при пользовании формулами § 10 черточки над значками координат для простоты записи будем опускать.

будем иметь

$$J_\omega = J_{1\omega_D} + J_{2\omega_D} + J_{3\omega_D} + \frac{1}{J_y^2}\left[J_{1y}J_{2y}c_{12}^2(J_{2y} + J_{1y} + J_{3y}) + \right.$$

$$\left. + J_{1y}J_{3y}c_{13}^2(J_{3y} + J_{1y} + J_{2y}) + J_{2y}J_{3y}c_{23}^2(J_{3y} + J_{2y} + J_{1y})\right].$$

Так как

$$J_{1y} + J_{2y} + J_{3y} = J_y,$$

то окончательно получим

$$J_\omega = J_{1\omega_D} + J_{2\omega_D} + J_{3\omega_D} + \frac{J_{1y}J_{2y}c_{12}^2 + J_{1y}J_{3y}c_{13}^2 + J_{2y}J_{3y}c_{23}^2}{J_y}. \quad (100)$$

Полученные формулы (93)—(95) и (100) для определения координаты центра изгиба и секториального момента инерции позволяют сформулировать следующую теорему.

Если сечение сплошного незамкнутого тонкостенного профиля имеет одну (или две) ось симметрии и сечение может быть разложено на элементы, из которых каждый имеет свою ось симметрии, совпадающую с осью симметрии всего сечения, то:

1) координата центра изгиба этого составного сечения, отсчитанная от центра изгиба какого-либо из элементов (начало отсчета), равна сумме произведений экваториальных моментов инерции остальных элементов относительно оси симметрии сечения на расстоянии центров изгиба их от начала отсчета, деленной на экваториальный момент инерции относительно оси симметрии всего составного сечения;

2) секториальный момент инерции этого составного сечения равен сумме собственных секториальных моментов инерции отдельных элементов (относительно своих центров изгиба) плюс сумма произведений экваториальных моментов инерции отдельных элементов, взятых попарно, на квадраты расстояний между центрами изгиба их, деленная на экваториальный момент инерции относительно оси симметрии всего составного сечения.

Доказанная нами теорема имеет большую практическую ценность. Пользование ею сводит довольно сложную задачу определения секториальных геометрических характеристик незамкнутых профилей к простым формулам, содержащим обыкновенные экваториальные моменты инерции и собственные секториальные моменты инерции элементов, составляющих сложный профиль, которые можно взять непосредственно из сортамента.

Кроме того, эта теорема позволяет вычислять секториальные моменты инерции независимо от нахождения центра изгиба составного профиля, что также имеет существенное значение.

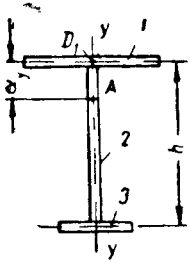
Пример 13. Сварной двутавр. Профиль сварен из трех листов, причем верхняя и нижняя полки его имеют различную ширину (рис. 76). Три элемента сечения рассматриваемого профиля пронумерованы.

Координату центра изгиба будем отсчитывать от центра изгиба (центра тяжести) верхнего горизонтального листа.

Тогда по формуле (93), считая $J_{2y}=0$, получим

$$\alpha_y = -\frac{J_{3y}h}{J_y}, \tag{101}$$

где h — расстояние между центрами тяжести горизонталов. Знак минус показывает, что α_y следует отложить от точки D_1 по отрицательной оси Y (вниз).



ис. 76

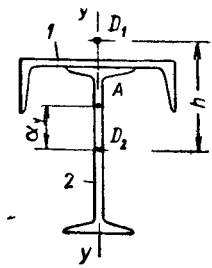


Рис. 77

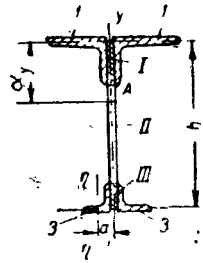


Рис. 78

Секториальный момент инерции по формуле (100) (имея в виду, что собственный секториальный момент инерции прямоугольника равен нулю) будет равен

$$J_\omega = \frac{J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y}. \tag{102}$$

Для симметричного двутавра формулы (101) и (102) примут следующий вид

$$\alpha_y = -\frac{J_{3y}h}{2J_{3y}} = -\frac{h}{2}$$

(чего и следовало ожидать, так как центр изгиба симметричного двутавра совпадает с его центром тяжести), и

$$J_\omega = \frac{J_{1y}^2 h^2}{J_y} = \frac{J_y^2 h^2}{4J_y},$$

откуда

$$J_\omega = \frac{J_y h^2}{4}. \tag{103}$$

Пример 14. Профиль, составленный из прокатных двутавра и швеллера. Изображенный на рис. 77 профиль применяется в практике для небольших подкрановых балок. Обозначим центр изгиба швеллера через D_1 (положение его известно из сортамента, см. приложение 2), центр изгиба (центр тяжести) двутавра — через D_2 и расстояние между ними — через h.

Координату центра изгиба всего составного сечения будем отсчитывать от точки D_2.

По формуле (94)

$$\alpha_y = \frac{J_{1y}h}{J_y}. \tag{104}$$

Секториальный момент инерции J_ω по формуле (100) равен

$$J_\omega = J_{1\omega} + J_{2\omega} + \frac{J_{1y}J_{2y}h^2}{J_y}, \tag{105}$$

где $J_{1\omega}$ и $J_{2\omega}$ — собственные секториальные моменты инерции швеллера и двутавра, известные из сортамента (приложения 1 и 2).

Пример 15. Клепаный двутавр, составленный из листа и четырех уголков (рис. 78). Рассматриваемый профиль будем считать состоящим из трех элементов:

I — тавра из двух верхних уголков и части вертикальной стенки, заключенной между полками этих уголков (на рис. 78 заштрихован);

III — тавра из двух нижних уголков и части стенки, заключенной между ними, и

II — части вертикальной стенки между таврами (на рисунке не заштрихована).

Центры изгиба тавров, как известно, находятся в пересечении осей стенок и полок их.

Обозначим расстояние между ними через h. Координату искомого центра изгиба составного сечения будем отсчитывать от центра изгиба верхнего тавра.

Тогда по формуле (93) (пренебрегаем моментом инерции вертикальной стенки)

$$\alpha_y = -\frac{J_{\mathrm{III}y}h}{J_y}$$

или

$$\alpha_y = -\frac{2J_{3y}h}{J_y}, \tag{106}$$

где J_{3y} — момент инерции одного нижнего уголка относительно оси I, равный

$$J_{3y} = J_{3\eta} + F_3a^2.$$

Секториальный момент инерции по формуле (100) равен:

$$J_\omega = \frac{J_{1y}J_{\mathrm{III}y}h}{J_y}$$

или

$$J_\omega = \frac{4J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y} \tag{107}$$

(собственные секториальные моменты инерции каждого из трех элементов — тавров и листа — равны нулю).

Пример 16. Н-образный профиль, составленный из трех клепаных двутавров (рис. 79). Расстояние между центрами изгиба симметричных горизонтальных двутавров *1* и *3* (на фигуре заштрихованных) обозначим через h. Вертикальный двутавр — несимметричный. Центр изгиба его [определяется по формуле (106)] обозначим через D_2, а расстояние от него до центров изгиба верхнего и нижнего горизонтальных двутавров соответственно через a и c.

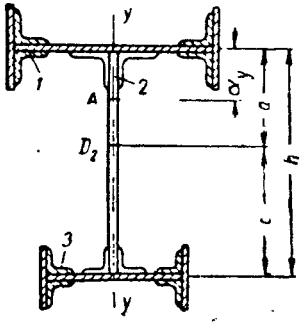


Рис. 79

Координаты центра изгиба составного сечения будем отсчитывать от центра изгиба 1-го двутавра по формуле (93).

$$\alpha_y = -\frac{J_{2y}a + J_{3y}h}{J_y}. \qquad (108)$$

Секториальный момент инерции составного сечения по формуле (100) будет равен:

$$J_\omega = J_{1\omega} + J_{2\omega} + J_{3\omega} + \frac{1}{J_y}(J_{1y}J_{2y}a^2 + J_{1y}J_{3y}h^2 + J_{2y}J_{3y}c^2). \qquad (109)$$

§ 12. ФОРМУЛЫ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ИЗГИБА И СЕКТОРИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ СОСТАВНЫХ ПРОФИЛЕЙ

1. ШВЕЛЛЕР, СВАРЕННЫЙ ИЗ ТРЕХ ЛИСТОВ

Определим координату центра изгиба и секториальный момент инерции швеллера, сваренного из трех листов (рис. 80). Пронумеруем элементы: полки номером 1, а стенку — номером 2. Расстояние между горизонтальными осями полок обозначим через h, а расстояние между вертикальными осями стенки и полок — через c.

По первой из формул (49) координата центра изгиба

$$\alpha_x = \frac{S_{\omega_B y}}{J_x}.$$

Вспомогательный полюс B выбираем в точке пересечения оси симметрии профиля с осью стенки. Тогда для второго элемента (для вертикального листа) $S''_{\omega_B y} = 0$, а для полок по формуле (90)

$$S_{\omega_B y} = F_1\left(-\frac{h}{2}\right)\left(c\frac{h}{2} - c\frac{h}{2} + \frac{h}{2}c\right) +$$

$$+ F_1\frac{h}{2}\left(-c\frac{h}{2} + c\frac{h}{2} - \frac{h}{2}c\right) = -2F_1\frac{h^2}{4}c = -2J_{1x}c,$$

так как для полок $J_\xi=0$; $\cos\varphi=1$; $\sin\varphi=0$; $\eta_0=b=\mp\frac{h}{2}$; $\xi_0=a=-c$; $\omega_D^0=\pm c\frac{h}{2}$ (для верхней полки площадь ω_D^0 на рис. 80 заштрихована); $c_\xi=-c$; $c_\eta=\mp\frac{h}{2}$ (верхние знаки относятся к верхней нижние — к нижней).

В таком случае

$$\alpha_x=-\frac{2J_{1x}c}{J_x}. \tag{110}$$

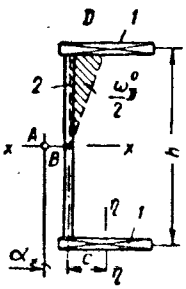


Рис. 80

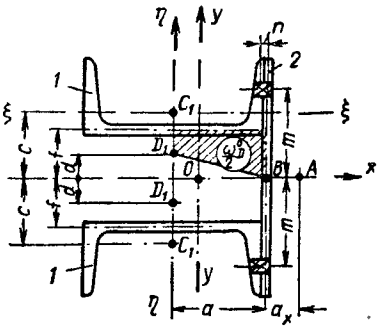


Рис. 81

Секториальный момент инерции по формуле (91)

$$J_\omega=J_{2x}\alpha_x^2+2J_{1\eta}\left(\frac{h}{2}\right)^2+2F_1\left[c\,\frac{h}{2}-(\alpha_x+c)\frac{h}{2}+\frac{h}{2}c\right]^2,$$

так как

$$J_{1\omega_D}=J_{2\omega_D}=0;\quad c_{1\bar\xi}=-(\alpha_x+c);\quad c_{2\bar\xi}=-\alpha_x,$$

$$c_{1\bar\eta}=\mp\frac{h}{2};\quad c_{2\bar\eta}=0,$$

а выражение в скобках для стенки равно нулю.

Сделав преобразования и подставив значение α_x из формулы (110), получим

$$J_\omega=J_{2x}\frac{4J_{1x}^2c^2}{J_x^2}+2J_{1\eta}\left(\frac{h}{2}\right)^2+2F_1\left(\frac{h}{2}\right)^2\left(-\frac{2J_{1x}c}{J_x}+c\right)^2=$$

$$=\frac{4J_{2x}J_{1x}^2c^2}{J_x^2}+J_{1\eta}\frac{h^2}{2}+\frac{2J_{1x}J_{2x}^2c^2}{J_x^2}=\frac{2J_{1x}J_{2x}c^2}{J_x}\left(\frac{2J_{1x}+J_{2x}}{J_x}\right)+J_{1\eta}\frac{h^2}{2},$$

откуда

$$J_\omega=\frac{2J_{1x}J_{2x}c^2}{J_x}+J_{1\eta}\frac{h^2}{2}. \tag{111}$$

2. ПРОФИЛЬ, СОСТАВЛЕННЫЙ ИЗ ДВУХ ПРОКАТНЫХ ШВЕЛЛЕРОВ И ЛИСТА (рис. 81)

Пронумеруем элементы: швеллеры номером 1, а лист — номером 2; принятые обозначения указаны на рис. 81.

Вспомогательный полюс B выбираем в центре листа.

Тогда $S''_{\omega_B y}$ будет равен нулю и формула (49) для определения координаты центра изгиба примет вид

$$\alpha_x = \frac{\sum S'_{\omega_B y}}{J_x}.$$

Числитель определяем по формуле (90), причем

$$\cos\varphi = 1; \quad \sin\varphi = 0; \quad c_\xi = a; \quad c_\eta = \mp d;$$

$$b = \mp c; \quad \omega_D^0 = \mp (2f - d)\,a; \quad \eta_0 = \mp c; \quad \xi_0 = a.$$

Подставляя эти величины в формулы (90), получаем

$$\alpha_x = \frac{1}{J_x}\{-2J_{1\xi}\,a + 2F_1 c\,[(2f - d)\,a - ac + da]\} =$$

$$= \frac{1}{J_x}[-2J_{1\xi}\,a + 2F_1 c\,(2f - c)\,a] = \frac{1}{J_x}[-(J_{1\xi} + F_1 c^2) + 2F_1 cf]\,2\alpha,$$

откуда

$$\alpha_x = \frac{(2F_1 cf - J_{1x})\,2a}{J_x}. \tag{112}$$

Секториальный момент инерции J_ω определяем по формуле (91)

$$J_\omega = 2J_{1\omega_D} + 2J_{1\xi}(a + \alpha_x)^2 + 2J_{1\eta}d^2 + J_{2\xi}\alpha_x^2 + 2F_1 \times$$
$$\times [-(2f - d)\,a + (a + \alpha_x)\,c - da]^2 =$$
$$= 2J_{1\omega_D} + 2(J_{1\xi} + F_1 c^2)(a + \alpha_x)^2 + 2J_{1\eta}d^2 +$$
$$+ J_{2\xi}\alpha_x^2 + 2F_1[4f^2a^2 - 4fac(a + \alpha_x)],$$

откуда

$$J_\omega = 2J_{1\omega_D} + 2J_{1\eta}d^2 + 2J_{1x}(a + \alpha_x)^2 +$$
$$+ J_{2x}\alpha_x^2 + 8F_1 fa\,[fa - (a + \alpha_x)\,c]. \tag{113}$$

Пользуясь доказанной в § 11 теоремой и формулами, выведенными в § 12, мы составили таблицу, содержащую формулы координат центра изгиба и секториальных моментов инерции некоторых симметричных профилей (приложение 5).

§ 13. УЧЕТ ОТВЕРСТИЙ ДЛЯ ЗАКЛЕПОК ИЛИ БОЛТОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

1. Сечение отверстия представляет собой прямоугольник со сторонами d и δ, где d — диаметр заклепки (или болта), а δ — толщина склепываемого пакета.

Выведем формулы секториальных геометрических характеристик сечений отверстия, считая его отрицательным элементом всего сечения.

Обозначим

$$F_{\text{отв}} = d\delta. \tag{114}$$

Формулы (89) и (90) секториально-линейных статических моментов сечения отверстия относительно произвольного полюса B и главных осей всего сечения X и Y примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} S^{\text{отв}}_{\omega_B x} &= F_{\text{отв}}\, a\,(\omega^0_D - c_\xi \eta_0 + c_\eta \xi_0); \\ S^{\text{отв}}_{\omega_B y} &= F_{\text{отв}}\, b\,(\omega^0_D - c_\xi \eta_0 + c_\eta \xi_0). \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

(Имея ввиду малости размеров отверстия $J^{\text{отв}}_\xi = J^{\text{отв}}_\eta = 0$ и главные оси отверстия параллельными главным осям всего сечения: $\cos\varphi = 1$; $\sin\varphi = 0$).

Здесь a и b — координаты центра тяжести всего сечения в осях ξ и η;

ξ_0, η_0 и ω^0_D — линейные и секториальная координаты принятой начальной точки отсчета M_0, отсчитанные от осей ξ и η и центра тяжести отверстия (так как центр изгиба, центр тяжести и главная секториальная точка у прямоугольника совпадают);

c_ξ и c_η — проекции расстояния от центра тяжести отверстия до полюса B на главные оси элемента.

Формула (87) секториального статического момента отверстия относительно центра изгиба A остается без изменения

$$S^{\text{отв}}_{\omega_A} = -F_{\text{отв}}\,(\omega^0_D - c_\xi \eta_0 + c_\eta \xi_0), \tag{116}$$

где c_ξ и c_η — проекции расстояния от центра тяжести отверстия до центра изгиба A всего сечения на главные оси отверстия.

Формула (85) для определения секториальной координаты центра отверстия относительно центра изгиба и главной секториальной точки всего сечения будет иметь следующий вид:

$$\omega^{\text{отв}}_A = -(\omega^0_D - c_\xi \eta_0 + c_\eta \xi_0), \tag{117}$$

и, наконец, формула (91) секториального момента инерции отверстия получит вид

$$J^{\text{отв}}_\omega = F_{\text{отв}}\,(\omega^0_D - c_\xi \eta_0 + c_\eta \xi_0)^2. \tag{118}$$

Подставив (117) в (116) и (118), получим их в более простом виде

$$S^{\text{отв}}_{\omega_A} = F_{\text{отв}}\,\omega^{\text{отв}}_A; \tag{119}$$

$$J^{\text{отв}}_\omega = F_{\text{отв}}\,\omega^2_{A(\text{отв})}. \tag{120}$$

Таким образом, секториальный статический момент отверстия относительно центра изгиба сечения равен произведению площади отверстия на секториальную координату центра тяжести отверстия относительно полюса в центре изгиба и с началом отсчета в главной секториальной точке сечения, а секториальный момент инерции отверстия равен произведению площади отверстия на квадрат той же секториальной координаты центра тяжести отверстия.

Формулы (119) и (120) аналогичны соответствующим формулам для линейных статического момента и момента инерции $S_x = Fy$ и $J_x = Fy^2$ с той лишь разницей, что в правой части вместо линейной участвует секториальная координата центра отверстия[1].

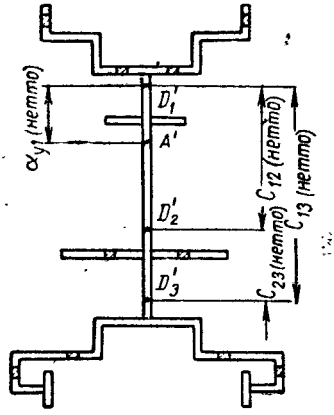


Рис. 82

2. Посмотрим теперь, как отражается учет отверстий на общих формулах для определения секториальных геометрических характеристик сечений тонкостенных стержней.

Рассмотрим для примера профиль, составленный из двух прокатных швеллеров и листа (рис. 81), сечение которого ослаблено двумя отверстиями для заклепок на расстояниях m от оси X.

По второй из формул (115)

$$S^{\text{отв}}_{\omega_B y} = -2F_{\text{отв}}\, m(-nm + nm - mn),$$

откуда

$$S^{\text{отв}}_{\omega_B y} = 2F_{\text{отв}}\, m^2 n. \tag{121}$$

Секториальную координату центра отверстия с полюсом в центре изгиба определим по формуле (117)

$$\omega_A^{\text{отв}} = -[\mp nm \mp (n + \alpha_x)\, m \mp mn],$$

откуда

$$\omega_A^{\text{отв}} = \mp (\alpha_x - n)\, m \tag{122}$$

(верхние знаки относятся к верхнему отверстию, нижние — к нижнему). Подставив выражение (122) в формулу (120), получим секториальный момент инерции отверстия

$$J^{\text{отв}}_{\omega} = 2F_{\text{отв}}(\alpha_x - n)^2 m^2. \tag{123}$$

---

[1] Формулы (115), (119) и (120) имеются в указанной выше работе проф. Власова; он получил их, рассматривая отверстие как сосредоточенную массу, а определенные интегралы, выражающие секториальные характеристики, интерпретируя в смысле интеграла Стильтьеса.

Таким образом, учет ослабления отверстиями сводится лишь к тому, что в общих формулах для определения координаты центра изгиба и секториального момента инерции следует принимать экваториальные моменты инерции не брутто, а нетто.

3. Распространим теперь эти выводы на составные профили.

Пусть в сечении, изображенном на рис. 75, имеются отверстия, не нарушающие его симметрию (рис. 82), и пусть D_1', D_2' и D_3' — центры изгиба соответствующих элементов этого сечения, найденные с учетом ослабления этих элементов отверстиями. Расстояния между этими центрами изгиба обозначим теми же буквами c_{12}, c_{13} и c_{23}, но со значками нетто.

Тогда формула (93) для определения координаты центра изгиба, отсчитанной от точки D_1', и формула (100) для секториального момента инерции с учетом ослабления отверстиями примут следующий вид:

$$\sigma_{y1(\text{нетто})} = \frac{J_{2y(\text{нетто})}\, c_{12(\text{нетто})} + J_{3y\,(\text{нетто})}\, c_{13(\text{нетто})}}{J_{y(\text{нетто})}}; \tag{124}$$

$$J_{\omega(\text{нетто})} = J_{1\omega_D(\text{нетто})} + J_{2\omega_D(\text{нетто})} + J_{3\omega_D(\text{нетто})} + \\ + \frac{J_{1y\,(\text{нетто})}\, J_{2y\,(\text{нетто})}\, c^2_{12\,(\text{нетто})} + J_{1y\,(\text{нетто})}\, J_{3y\,(\text{нетто})}\, c^2_{13\,(\text{нетто})}}{J_{y\,(\text{нетто})}} + \\ + \frac{J_{2y\,(\text{нетто})}\, J_{3y\,(\text{нетто})}\, c^2_{23\,(\text{нетто})}}{J_{y\,(\text{нетто})}}. \tag{125}$$

Отверстия в стенке рассматриваемого профиля не окажут никакого влияния ни на положение центра изгиба, ни на величину J_ω, так как секториальные координаты всех точек стенки равны нулю.

§ 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ИЗГИБА И СЕКТОРИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПО СПОСОБУ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЭПЮР

Проф. А. Р. Ржаницын предложил способ, который дает возможность определить координаты центра изгиба и секториальный момент инерции произвольных незамкнутых тонкостенных профилей независимо от того, известны или неизвестны центр тяжести и главные экваториальные моменты инерции этого профиля[1]. Способ этот, во многих случаях оказывающийся очень полезным при практическом определении указанных величин, излагаем, несколько видоизменив его.

[1] См. статью А. Р. Ржаницына «Об определении секториальных геометрических характеристик» в сборнике трудов лаборатории строительной механики ЦНИПС, Стройиздат, 1941.

Из теории проф. Власова известно, что эпюра главных секториальных координат профиля ω_A, определяющая закон распределения нормальных напряжений σ_ω при стесненном кручении, ортогональна с эпюрами линейных координат его x и y, определяющих распределение нормальных напряжений при изгибе относительно главных осей сечения, и с равномерной эпюрой (назовем ее z), соответствующей закону распределения нормальных напряжений при равномерном растяжении или сжатии.

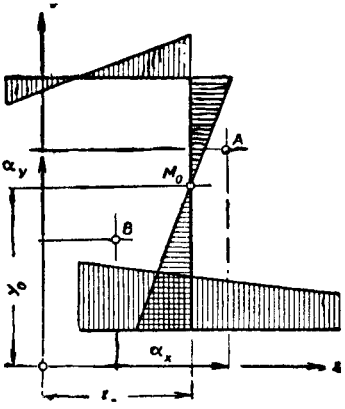


Рис. 83

Признак ортогональности, как известно, заключается в том, что результат взаимного интегрирования этих эпюр равен нулю. С другой стороны [§ 10, формула (82)], перенос начала и поворот осей координат приводит к линейным формулам преобразования, а это значит, что эпюра главных секториальных координат (с полюсом в центре изгиба) будет ортогональна с эпюрой произвольных линейных координат, так как свойство ортогональности при любых линейных преобразованиях эпюр сохраняется.

Рассмотрим какое-нибудь произвольное сечение стержня, отнесенное к системе осей координат x и y (рис. 83), и построим эпюру секториальных площадей с полюсом в произвольной точке B плоскости сечения и с началом в произвольной точке $M_0(x_0, y_0)$ контура сечения. Обозначим эту эпюру через ω_0.

Пусть центр изгиба рассматриваемого профиля находится в точке A. Обозначим проекции расстояния BA на оси координат x и y соответственно через α_x и α_y и перенесем полюс отсчета секториальных площадей в этот, пока нам неизвестный центр изгиба A.

Тогда, согласно формуле (80), секториальные координаты при новом полюсе отсчета их будут определяться по формуле, которая в наших обозначениях будет иметь следующий вид:

$$\omega_A = \omega_0 - \alpha_x (y - y_0) + \alpha_y (x - x_0).$$

Напишем ее несколько иначе

$$\omega_A = \alpha_y x - \alpha_x y + \beta z - \omega_0, \tag{126}$$

где

$$\beta z = \alpha_x y_0 - \alpha_y x_0.$$

Здесь α_x, α_y и β — неизвестные нам коэффициенты, первые два из которых определяют положение центра изгиба A относительно

произвольного полюса B, а последний β — положение начальной точки отсчета секториальных координат M_0, если эпюра ω_A, которую в дальнейшем для простоты будем обозначать просто ω, является эпюрой главных секториальных координат.

Для того чтобы эпюра ω была эпюрой главных секториальных координат, она должна быть ортогональна эпюрам x, y и z, т. е. должна удовлетворять условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\int_F \omega x dF = 0; \\ &\int_F \omega y dF = 0; \\ &\int_F \omega z dF = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (127)$$

Подставив в условия (127) вместо ω его выражение из формулы (126), получим систему трех уравнений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_y \int_F x^2 dF - \alpha_x \int_F yx dF + \beta \int_F zx dF + \int_F \omega_0 x dF = 0; \\ &\alpha_y \int_F xy dF - \alpha_x \int_F y^2 dF + \beta \int_F zy dF + \int_F \omega_0 y dF = 0; \\ &\alpha_y \int_F xz dF - \alpha_x \int_F yz dF + \beta \int_F z^2 dF + \int_F \omega_0 z dF = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (128)$$

Неизвестными в этих уравнениях, как было сказано выше, являются α_x, α_y и β, а коэффициентами и свободными членами — интегралы от произведений двух соответствующих эпюр, взятых по всей площади рассматриваемого сечения.

Определив из этой системы α_x, α_y и β и подставив их в выражение (126), получим формулу для вычисления главных секториальных координат с полюсом в центре изгиба и с началом в секториальной нулевой точке контура сечения.

Произвольные эпюры x, y, z и ω_0 следует выбирать так, чтобы количество вычислений при интегрировании их было наименьшим. Во многих случаях удачным выбором этих эпюр можно добиться того, чтобы некоторые из коэффициентов уравнений обращались в нуль.

В частности, за эпюру z рекомендуется принимать эпюру с постоянными, равными единице координатами для всех точек сечения. За нулевые линии при построении эпюр x или y в симметричных сечениях рекомендуется принимать соответствующую ось симметрии, а в несимметричных — одну из сторон контура сечения.

Произвольный полюс при построении эпюры ω_0 рекомендуется принимать для симметричных сечений в точке пересечения оси сим-

метрии с контуром сечения, а в несимметричных — в одной из точек пересечения сторон контура.

Полученные численные значения величин α_x и α_y, как было сказано выше, определяют положение центра изгиба сечения. С этой целью величины эти следует отложить от точки B, принятой за полюс при построении эпюры ω_0, по направлению осей x и y, принятых за нулевые линии при построении эпюр x и y.

Величину секториального момента инерции J_ω можно определить, вычислив интеграл квадрата эпюры главных секториальных координат. Проще же вычислить по формуле $J_\omega = \int_F \omega^2 dF$, подставив в подынтегральное выражение вместо ω^2 его значение из формулы (126), в которой коэффициенты α_x, α_y и ω известны.

Получим

$$J_\omega = \int_F (\alpha_y x - \alpha_x y + \beta z + \omega_0)^2 dF.$$

Возведя в квадрат подынтегральный многочлен и сгруппировав некоторые члены полученного выражения, будем иметь

$$J_\omega = \Big(\alpha_y^2 \int_F x^2 dF + \alpha_x^2 \int_F y^2 dF + \beta^2 \int_F z^2 dF -$$
$$- 2\alpha_x\alpha_y \int_F xy dF + 2\alpha_y\beta \int_F xz dF - 2\alpha_x\beta \int_F yz dF + \alpha_y \int_F x\omega_0 dF -$$
$$- \alpha_x \int_F y\omega_0 dF + \beta \int_F z\omega_0 dF\Big) + \alpha_y \int_F x\omega_0 dF - \alpha_x \int_F y\omega_0 dF +$$
$$+ \beta \int_F z\omega_0 dF + \int_F \omega_0^2 dF. \qquad (129)$$

Выражение в круглых скобках равно нулю, в чем нетрудно удостовериться, сложив почленно уравнения (128), предварительно умножив первое из них на α_y, второе — на α_x и третье — на β. Поэтому выражение (129) дает окончательно

$$J_\omega = \alpha_y \int_F x\omega_0 dF - \alpha_x \int_F y\omega_0 dF + \beta \int_F z\omega_0 dF + \int_F \omega_0^2 dF. \qquad (130)$$

Здесь величины первых трех интегралов уже известны, так как они были уже вычислены при решении уравнений (128); последний же интеграл необходимо подсчитать, вычислив интеграл квадрата эпюры ω_0.

В качестве примера определим по этому способу положение центра изгиба и секториальный момент инерции несимметричного углотавра (рис. 84). Толщину его для простоты решения примем всюду одинаковой и равной $\delta=1$.

Построим эпюры x, y, z и ω_0.

При построении эпюры x за нулевую линию примем ось стенки и положительное направление оси x считаем вправо; при построении эпюры y за нулевую линию принимаем ось верхней полки и положительное направление оси y считаем вверх. Эпюру z принимаем с постоянными, равными единице координатами для всех точек сечения. Четвертую секториальную эпюру ω_0 строим с полюсом в точке пересечения оси верхней полки с осью стенки и с начальной точкой в пересечении оси стенки с осью нижней полки. Эпюры эти изображены на рис. 85.

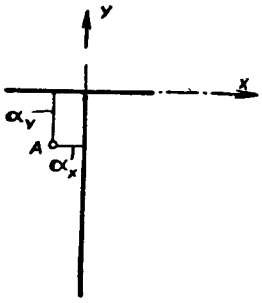


Рис. 84.

Для определения коэффициентов уравнений (127) вычислим интегралы по всему контуру от квадратов этих эпюр и их произведений, взятых попарно.

Тогда получим

$$\int_F x^2\,dF = d^3; \quad \int_F y^2 dF = h^2\left(d + \frac{h}{3}\right);$$

$$\int_F xy\,dF = -\frac{d^2h}{2}; \quad \int_F yz\,dF = -h\left(d + \frac{h}{2}\right);$$

$$\int_F xz\,dF = \frac{d^2}{2}; \quad \int_F y\omega_0 dF = -\frac{h^2d^2}{2};$$

$$\int_F x\omega_0 dF = \frac{d^3h}{3}; \quad \int_F z^2 dF = 3d + h;$$

$$\int_F z\omega_0 dF = \frac{d^2h}{2};$$

$$\int_F \omega_0^2\,dF = \frac{d^3h^2}{3} \text{ (потребуется при определении } J_\omega\text{).}$$

Система уравнений (127) в табличной форме представлена в табл. 23.

Решив эту систему, найдем

$$\alpha_y = -\frac{h\,(6d^2 + 9hd + h^2)}{3\,(18d^2 + 11hd + h^2)};$$

$$\alpha_x = -\frac{2d^2\,(12d + 3h)}{3\,(18d^2 + 11hd + h^2)};$$

$$\beta = \frac{2d^2h^2}{3\,(18d^2 + 11hd + h^2)}.$$

Таблица 23

Система уравнений для определения центра изгиба и главной секториальной точки профиля (рис. 85)

№ уравнений	Неизвестные			Свободные члены	Правая часть
	α_y	α_x	β		
1	d^3	$\frac{d^2h}{2}$	$\frac{d^2}{2}$	$\frac{d^3h}{3}$	$=0$
2	$-\frac{d^2h}{2}$	$-h^2\left(d+\frac{h}{3}\right)$	$-h\left(d+\frac{h}{2}\right)$	$-\frac{d^2h^2}{2}$	$=0$
3	$\frac{d^2}{2}$	$h\left(d+\frac{h}{2}\right)$	$3d+h$	$\frac{d^2h}{2}$	$=0$

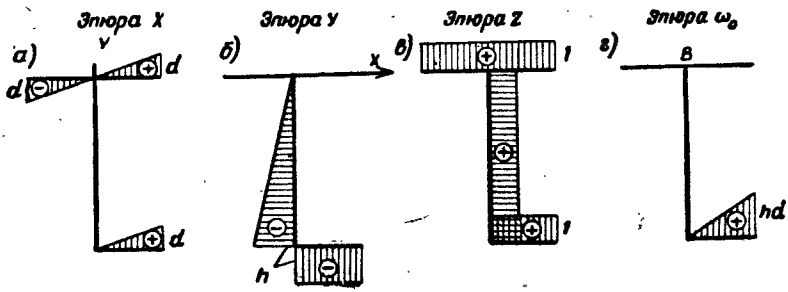


Рис. 85

Таким образом, центр изгиба будет отстоять от полюса B, принятого за полюс отсчета секториальных площадей ω_0 (рис. 85) на величину α_x по отрицательному направлению оси x и на величину α_y по отрицательному направлению оси y (рис. 84).

Секториальный момент инерции J_ω по формуле (130) будет равен:

$$J_\omega = \frac{d^3h}{3}\alpha_y + \frac{d^2h^2}{2}\alpha_x + \frac{d^2h}{2}\beta + \frac{d^3h^2}{3}.$$

Подставив в это выражение найденные значения α_x, α_y и β, получим

$$J_\omega = \frac{2d^3h^2(6d^2+9hd+h^2)}{9(18d^2+11hd+h^2)}.$$

§ 15. СЕКТОРИАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОКАТНЫХ ДВУТАВРОВ И ШВЕЛЛЕРОВ

Непосредственное пользование выведенными выше формулами для вычисления секториальных геометрических характеристик

прокатных двутавров и швеллеров встречает значительные затруднения, с одной стороны, вследствие переменности сечения полок этих профилей и, с другой стороны, вследствие наличия закруглений по концам полок и в местах сопряжений их со стенкой. Нами выведены общие формулы для учета этих факторов независимо от того, к какому прокатному профилю они относятся, а именно формулы интегрирования трех эпюр:

1) двух трапеций и прямоугольника,

2) трех трапеций и

3) двух трапеций и эпюры, меняющейся по закону окружности.

Для прокатного двутавра, представленного на рис. 86, секториальный момент инерции вычислялся по формуле

$$J_\omega = \frac{h_1^2 b^3}{24}\left(t - \frac{kb}{8}\right), \quad (131)$$

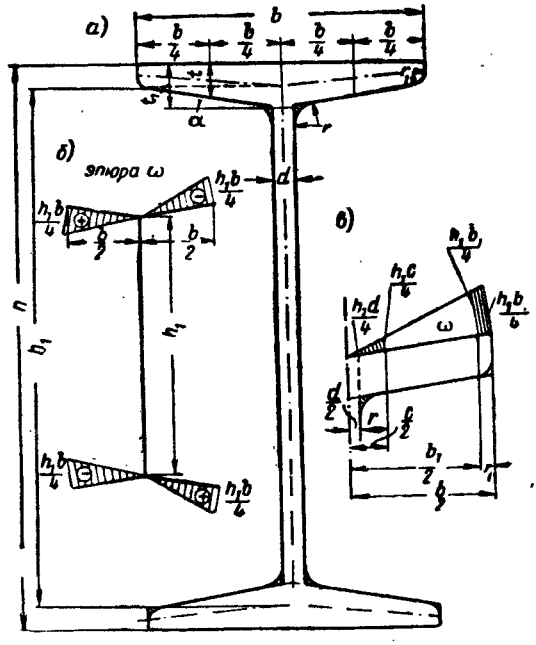


Рис. 86

а влияния закруглений у стенки и у концов полок уменьшались на величину

$$\Delta J_\omega = r_1^2 h_1^2 (0{,}00492c^2 + 0{,}09699d^2 + 0{,}0327cd - 0{,}00123b_1^2 - 0{,}02425b^2 - 0{,}008175bb_1), \quad (132)$$

где h — высота профиля;

b — ширина полки;

t — средняя толщина полки;

d — толщина стенки;

$k=0{,}16$ — уклон полок;

r_1 — радиус закругления концов полок;

$r_2=2r_1$ — радиус закругления в месте сопряжения полки со стенкой.

$$t_1 = t + \frac{kb}{4}; \quad h_1 = h - t_1; \quad b_1 = b - 2r_1; \quad c = d + 2r.$$

Для прокатного швеллера, изображенного на рис. 87, координата центра изгиба определялась по формуле

$$\alpha_x = \frac{b_0^2 h_1}{24 J_x} [(2t - 0{,}05d)(2h_2 + h_1) - 0{,}1 b_0 h_2], \qquad (133)$$

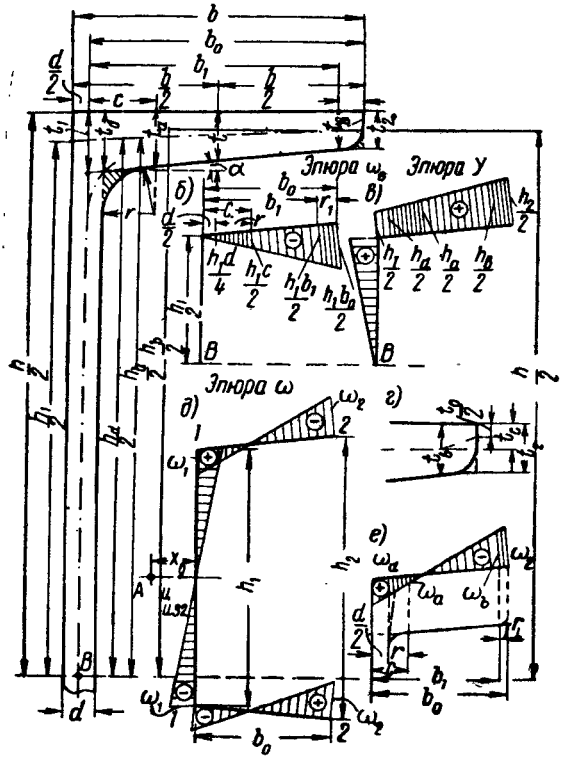


Рис. 87

а влияния закруглений учитывались по формуле

$$\Delta\alpha_x = \frac{r_1^2 h_1}{J_x} [0{,}019838 h_a c + 0{,}11198 h_a d + 0{,}04270 h_a c + 0{,}02135 h_a d - 0{,}0049595 h_b b_1 - 0{,}05599 h_2 b_0 - 0{,}010675 (h_2 b_1 + h_b b_0)], \qquad (133')$$

где h — высота профиля;
b — ширина полки;
t — средняя толщина полки;
d — толщина стенки;
$k=0{,}1$ — уклон полок;
r_1 — радиус закругления концов полок;

$r = 2r_1$ — радиус закругления в месте сопряжения полки со стенкой

$$t_1 = t + \frac{k}{2}(b-d); \quad t_в = t_2 + kr_1; \quad h_a = h - t_a;$$

$$b_0 = b - \frac{d}{2}; \quad t_2 = t - \frac{kb}{2}; \quad h_1 = h - t_1; \quad h_b = h - t_b;$$

$$b_1 = b_0 - r_1; \quad t_d = t_1 - \frac{kd}{2}; \quad h_2 = h - t_2;$$

$$c = \frac{d}{2} + r; \quad t_a = t_d - kr; \quad h_d = h - t_d.$$

Секториальный момент инерции определялся по формуле

$$J_\omega = \frac{dh_1\omega_1^2}{3} + \frac{2tb_0}{3}(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_1\omega_2) - \frac{kb_0^2}{6}\cdot(\omega_2^2 - \omega_1^2), \qquad (134)$$

а учет закруглений учитывался формулой

$$\Delta J_\omega = r_1^2(0{,}07935\,\omega_a^2 + 0{,}8958\omega_d^2 +$$
$$+ 0{,}3416\omega_a\omega_d - 0{,}01984\omega_b^2 - 0{,}22396\,\omega_2^2 - 0{,}08540\omega_b\omega_2, \qquad (135)$$

где $\omega_b = \omega_2 - sr_1$; $\omega_d = \omega_1 - s\frac{d}{2}$; $\omega_a = \omega_d - sr$; $s = \frac{\omega_1 + \omega_2}{b_0}$.

$$\omega_1 = \frac{a_x h_1}{2} \qquad (136)$$

$$\omega_2 = \frac{h_1}{2}(b_0 - a_x) - \frac{k}{2}b_0 a_x. \qquad (137)$$

Все эти геометрические характеристики прокатных двутавров и швеллеров были вычислены для двутавра № 30а и для швеллеров № 10, № 30а и № 40с с разной степенью точности и было установлено чрезвычайно малое влияние закруглений у стенки профиля двутавра и мы этим влиянием пренебрегли и составили таблицы секториальных геометрических характеристик, которые поместили в приложениях 1 и 2, причем для определения координаты центра изгиба мы в сортамент поместили значение

$$x_a = a_x - \frac{d}{2},$$

где d — толщина стенки швеллера.

§ 16. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Пример 17. Определить координату центра изгиба и секториальный момент инерции сварного профиля (рис. 88) по формулам приложения 5 и проверить полученные результаты по методу произвольных эпюр (§ 14).

Рассматриваем заданный профиль, состоящий из трех элементов: *I* — двутавра, *II* — вертикального листа и *III* — швеллера.

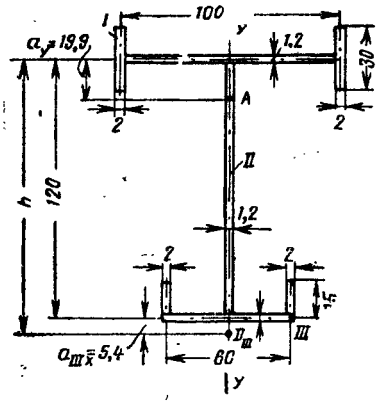


Рис. 88

Координата центра изгиба швеллера по формуле в 4-й строке приложения 5 равна

$$a_{III x} = \frac{2J_{1x}c}{J_x} = \frac{2\cdot 15\cdot 2\cdot 30^2\cdot 7,5}{2\cdot 15\cdot 2\cdot 30^2 + \frac{1,2\cdot 60^3}{12}} = \frac{405000}{75600} = 5,4\ см.$$

Тогда координата центра изгиба всего сечения a_y, отсчитанная от оси двутавра, будет равна (см. приложение 5 № 6)

$$a_y = \frac{J_{III y}\, h}{J_y} = \frac{\left(2\cdot 15\cdot 2\cdot 30^2 + \frac{1,2\cdot 60^3}{12}\right) 125,4}{2\cdot 15\cdot 2\cdot 30^2 + \frac{1,2\cdot 60^3}{12} + 2\cdot 30\cdot 2\cdot 50^2 + \frac{1,2\cdot 100^3}{12}} =$$

$$= \frac{75\,600\cdot 125,4}{75\,600 + 300\,000 + 100\,000} = \frac{9\,477\,000}{475\,600} = 19,9\ см.$$

Для определения секториального момента инерции профиля определим сначала собственные секториальные моменты инерции двутавра и швеллера (секториальный момент инерции стенки равен нулю).

По формулам приложения 5 (№ 2 и 4) имеем

$$J_{1\omega} = \frac{J_{1y}h^2}{2} = \frac{\frac{20\cdot 30^3}{12}100^2}{2} = 22,5\cdot 10^6\ см^6;$$

$$J_{III\omega} = \frac{2J_{1x}J_{2x}c^2}{J_x} + \frac{J_{1x}b^2}{6} = \frac{2\cdot 2\cdot 15\cdot 30^2\ \frac{1,2\cdot 60^3}{12}\ 7,5^2}{2\cdot 2\cdot 15\cdot 30^2 + \frac{1,2\cdot 60^3}{12}} +$$

$$+ \frac{2\cdot 15\cdot 30^2\cdot 15^2}{6} = \frac{54\,000\cdot 21\,600\cdot 56,25}{75\,600} + 1\,012\,500 = 1,869\cdot 10^6\ см^6.$$

Тогда по формуле (100) секториальный момент инерции всего сечения равен:

$$J_\omega = J_{1\omega} + J_{III\omega} + \frac{J_{1y}\, J_{III y} h^2}{J_y} =$$

$$= 22{,}5\cdot 10^6 + 1{,}869\cdot 10^6 + \frac{\left(2\cdot 2\cdot 30\cdot 50^2 + \frac{1{,}2\cdot 100^3}{12}\right) 75600\cdot 125{,}4^2}{475\,600} =$$

$$= 22{,}5\cdot 10^6 + 1{,}869\cdot 10^6 + 999{,}2\cdot 10^6 = 1024\cdot 10^6\ см^6.$$

Для определения тех же величин по методу произвольных эпюр построим четыре произвольные эпюры: x, y, z и ω_0.

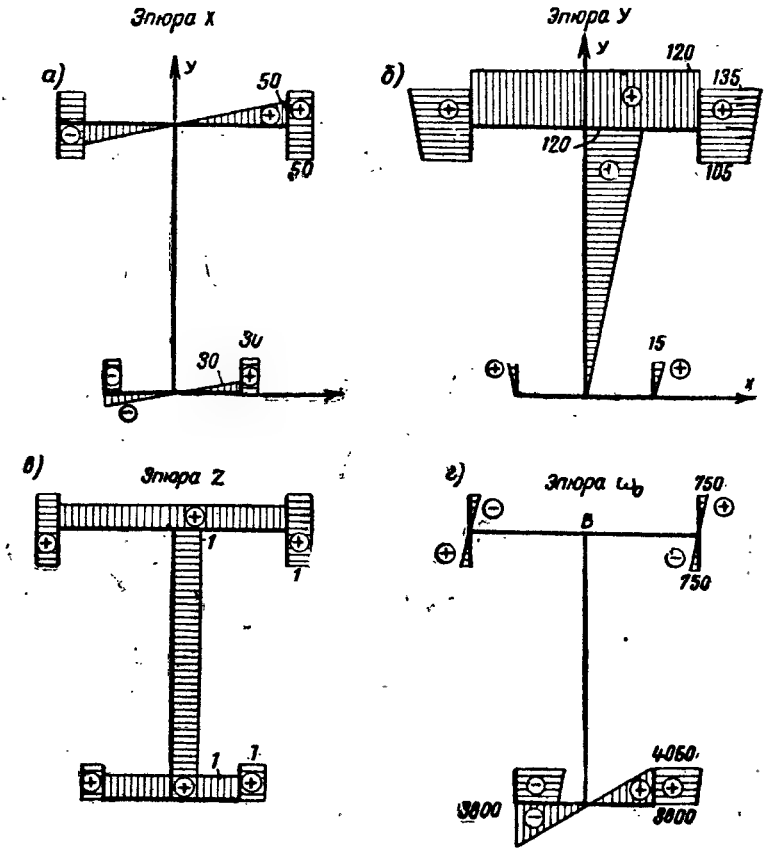


Рис. 89

За нулевые линии при построении эпюр x и y принимаем соответственно ось симметрии (рис. 89, *а*) и ось стенки швеллера (рис. 89, *б*); эпюра z изображена на рис. 89, *в*. При построении секториальной эпюры ω_0 полюс отсчета принимаем в точке пересечения оси симметрии профиля с горизонтальной осью двутавра (рис. 89, *г*).

Вычисляем по всей площади поперечного сечения интегралы от квадратов этих эпюр и произведений их, взятых попарно:

$$\int_F x^2 dF = 2\left(\frac{50^3}{3}1{,}2 + \frac{30^3}{3}1{,}2 + 30\cdot 50^2\cdot 2 + 15\cdot 30^2\cdot 2\right) = 0{,}4756\cdot 10^6;$$

$$\int_F xy dF = 0;$$

$$\int_F xz dF = 0;$$

$$\int_F x\,\omega_0\, dF = 2\left(\frac{4\,050 + 3\,600}{2}15\cdot 30\cdot 2 + \frac{3\,600\cdot 30\cdot 30}{3}1{,}2\right) = 9{,}477\cdot 10^6;$$

$$\int_F x\,\omega_0\, dF = 0;$$

$$\int_F z\,\omega_0\, dF = 0;$$

$$\int_F \omega_0^2 dF = 4\,\frac{15\cdot 750^2}{3}2 + 2\,\frac{15\cdot 2}{3}(4\,050^2 + 3\,600^2 + 4\,050\cdot 3\,600) +$$

$$+ 2\,\frac{30\cdot 3600^2}{3}1{,}2 = 1212{,}39\cdot 10^6.$$

Интегралы $\int_F y^2 dF$, $\int_F yz dF$ и $\int_F z^2 dF$ не потребуются, потому что $\alpha_x = 0$ и $\beta = 0$.

Подставив в уравнение (128) найденные значения коэффициентов, получим

$$\alpha_y = -\frac{\int_F x\,\omega_0\, dF}{\int_F x^2 dF} = \frac{-9{,}477\cdot 10^6}{0{,}4756\cdot 10^6} = -19{,}9\,см.$$

Секториальный момент инерции по формуле (130) равен

$$J_\omega = \alpha_y \int_F x\,\omega_0\, dF + \int_F \omega_0^2 dF = -19{,}9\cdot 9{,}477\cdot 10^6 + 1212{,}39\cdot 10^6 = 1024\cdot 10^6\,см^6.$$

Пример 18. Определить секториальные геометрические характеристики профиля (рис. 90), составленного из двух прокатных швеллеров № 14а и листа 186×6 *мм*.

Выпишем прежде всего из сортамента и из приложения 2 необходимые для дальнейшего геометрические размеры и характеристики швеллера № 14а (рис. 91):

$$h = 14\,см, \qquad J_y = 53{,}2\,см^4,$$

$b = 5{,}8\,см$, $z_0 = 1{,}71\,см$,

$d = 0{,}6\,см$, $x_a = 1{,}58\,см$,

$t = 0{,}95\,см$, $J_\omega = 1512{,}5\,см^6$,

$F = 18{,}51\,см^2$, $\omega_1 = 12{,}03\,см^2$,

$J_x = 563{,}7\,см^4$, $\omega_2 = 22{,}63\,см^2$.

а) Координата центра изгиба по формуле (112) с поправкой на ослабление сечения отверстиями по формуле (121) будет равна:

$$a_x = \frac{S^{нетто}_{\omega_B y}}{J_{x(нетто)}} = \frac{2\,(F_1 cf - J_{1x})\,2a - 2F_{отв}\,m^2 n}{J_{x(нетто)}},$$

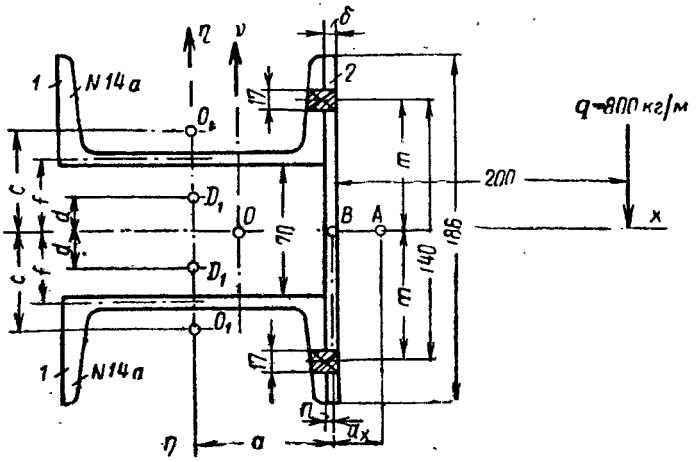


Рис. 90

где F_1 — площадь одного швеллера;

J_{1x} — момент инерции одного швеллера относительно главной оси всего сечения;

$F_{отв}$ — площадь одного отверстия;

остальные обозначения см. на рис. 90.

$$J_{x(нетто)} = 2J_{1x} + J_{2x} - 2J^{отв}_x = 2\,(53{,}2 + 18{,}51 \cdot 5{,}21^2) +$$

$$+ \frac{0{,}6 \cdot 18{,}6^3}{12} - 2 \cdot 1{,}7 \cdot 1{,}55 \cdot 7^2 = 2 \cdot 555{,}6 + 321{,}7 - 258{,}2 =$$

$$= 1432{,}9 - 258{,}2 = 1174{,}7\,см^4$$

(заметим, что ослабление отверстиями составляет 18%).

$$S^{нетто}_{\omega_B y} = (2 \cdot 18{,}51 \cdot 5{,}21 \cdot 3{,}8 - 555{,}6)\,2 \cdot 7{,}3 -$$

$$-2\cdot 1{,}7\cdot 1{,}55\cdot 7^2\cdot 0{,}475 = (732{,}9 - 555{,}6)\,14{,}6 - 122{,}7 =$$
$$= 2\,588{,}6 - 122{,}7 = 2\,465{,}9\,см^5$$

(ослабление отверстиями для секториально-линейного статического момента составляет только 4,7%).

Тогда

$$\alpha_x = \frac{2465{,}9}{1\,174{,}7} = 2{,}1\,см.$$

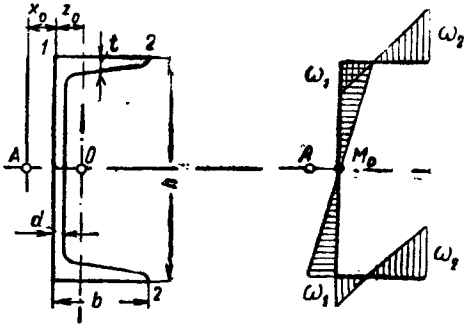


Рис. 91

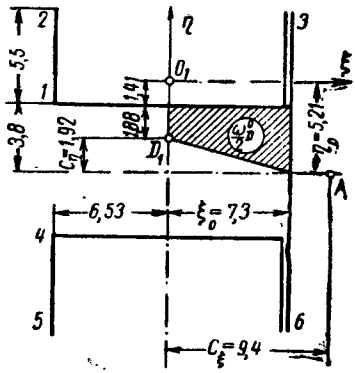


Рис. 92

б) Секториальный момент инерции по формулам (113) и (123) равен

$$J_\omega = 2J_{1\omega_D} + 2J_{1\eta}d^2 + 2J_{1x}(a+\alpha_x)^2 + J_{2x}\alpha_x^2 +$$
$$+ 8F_1 f_a\,[fa - (a+\alpha_x)c] - 2F_{отв}(\alpha_x - n)^2 m^2,$$

где $J_{1\omega_D}$ — секториальный момент инерции швеллера относительно собственного центра изгиба;

$J_{1\eta}$ — момент инерции швеллера относительно собственной главной вертикальной оси;

J_{2x} — момент инерции листа относительно оси X.

Остальные обозначения даны выше, а также на рис. 90.

$$J_\omega = 2\cdot 1512{,}5 + 2\cdot 563{,}7\cdot 1{,}92^2 + 2\cdot 555{,}6\,(7{,}3 + 2{,}1)^2 +$$
$$+ 321{,}7\cdot 2{,}10^2 + 8\cdot 18{,}51\cdot 3{,}8\cdot 7{,}3\,[3{,}8\cdot 7{,}3 - (7{,}3 + 2{,}1)\,5{,}21] -$$
$$- 2\cdot 1{,}7\cdot 1{,}55\,(2{,}1 - 0{,}475)^2\,7^2 = 3025 + 4155{,}6 + 98\,186 +$$
$$+ 1\,418{,}7 - 87\,208 - 681{,}7 = +19\,578 - 682 = 18\,896\,см^6$$

(ослабление отверстиями составляет 3,5%).

в) Секториальные координаты крайних точек контура. Пронумеруем крайние точки контура, как указано на рис. 92. По формуле (85)

$$\omega_A = \omega_D - \omega_D^0 - c_\xi(\eta - \eta_0) + c_\eta(\xi - \xi_0),$$

где ω_D — собственная (по отношению к собственному центру изгиба) секториальная координата, которую следует взять из сортамента (приложение 2), а остальные обозначения даны на рис. 92 (черточки над обозначениями координат для простоты записи опущены).

$$\omega_D^0 = -2\left(\frac{1,88 + 3,8}{2}\right)7,3 = -41,46\,см^2.$$

Тогда общая формула для ω_A примет следующий вид:

$$\omega_A = \omega_D + 41,46 - 9,4(\eta + 5,21) - 1,92(\xi - 7,3).$$

Подставляя в эту формулу ω_D, ξ и η для соответствующих крайних точек контура, получим

$$\omega_1 = -\omega_4 = 12,03 + 41,46 - 9,4(-1,41 + 5,21) - \\ - 1,92(-6,53 - 7,3) = 44,32\,см^2;$$

$$\omega_2 = -\omega_5 = -22,63 + 41,46 - 9,4(4,09 + 5,21) - \\ - 1,92(-6,53 - 7,3) = -42,04\,см^2;$$

$$\omega_3^{шв} = -\omega_6^{шв} = 22,63 + 41,46 - 9,4(4,09 + 5,21) - \\ - 1,92(6,53 - 7,3) = -21,85\,см^2;$$

$$\omega_3^{листа} = -\omega_6^{листа} = -2,1 \cdot 9,3 = -19,53\,см^2;$$

$$\omega_3 = -\omega_6 = \frac{\omega_3^{шв} + \omega_3^{листа}}{2} = -\frac{21,85 + 19,53}{2} = -20,69\,см^2.$$

г) Секториальные моменты сопротивления

$$W_{1\omega} = W_{4\omega} = \frac{J_\omega}{\omega_1} = \frac{18\,896}{44,32} = 426\,см^4;$$

$$W_{2\omega} = W_{5\omega} = \frac{J_\omega}{\omega_2} = \frac{18\,896}{42,04} = 449\,см^4;$$

$$W_{3\omega} = W_{6\omega} = \frac{J_\omega}{\omega_3} = \frac{18\,896}{20,69} = 913\,см^4.$$

Пример 19. Определить координаты центральных точек, линейные и секториальные геометрические характеристики профиля, составленного из двух швеллеров № 12 (рис. 93).

Выпишем прежде всего из сортамента и приложения 2 геометрические характеристики швеллера № 12 (рис. 91):

$h = 12\,см$; $J_y = 37{,}4\,см^4$;

$b = 5{,}3\,см$; $z_0 = 1{,}62\,см$;

$d = 0{,}55\,см$; $x_a = 1{,}48\,см$;

$t = 0{,}9\,см$; $J_\omega^* = 768{,}3\,см^6$;

$F = 15{,}36\,см^2$; $\omega_1 = 9{,}54\,см^2$;

$J_x = 346{,}3\,см^4$; $\omega_2 = 17{,}31\,см^2$.

а) Координаты центра тяжести. За оси отсчета координат центра тяжести x_c и y_c примем главные оси вертикального швеллера. Так как оба швеллера, составляющих профиль, одинакового номера, то, очевидно:

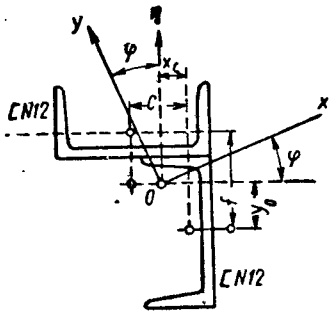


Рис. 93

$$x_c = \frac{c}{2} = \frac{\frac{h}{2} - z_0}{2} = \frac{6 - 1{,}62}{2} = 2{,}19\,см;$$

$$y_c = \frac{f}{2} = \frac{\frac{h}{2} + z_0}{2} = \frac{6 + 1{,}62}{2} = 3{,}81\,см.$$

б) Моменты инерции относительно центральных осей

$$J_\xi = J_{\xi'} + J_{\xi''} = J_y + F\left(\frac{f}{2}\right)^2 + J_x + F\left(\frac{f}{2}\right)^2 =$$

$$= J_y + J_x + F\frac{f^2}{2} = 37{,}4 + 346{,}3 + 15{,}36\frac{7{,}62^2}{2} = 829{,}6\,см^4;$$

$$J_\eta = J_{\eta'} + J_{\eta''} = J_x + F\left(\frac{c}{2}\right)^2 + J_y + f\left(\frac{c}{2}\right)^2 =$$

$$= J_x + J_y + F\frac{c^2}{2} = 346{,}3 + 37{,}4 + 15{,}36\frac{4{,}38^2}{2} = 531\,см^4.$$

в) Центробежный момент инерции (при $J_{\bar\xi\bar\eta} = 0$)

$$J_{\xi\eta} = \sum Fab = F\left(-\frac{f}{2}\right)\frac{c}{2} + F\left(-\frac{c}{2}\right)\frac{f}{2} =$$

$$= -F\frac{fc}{2} = -15{,}36\frac{7{,}62 \cdot 4{,}38}{2} = -256{,}32\,см^4.$$

г) Направление главных осей

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{\xi\eta}}{J_\eta - J_\xi} = \frac{-2\cdot 256,32}{531-829,6} = 1,717;$$

$$2\varphi = 59°47'; \ \sin 2\varphi = 0,864; \ \cos 2\varphi = 0,503;$$

$$\varphi = 29°53'; \ \sin\varphi = 0,498; \ \cos\varphi = 0,867.$$

д) Главные моменты инерции

$$J_x + J_y = J_\xi + J_\eta;$$

$$J_x - J_y = (J_\xi - J_\eta)\cos 2\varphi - 2J_{\xi\eta}\sin 2\varphi;$$

$$J_x + J_y = 1\,360,6\ см^4;$$

$$J_x - J_y = 298,6\cdot 0,503 + 512,6\cdot 0,864 = 593,08\ см^4,$$

откуда

$$J_x = 976,9\ см^4;$$

$$J_y = 383,7\ см^4.$$

е) Координаты центра изгиба

За вспомогательный полюс отсчета B и начало отсчета M_0 секториальных координат примем центр изгиба и главную секториальную точку вертикального швеллера.

Тогда в формулах

$$S_{\omega_B x} = S'_{\omega_B x} + S''_{\omega_B x}$$

и

$$S_{\omega_B y} = S'_{\omega_B y} + S''_{\omega_B y}$$

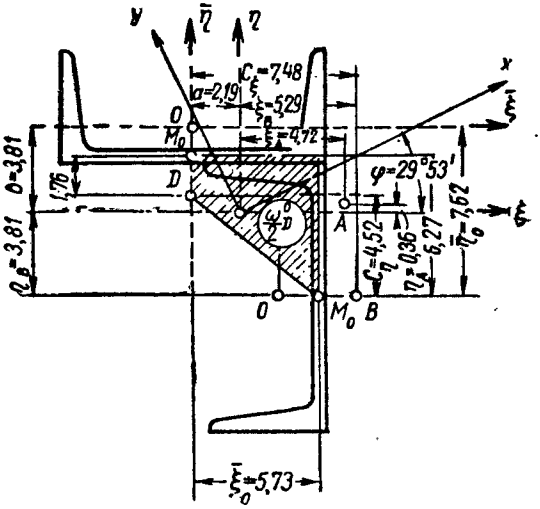


Рис. 94

слагаемые, относящиеся к вертикальному швеллеру, обратятся в нуль, а для горизонтального швеллера по формулам (89) и (90), получим (рис. 94):

$$S_{\omega_B x} = -J_{\bar{\xi}}\, c_\xi \sin\varphi + J_{\bar{\eta}}\, c_\eta \cos\varphi + F(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\times$$

$$\times(\bar{\omega}_D^0 - c_\xi\,\bar{\eta}_0 + c_\eta\,\bar{\xi}_0) = -37,4\cdot 7,48\cdot 0,498 - 346,3\cdot 4,52\cdot 0,867 +$$

$$+ 15{,}36(2{,}19\cdot 0{,}867 - 3{,}81\cdot 0{,}498)\cdot(-46^{*} + 7{,}48\cdot 7{,}62 -$$
$$- 4{,}52\cdot 5{,}73) = -1496{,}7\ см^5.$$

$$S_{\omega_B y} = -J_{\bar{\xi}}\, c_{\xi}\cos\varphi - J_{\bar{\eta}}\, c_{\eta}\sin\varphi + F(b\cos\varphi - a\sin\varphi)\times$$
$$\times(\bar{\omega}_D^0 - c_{\xi}\bar{\eta}_0 + c_{\eta}\bar{\xi}_0) = -37{,}4\cdot 7{,}48\cdot 0{,}867 + 346{,}3\cdot 4{,}52\cdot 0{,}498 +$$
$$+ 15{,}36(-3{,}81\cdot 0{,}867 - 219\cdot 0{,}498)\times$$
$$\times(-46 + 7{,}48\cdot 7{,}62 - 4{,}52\cdot 5{,}73) = 1\,541{,}1\ см^5.$$

Тогда по формуле п. 2, § 9

$$\alpha_x = \frac{S_{\omega_B y}}{J_x} = \frac{1\,541{,}1}{976{,}9} = 1{,}58\ см;$$

$$\alpha_y = \frac{S_{\omega_B x}}{J_y} = \frac{1\,496{,}7}{383{,}7} = 3{,}9\ см.$$

Для того чтобы определить координаты центра изгиба в главных осях всего сечения, найдем предварительно координаты точки B в этих осях по формулам (83)

$$b_x = \xi_B\cos\varphi + \eta_B\sin\varphi = 5{,}29\cdot 0{,}867 - 3{,}81\cdot 0{,}498 = 2{,}69\ см;$$

$$b_y = \eta_B\cos\varphi - \xi_B\sin\varphi = -3{,}81\cdot 0{,}867 - 5{,}29\cdot 0{,}498 = -5{,}94\ см.$$

Тогда

$$a_x = \alpha_x + b_x = 1{,}58 + 2{,}69 = 4{,}27\ см;$$
$$a_y = \alpha_y + b_y = 3{,}9 - 5{,}94 = -2{,}04\ см.$$

В дальнейшем нам понадобятся также координаты центра изгиба относительно горизонтальной и вертикальной центральных осей.

Они находятся по формулам

$$\xi_A = a_x\cos\varphi - a_y\sin\varphi = 4{,}27\cdot 0{,}867 + 2{,}04\cdot 0{,}498 = 4{,}72\ см;$$

$$\eta_A = a_y\cos\varphi + a_x\sin\varphi = -2{,}04\cdot 0{,}867 + 4{,}27\cdot 0{,}498 = 0{,}36\ см.$$

Проверка найденных координат центра изгиба методом графоаналитического интегрирования эпюр

На контуре профиля построим эпюру секториальных площадей ω_B (рис. 95, *а*), приняв за полюс отсчета B точку пересечения оси

---

* Секториальная координата $\bar{\omega}_D^0$ начальной точки относительно полюса и начала отсчета, взятых соответственно в центре изгиба и в главной секториальной точке горизонтального швеллера, измеряется удвоенной заштрихованной на рис. 94 площадью

$$\bar{\omega}_D^0 = -(1{,}76 + 6{,}27)\,5{,}73 = -46\ см^2.$$

стенки вертикального швеллера с осью стенки горизонтального швеллера (пренебрегаем смещением оси на участке, где оба швеллера соприкасаются между собой, вызванным изменением толщины).

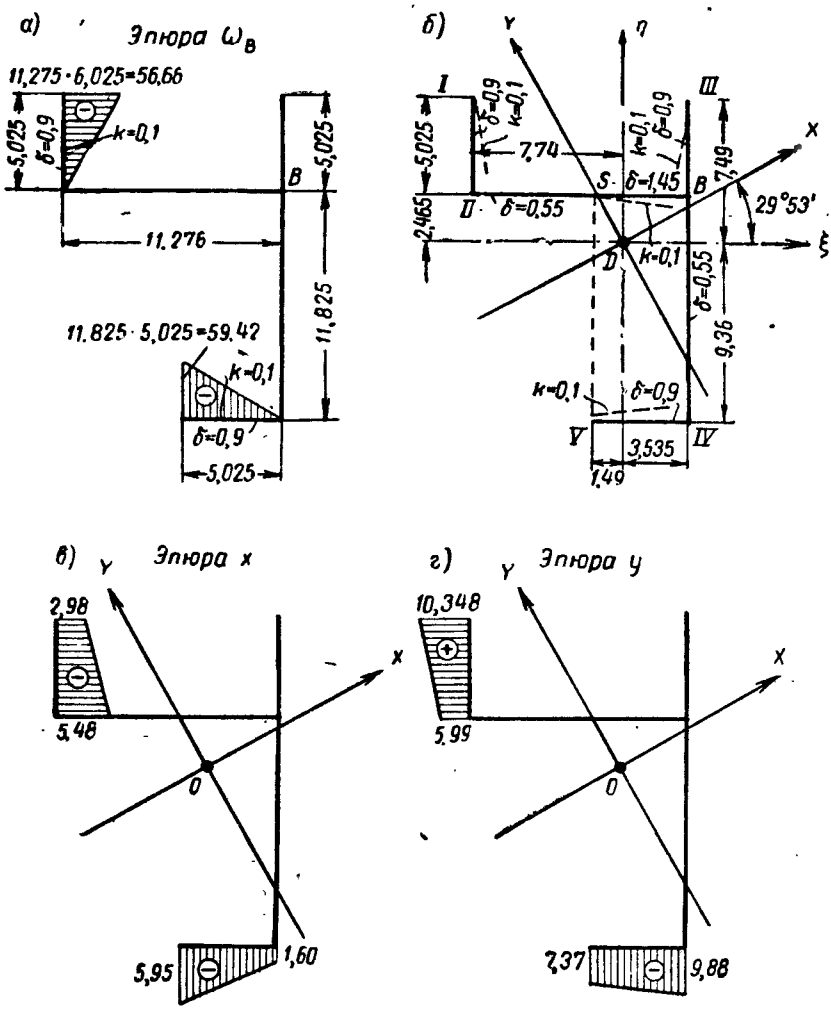


Рис. 95

Для построения эпюр линейных координат точек контура профиля в главных осях X и Y вычисляем эти координаты по формулам

$$x = \xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi;$$

$$y = \eta \cos\varphi - \xi \sin\varphi.$$

Пользуясь данными рис. 95, *б*, получаем:

$$x_{\mathrm{I}} = -7{,}74 \cdot 0{,}867 + 7{,}49 \cdot 0{,}498 = -2{,}98\,см;$$

$$x_{\mathrm{II}} = -7{,}74 \cdot 0{,}867 + 2{,}465 \cdot 0{,}498 = -5{,}48\,см;$$

$$x_{\mathrm{III}} = 3{,}535 \cdot 0{,}867 + 7{,}49 \cdot 0{,}498 = 6{,}80\,см;$$

$$x_{\mathrm{IV}} = 3{,}535 \cdot 0{,}867 - 9{,}36 \cdot 0{,}498 = -1{,}60\,см;$$

$$x_{\mathrm{V}} = -1{,}49 \cdot 0{,}867 - 9{,}36 \cdot 0{,}498 = -5{,}95\,см;$$

$$x_{B} = 3{,}535 \cdot 0{,}867 + 2{,}465 \cdot 0{,}498 = 4{,}29\,см;$$

$$y_{\mathrm{I}} = 7{,}49 \cdot 0{,}867 + 7{,}74 \cdot 0{,}498 = 10{,}348\,см;$$

$$y_{\mathrm{II}} = 2{,}465 \cdot 0{,}867 + 7{,}74 \cdot 0{,}498 = 5{,}99\,см;$$

$$y_{\mathrm{III}} = 7{,}49 \cdot 0{,}867 - 3{,}535 \cdot 0{,}498 = 4{,}73\,см;$$

$$y_{\mathrm{IV}} = -9{,}36 \cdot 0{,}867 - 3{,}535 \cdot 0{,}498 = -9{,}88\,см;$$

$$y_{\mathrm{V}} = -9{,}36 \cdot 0{,}867 + 1{,}49 \cdot 0{,}498 = -7{,}37\,см;$$

$$y_{B} = 2{,}465 \cdot 0{,}867 - 3{,}535 \cdot 0{,}498 = 0{,}38\,см.$$

Соответствующие этим значениям эпюры x и y построены на рис. 95, *в* и *г*, причем только на тех участках профиля, где эпюра ω_B отлична от нуля.

Взаимно интегрируя эти эпюры, получим

$$\int_F \omega_B x dF = \frac{5{,}025 \cdot 0{,}9}{6}(2 \cdot 5{,}95 \cdot 59{,}42 + 1{,}60 \cdot 59{,}42) +$$

$$+ \frac{5{,}025 \cdot 0{,}9}{6}(2 \cdot 2{,}98 \cdot 56{,}66 + 5{,}48 \cdot 56{,}66) +$$

$$+ \frac{0{,}1 \cdot 5{,}025^2}{12}(-56{,}66 \cdot 2{,}98 - 5{,}95 \cdot 59{,}42) =$$

$$= 604{,}84 + 488{,}74 - 109{,}7 = 983{,}88\,см^5;$$

$$\int_F \omega_B y dF = \frac{5{,}025 \cdot 0{,}9}{6}(-2 \cdot 10{,}348 \cdot 56{,}66 - 5{,}99 \cdot 56{,}66) +$$

$$+ \frac{5{,}025 \cdot 0{,}9}{6}(2 \cdot 7{,}37 \cdot 59{,}42 + 9{,}88 \cdot 59{,}42) +$$

$$+ \frac{0{,}1 \cdot 5{,}025^2}{12}(56{,}66 \cdot 10{,}348 - 7{,}37 \cdot 59{,}42) =$$

$$= -1\,140{,}07 + 1\,103{,}04 + 31{,}16 = -5{,}87\,см^5$$

(последние слагаемые учитывают 10%-ный уклон полок швеллеров).

Тогда

$$\alpha_x = \frac{\int_F \omega_B y dF}{J_x} = -\frac{5,87}{976,9} = -0,006\,см;$$

$$\alpha_y = -\frac{\int_F \omega_B x dF}{J_y} = -\frac{983,88}{383,7} = -2,56\,см.$$

Координаты точки B, принятой здесь за полюс отсчета секториальных координат, в главных осях сечения у нас выше вычислены

$$b_x = x_B = 4,29\,см;$$

$$b_y = y_B = 0,38\,см.$$

Следовательно, координаты центра изгиба в главных осях будут равны

$$a_x = \alpha_x + b_x = -0,01 + 4,29 = 4,28\,см;$$

$$a_y = \alpha_y + b_y = -2,56 + 0,38 = -2,18\,см.$$

ж) Координаты главной секториальной точки

Обозначим расстояние искомой главной секториальной точки M_0 от низа вертикального швеллера через t (рис. 96) и выразим в функции этого параметра t линейные и секториальные координаты M_0 по отношению к главным осям, центрам изгиба и главным секториальным точкам элементов, составляющих сечение.

Условие (50) примет следующий вид:

$$S_{\omega_A} = S'_{\omega_A} + S''_{\omega_A} = 0.$$

По формуле (87) получаем

$$S_{\omega_A} = F'\left(c'_\xi \bar{\eta}'_0 - c'_\eta \bar{\xi}'_0 - \bar{\omega}'^0_D\right) + F''\left(c''_\xi \bar{\eta}''_0 - c''_\eta \bar{\xi}''_0 - \bar{\omega}''^0_D\right) =$$

$$= 15,36\,[-6,91\,(13,62 - t) + 0,35 \cdot 5,73 + (1,76 + 12,27 - t) \times$$

$$\times 5,73] + 15,36\,[+0,57\,(6 - t) - 4,17 \cdot 1,34 - (6 - t)\,1,76] =$$

$$= -373,9 + 36,56\,t = 0,$$

откуда

$$t = \frac{373,9}{36,56} = 10,23\,см.$$

Проверка методом графоаналитического интегрирования эпюр

Здесь нам потребуется знать координаты найденного центра изгиба в центральных вспомогательных осях ξ и η. Находим их по вышеприведенным формулам:

$$\xi_A = a_x \cos\varphi - a_y \sin\varphi = 4{,}28 \cdot 0{,}867 + 2{,}18 \cdot 0{,}498 = 4{,}8\ см;$$

$$\eta_A = a_y \cos\varphi + a_x \sin\varphi = -2{,}18 \cdot 0{,}867 + 4{,}28 \cdot 0{,}498 = 0{,}24\ см.$$

Обозначим расстояние искомой главной секториальной точки M_0 от оси нижней полки вертикального швеллера через t и построим эпюру секториальных площадей с полюсом в центре изгиба A и главной секториальной точкой M_0, при этом ординаты этой эпюры будут функциями параметра t. На рис. 97 дана эта эпюра. Необходимые размеры взяты из рис. 95, *б*.

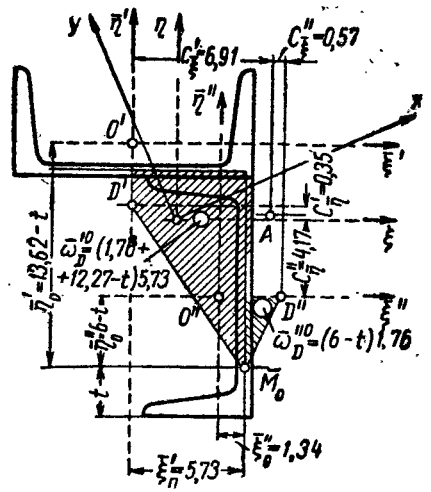


Рис. 96

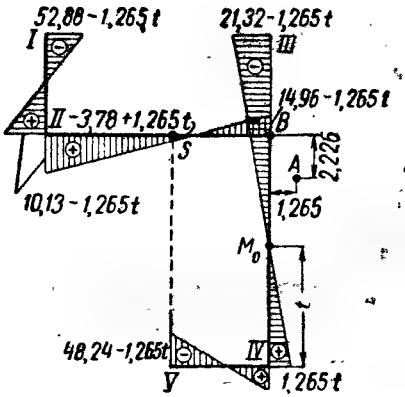


Рис. 97

Из условия $\int_F \omega_A dF = 0$ найдем величину параметра t.

Пользуясь данными рис. 97, находим

$$\int_F \omega_A dF = \frac{5{,}025 \cdot 0{,}9}{2}(10{,}13 + 1{,}265t - 52{,}88 + 1{,}265t) +$$

$$+ \frac{6{,}25 \cdot 0{,}55}{2}(10{,}13 + 1{,}265t - 3{,}78 + 1{,}265t) +$$

$$+ \frac{5{,}025 \cdot 1{,}45}{2}(-3{,}78 + 1{,}265t + 14{,}96 + 1{,}265t) +$$

$$+ \frac{5{,}025 \cdot 0{,}9}{2}(-14{,}96 - 1{,}265t - 21{,}32 + 1{,}265t) +$$

$$+ \frac{11{,}825 \cdot 0{,}55}{2}(1{,}265t - 14{,}96 + 1{,}265t) + \frac{5{,}025 \cdot 0{,}9}{2} \times$$

$$\times (1{,}265t - 48{,}24 + 1{,}265t) + \frac{0{,}1 \cdot 5{,}025^2}{12}(10{,}13 + 1{,}265t +$$

$$+ 52{,}88 - 1{,}265t - 14{,}96 + 1{,}265t + 21{,}32 - 1{,}265t - 14{,}96 +$$
$$+ 1{,}265t + 3{,}78 - 1{,}265t + 1{,}265t + 48{,}24 - 1{,}265t) = 0$$

или

$$38{,}96\,t = 393{,}79 - 22{,}35 = 371{,}44$$

(слагаемое — 22,35 — результат учета уклона полок швеллера).

Отсюда

$$t = \frac{371{,}44}{38{,}96} = 9{,}53\,см.$$

При сравнении величины t, найденной по обоим методам, нужно иметь в виду, что в первом методе t отсчитывается от низа вертикального швеллера, а во втором случае t отсчитывается от оси нижней полки вертикального швеллера.

з) Секториальные координаты крайних точек контура сечения (рис. 98). Координаты эти вычисляем по формуле (85)

$$\omega_A = \bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - c_{\bar{\xi}}(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c_{\bar{\eta}}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0),$$

где $\bar{\omega}_D$ — собственная, т. е. по отношению к своему центру изгиба и своей главной секториальной точке, секториальная координата. Из приложения 2 имеем (рис. 91)

$$\omega_D^{I} = -\omega_2 = -17{,}31\,см^2; \quad \omega_D^{II} = \omega_1 = +9{,}54\,см^2;$$
$$\omega_D^{III} = \omega_2 = +17{,}31\,см^2; \quad \omega_D^{IV} = \omega_1 = +9{,}54\,см^2;$$
$$\omega_D^{V} = -\omega_2 = -17{,}31\,см^2.$$

Остальные, входящие в формулу (85) величины даны на рис. 98

$$\omega_I = -17{,}31 + 21{,}7 - 6{,}91\,(3{,}68 + 3{,}39) - 0{,}35\,(-5{,}55 - 5{,}73) =$$
$$= -40{,}52\,см^2;$$
$$\omega_{II} = 9{,}54 + 21{,}7 - 6{,}91\,(-1{,}34 + 3{,}39) - 0{,}35(-5{,}55 - 5{,}73) =$$
$$= 21{,}02\,см^2;$$
$$\omega_{III} = 17{,}31 + 21{,}7 - 6{,}91\,(3{,}68 + 3{,}39) - 0{,}35\,(5{,}55 - 5{,}73) =$$
$$= -9{,}78\,см^2;$$
$$\omega_{IV} = 9{,}54 + 7{,}4 + 0{,}57\,(-5{,}55 - 4{,}23) + 4{,}17\,(1{,}34 - 1{,}34) =$$
$$= 11{,}37\,см^2;$$
$$\omega_V = -17{,}31 + 7{,}4 + 0{,}57\,(-5{,}55 - 4{,}23) + 4{,}17\,(-3{,}68 - 1{,}34) =$$
$$= -36{,}42\,см^2.$$

Секториальные координаты точек контура при пользовании методом графоаналитического интегрирования эпюр получатся очень

просто из рис. 97, если в выражения указанных на ней секториальных координат вместо параметра t подставим найденную для него величину t=9,53 *см*.

Тогда получим

$$\omega_{I} = -52{,}88 + 1{,}265 \cdot 9{,}53 = -40{,}82\ см^2;$$

$$\omega_{II} = 10{,}13 + 1{,}265 \cdot 9{,}53 = 22{,}19\ см^2$$

$$\omega_{III} = -21{,}32 + 1{,}265 \cdot 9{,}53 = -9{,}26\ см^2;$$

$$\omega_{IV} = 1{,}265 \cdot 9{,}53 = 12{,}06\ см^2;$$

$$\omega_{V} = -48{,}24 + 1{,}265 \cdot 9{,}53 = -36{,}18\ см^2;$$

$$\omega_{A} = -3{,}78 + 1{,}265 \cdot 9{,}53 = 8{,}28\ см^2;$$

$$\omega_{B} = -14{,}96 + 1{,}265 \cdot 9{,}53 = -2{,}90\ см^2.$$

Эпюра главных секториальных координат дана на рис. 99.

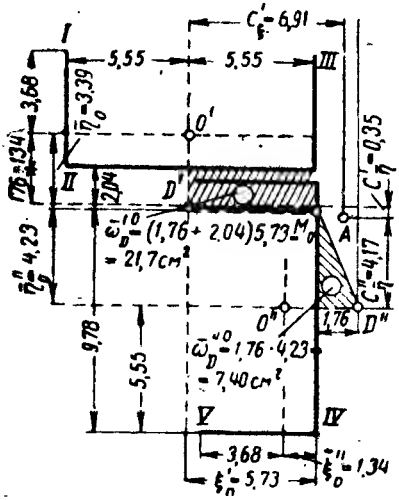


Рис. 98

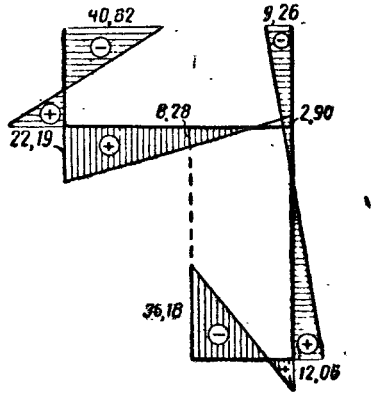


Рис. 99

и) Главный секториальный момент инерции Главный секториальный момент инерции вычисляем как сумму секториальных моментов инерции элементов профиля, из которых каждый определяется по формуле (91) (рис. 98):

$$J_{\omega} = \sum \left[J_{\bar{\omega}_D} + J_{\bar{\xi}}\, c_{\bar{\xi}}^2 + J_{\bar{\eta}}\, c_{\bar{\eta}}^2 + F\left(\bar{\omega}_D^0 - c_{\bar{\xi}}\, \bar{\eta}_0 + c_{\bar{\eta}}\, \bar{\xi}_0\right)^2 \right] =$$

$$= 768{,}3 + 37{,}4 \cdot 6{,}91^2 + 346{,}3 + 0{,}35^2 + 15{,}36(-21{,}7 + 6{,}91 \cdot 3{,}39 -$$

$$- 0{,}35 \cdot 5{,}73)^2 + 768{,}3 + 346{,}3 \cdot 0{,}57^2 + 37{,}4 \cdot 4{,}17^2 + 15{,}36 \times$$

$$\times (-7{,}4 + 0{,}57 \cdot 4{,}23 + 4{,}17 \cdot 1{,}34)^2 = 4133\ см^6.$$

По методу графоаналитического интегрирования эпюр секториальный момент инерции получим, согласно формуле

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF,$$

как интеграл от квадрата эпюры главных секториальных координат, взятый по всей площади поперечного сечения. Пользуясь эпюрой главных секториальных координат (рис. 99), получаем

$$J_\omega = \frac{5,025 \cdot 0,9}{3}(40,82^2 + 22,19^2 - 40,82 \cdot 22,19) + \frac{6,25 \cdot 0,55}{3} \times$$
$$\times (22,19^2 + 8,28^2 + 22,19 \cdot 8,28) + \frac{5,025 \cdot 1,45}{3} \times$$
$$\times (8,28^2 + 2,9^2 - 8,28 \cdot 2,9) + \frac{5,025 \cdot 0,9}{3} \times$$
$$\times (9,26^2 + 2,9^2 + 9,26 \cdot 2,9) + \frac{11,825 \cdot 0,55}{3}(2,9^2 + 12,06^2 -$$
$$- 2,9 \cdot 12,06) + \frac{5,025 \cdot 0,9}{3}(12,06^2 + 36,18^2 - 12,06 \cdot 36,18) +$$
$$+ \frac{0,1 \cdot 5,025^2}{12}(12,19^2 - 40,82^2 + 2,9^2 - 9,26^2 +$$
$$+ 2,9^2 - 8,28^2 + 12,06^2 - 36,18^2) = 4846 - 521 = 4325\ см^6.$$

(последнее слагаемое 521 получается от учета наклона полок).

Рассчитав один и тот же профиль двумя методами, мы получили для координат центра изгиба положения главной секториальной точки, координат характерных точек и секториального момента инерции величины, хотя и отличающиеся друг от друга, но практически достаточно близкие (для J_ω, например, расхождение не достигает 5%). Поэтому можно воспользоваться любой из них. Несовпадение этих величин объясняется тем обстоятельством, что в первом случае мы пользовались данными, взятыми из сортамента, при составлении которого были приняты во внимание, кроме уклона полок, также и закругления и наклон осей полок; во втором же случае при замене швеллеров элементами прямоугольного сечения это не принималось во внимание (за исключением уклона полок, на который вводилась поправка). Кроме того, во втором случае и ось сечения в месте присоединения двух швеллеров относилась к оси горизонтального швеллера; в первом методе это учитывалось более точно самими формулами.

к) Главные секториальные моменты сопротивления. Главные секториальные моменты сопротивления, вычисленные по результатам, полученным по первому методу, будут

$$W_{\omega}^{I} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{I}} = \frac{4133}{40,52} = 102\,см^4;$$

$$W_{\omega}^{II} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{II}} = \frac{4133}{21,02} = 196,6\,см^4;$$

$$W_{\omega}^{III} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{III}} = \frac{4133}{9,78} = 422,6\,см^4;$$

$$W_{\omega}^{IV} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{IV}} = \frac{4133}{11,37} = 363,5\,см^4;$$

$$W_{\omega}^{V} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{V}} = \frac{4133}{36,42} = 113,5\,см^4.$$

ГЛАВА V

ТЕОРИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ И ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ДЕПЛАНАЦИЕЙ СЕЧЕНИЯ

§ 17. ПРИВЕДЕНИЕ ВНЕШНИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОНКОСТЕННЫЙ СТЕРЖЕНЬ

Действующие на тонкостенный стержень внешние силы следует разлагать на составляющие и выделять компоненты, вызывающие только стесненное кручение.

Будем считать, что опоры стержня устроены так, что если действующая на стержень нагрузка приводится к продольной силе, то направления опорных реакций будут совпадать с линией действия этой силы; если же нагрузка приводится к поперечной силе, проходящей через центр изгиба сечения, то опорные реакции будут также проходить через центр изгиба, и, наконец, если действующая нагрузка приводится к закручивающим моментам или бимоментам, то на опорах будут возникать только крутящие моменты и бимоменты.

1. Пусть в каком-нибудь произвольном сечении стержня действует сосредоточенная сила P, отстоящая от центра изгиба его на расстоянии e (рис. 100, *а*). В этом случае стержень будет находиться в условиях сложного сопротивления изгибу и кручению.

Перенесем эту силу параллельно самой себе в центр изгиба, добавив при этом пару с моментом Pe. Тогда под воздействием первой стержень будет находиться только в условиях изгиба (рис. 100, *б*), а под действием второй — только в условиях кручения (рис. 100, *в*).

Подобное же разложение следует производить и в том случае, если на стержень действует не сосредоточенная, а распределенная по всей длине стержня или по ее части поперечная нагрузка.

2. Пусть теперь в произвольном сечении стержня в плоскости, отстоящей от центра изгиба его на расстоянии e, действует сосредоточенный внешний изгибающий момент (рис. 101, *а*). Тогда, как и в предыдущем случае, стержень будет находиться в условиях сложного сопротивления изгибу и кручению.

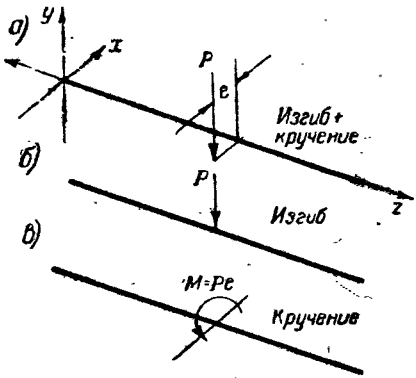


Рис. 100

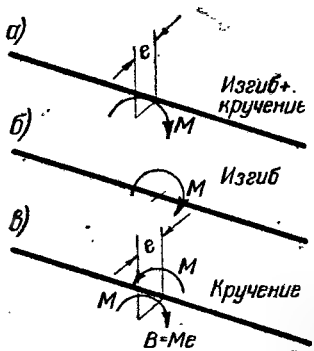


Рис. 101

Пару эту с моментом M всегда можно заменить такой же парой с моментом M, действующей в плоскости, параллельной плоскости заданного момента и проходящей через центр изгиба (рис. 101, *б*), и совокупностью двух параллельных, равных и противоположно направленных пар; заданной и действующей в плоскости, проходящей через центр изгиба (рис. 101, *в*). Подобную совокупность двух пар будем называть **бипарой сил**.

Пара, действующая в плоскости, проходящей через центр изгиба, будет только изгибать стержень, бипара же — только закручивать.

Остановимся несколько на понятии о бипаре сил. Изображать ее будем, как показано на рис. 102, *а* или как на рис. 102, *б*, где через P_1 и P_2 обозначены силы пар бипары, через a_1 и a_2 — плечи соответствующих пар, причем моменты этих пар должны быть одинаковы по величине и противоположны по знаку. Через e обозначено **плечо бипары** — кратчайшее расстояние между плоскостями пар.

Произведение момента одной из пар на плечо бипары будем называть **моментом бипары**, или **бимоментом**, и обозначать через B

$$B = P_1 a_1 e = P_2 a_2 e = Me. \qquad (138)$$

Бимомент B измеряется в *кгсм*^{2}.

Бимомент можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов: вектора силы и вектора площади или вектора момента и вектора плеча.

Знак бимомента будем считать положительным, если для наблюдателя, смотрящего вдоль плеча бипары, ближайшая к нему пара действует по часовой стрелке (рис. 102), и отрицательным в противоположном случае.

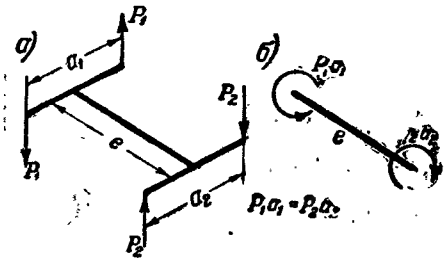


Рис. 102

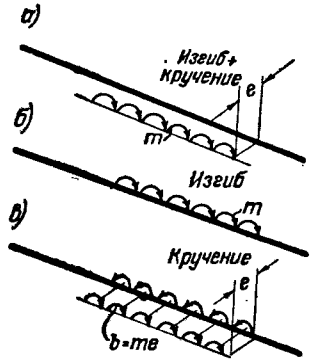


Рис. 103

Подобное же разложение сил для распределенных по длине стержня моментов представлено на рис. 103, где через b обозначена интенсивность распределения бимоментов по длине стержня.

3. Проф. Власов показал, что отклонение от закона плоских сечений в тонкостенных стержнях имеет место не только при действии на них поперечных нагрузок, но также и при действии продольных сил, приложенных по концам, по всей длине или в произвольных сечениях стержня.

Задача расчета тонкостенных стержней на действие продольных сил имеет большое значение. С вопросом учета влияния продольных сил приходится встречаться при расчете сжато-изогнутых стержней, при расчете элементов конструктивного оформления стержня по длине (т. е. при расчете диафрагм, планок и других типов решеток), при учете влияния эксцентричного прикрепления стержня на опорах, при расчете внутренних напряжений в сварных балках от продольных швов и т. п.

Пусть в произвольной точке K средней поверхности тонкостенного стержня действует продольная сдвигающая сила P (рис. 104, *а*), не проходящая ни через одну из секториальных нулевых точек сечения, т. е. ни через одну из точек, для которых секториальная координата равна нулю. В этом случае стержень будет находиться в условиях сложного сопротивления растяжению (сжатию), изгибу и кручению.

Силу P всегда можно заменить такой же силой P, проходящей через секториальную нулевую точку сечения (рис. 104, *б*), и парой Pa (рис. 104, *в*). Под действием первой силы стержень будет испыты-

вать только растяжение (сжатие) и изгиб, под действием же пары — только изгиб и кручение.

Пару Pa в свою очередь также можно заменить такой же парой с моментом Pa, действующей в плоскости, параллельной плоскости рассматриваемой пары и проходящей через центр изгиба (рис. 104, *г*), и бипарой с плечом e и бимоментом, равным (рис. 104, *д*)

$$B = Pae. \tag{139}$$

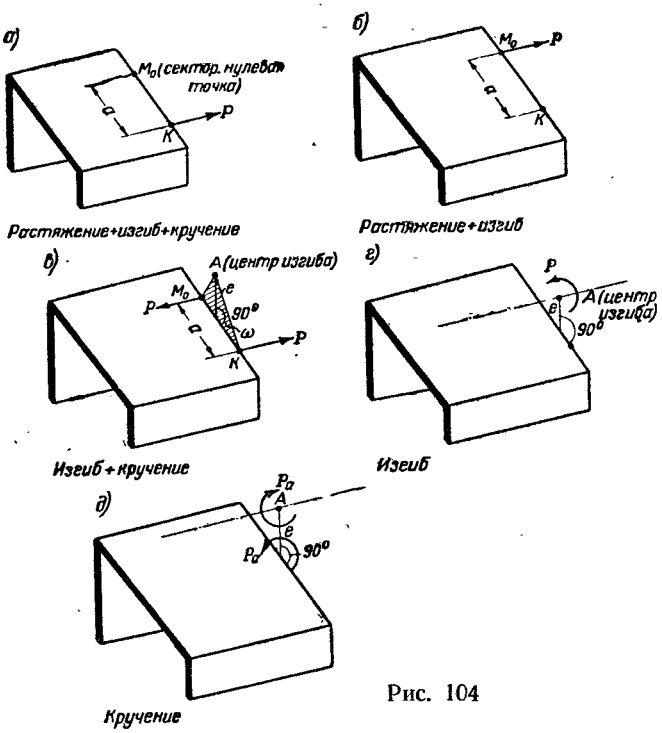


Рис. 104

Пара, действующая в плоскости, проходящей через центр изгиба, будет только изгибать стержень, бипара же — только закручивать.

Таким образом, путем указанного преобразования сил явление стесненного кручения мы выделили из общего случая сложного сопротивления и видим, что производится оно системой уравновешенных сил, которую удобно представить в виде бипары сил.

Нетрудно показать, что бимомент этой бипары будет равен:

$$B = P\omega, \tag{140}$$

где ω — секториальная координата точки приложения силы.

Пусть точка приложения силы P и секториальная нулевая точка расположены на одном и том же прямолинейном участке контура сечения, как это имеет место для случая, изображенного на рис. 104,*а*. Обозначив расстояние между этими точками через a, а длину перпендикуляра, опущенного из центра изгиба на этот участок контура, через e (рис. 104,*в*), получим, что секториальную координату точки приложения силы P

$$\omega = ae \qquad (141)$$

и формулу (139) для бимомента можно записать в форме (140).

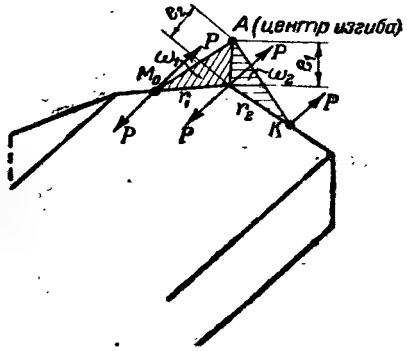


Рис. 105

Если участок между точкой приложения силы и секториальной нулевой точкой не прямолинейный, а ломаный (рис. 105), то преобразование сил следует производить в несколько приемов, а именно: сначала действующую силу P привести к ближайшей вершине ломаного контура, затем к следующей вершине и т. д. и, наконец, к секториальной нулевой точке и тогда получим бимомент

$$B = Pr_1e_1 + Pr_2e_2 + \cdots = P\omega_1 + P\omega_2 + \cdots = P\omega, \qquad (142)$$

где r_1 — расстояние от секториальной нулевой точки до ближайшей вершины контура;

r_2 — длина контура между первой и следующей вершиной контура и т. д.;

e_1, e_2 — перпендикуляры, опущенные из центра изгиба на соответствующие участки контура;

ω_1 — секториальная координата первой вершины контура;

ω_2 — секториальная координата второй вершины при отсчете ее от первой вершины и т. д.;

ω — секториальная координата точки приложения силы P.

Для криволинейных контуров подобное преобразование можно произвести, представив кривую линию контура в виде ломаной, а затем, произведя указанные преобразования, перейти к пределу, полагая участки ломаной бесконечно малыми, а число их бесконечно большим.

Таким образом, во всех случаях будем иметь

$$B = P\omega.$$

Результат не изменится, если предельная сила P будет приложена вне контура сечения стержня и передаваться на него при помощи жесткой в плоскости сечения стержня тонкостенной консоли, прикрепленной к контуру в некоторой точке его (рис. 106). В этом случае сила P будет вызывать бимомент, определяемый той же фор-

мулой (140), в которой под величиной ω следует понимать секториальную координату точки приложения силы на консоли (считая последнюю элементом контура сечения), отсчитанную относительно центра изгиба и главной секториальной точки основного сечения стержня[1]. На рис. 106 соответствующая секториальная площадь, изображающая эту координату, заштрихована.

4. Рассмотрим, наконец, случай, когда в произвольной точке средней поверхности тонкостенного стержня в плоскости, касатель-

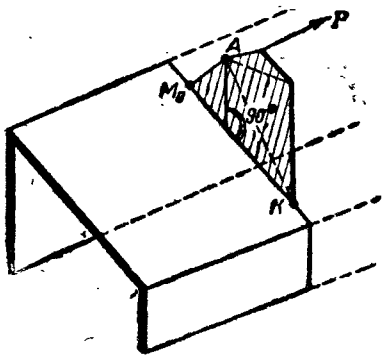


Рис. 106

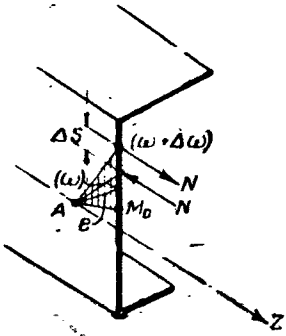


Рис. 107

ной к контуру сечения, действует сосредоточенный момент M (рис. 107).

Этот случай загружения можно рассматривать[2] как предел нагрузки, состоящей из двух равных и противоположных сил N с плечом Δs при $\Delta s \to 0$, т. е. $N \Delta s = M$, откуда

$$N = \frac{M}{\Delta s}. \tag{143}$$

Пусть первая из этих сил N приложена в точке с секториальной координатой ω и действует вдоль отрицательной оси z. Тогда вторая сила N будет приложена в точке с секториальной координатой $\omega + \Delta\omega$ и действовать по положительному направлению оси z.

Применяя для каждой из этих сил формулу (140) и подставляя в эту формулу значение N из формулы (143), получим, что бимомент, вызываемый заданным сосредоточенным моментом

$$B = -N\omega + N(\omega + \Delta\omega) = N\Delta\omega = M\frac{\Delta\omega}{\Delta s}.$$

---

[1] В. З. Власов. Тонкостенные упругие стержни, Стройиздат, 1940, стр. 109—110 и статья А. Р. Ржаницына в сборнике «Труды лаборатории строительной механики», 1942, стр. 102.

[2] В. З. Власов. Тонкостенные упругие стержни, Стройиздат, 1940, стр. 108—109.

Предел $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ равен:

$$\lim\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta s}\right)_{\Delta s \to 0} = \frac{d\omega}{ds} = \omega',$$

отсюда

$$B = M\omega'. \tag{144}$$

Формула (144) бимомента для случая действия сосредоточенного момента в касательной к средней поверхности стержня плоскости отличается от соответствующей формулы (138) для случая действия сосредоточенного момента, образованного не продольными, а поперечными силами, тем, что в правой части ее вместо e стоит ω'.

Нетрудно показать, что эти величины эквивалентны, т. е.

$$Me = M\omega'.$$

или

$$e = \omega', \tag{145}$$

где e — перпендикуляр, опущенный из центра изгиба A на плоскость действия момента.

В самом деле, дифференциал секториальной координаты $d\omega = rds$, где через r обозначен перпендикуляр, опущенный из центра изгиба на касательную к контуру сечения в точке с секториальной координатой ω.

В нашем случае $r = e$, т. е. $d\omega = eds$, откуда

$$e = \frac{d\omega}{ds} = \omega',$$

что и требовалось доказать.

Поэтому в дальнейшем в случае действия на стержень сосредоточенного момента независимо от того, образован ли он поперечными или продольными силами, будем считать, что стесненное кручение производится сосредоточенным бимоментом, равным

$$B = Me.$$

5. Таким образом, крутильное воздействие распределенных или сосредоточенных сил мы будем изображать соответственно в виде распределенных или сосредоточенных закручивающих моментов, равных по величине произведению соответствующей силы (q или P) на эксцентрицитет ее приложения по отношению к центру изгиба поперечного сечения стержня (e), и обозначать их будем соответственно через m и M, т. е.

$$\left.\begin{aligned} qe &= m, \\ Pe &= M. \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Крутильное же воздействие эксцентричных распределенных или сосредоточенных моментов (m или M), действующих в плоскости, параллельной оси стержня, а также крутильное воздействие

распределенных или сосредоточенных продольных сил (n или N) будем изображать соответственно в виде распределенных или сосредоточенных бипар и обозначать соответственно через b или B, причем для распределенных или сосредоточенных продольных сдвигающих сил

$$\left.\begin{aligned} b &= n\omega \\ B &= N\omega, \end{aligned}\right\} \quad (147)$$

и

а для распределенных или сосредоточенных моментов независимо от того, образованы ли они поперечными или продольными силами

$$\left.\begin{aligned} b &= me \\ B &= Me, \end{aligned}\right\} \quad (148)$$

и

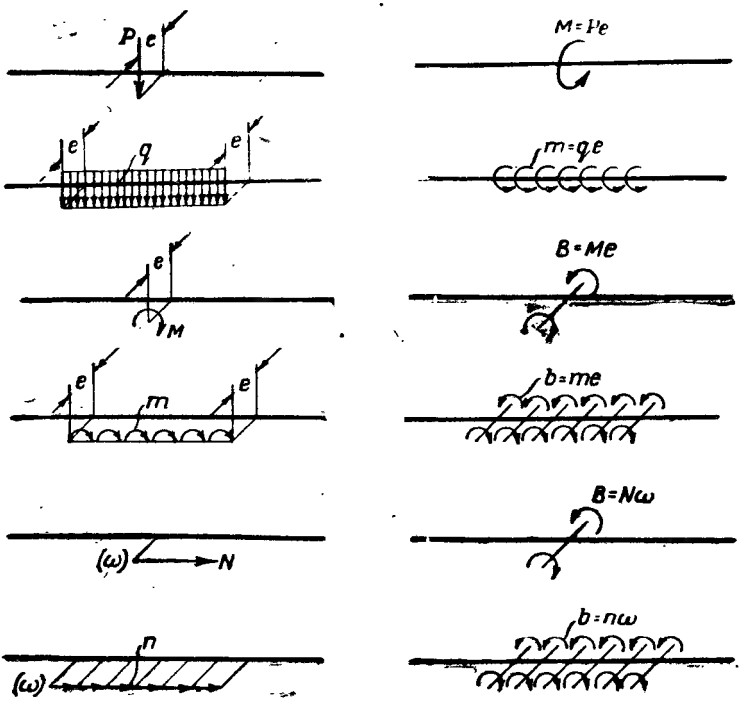
где ω — секториальная координата точки приложения продольной силы;

e — расстояние плоскости действия момента от центра изгиба сечения.

Перечисленные изображения и обозначения представлены в форме табл. 24.

Таблица 24.

Изображение внешних изгибно-крутильных силовых факторов при стесненном кручении



§ 18. СЕКТОРИАЛЬНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ τ_ω И ИЗГИБНО-КРУТЯЩИЙ МОМЕНТ M_ω ПРИ ДЕЙСТВИИ НА ТОНКОСТЕННЫЙ СТЕРЖЕНЬ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

Рассмотрим элемент $ABCD$ тонкостенного стержня, ограниченный двумя поперечными сечениями с координатами z и $z+dz$ и продольным сечением, проходящим через точку контура с координатами x, y и ω (рис. 108). Пусть этот элемент находится под действием продольных сил, распределенных по продольной линии, про-

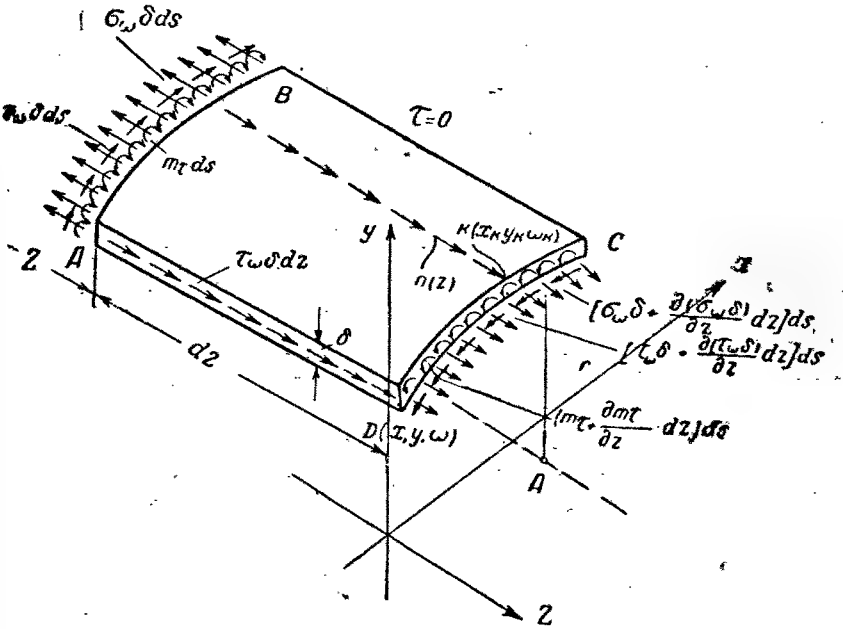


Рис. 108

ходящей через точку контура $K(x_K, y_K, \omega_K)$, интенсивность распределения этой нагрузки обозначим через $n(z)$.

Через m_τ на рис. 108 обозначена интенсивность изменения по сечению крутящих моментов, возникающих вследствие неравномерности распределения касательных напряжений по толщине стержня.

Составим уравнение проекций на ось z всех внешних и внутренних сил, действующих на рассматриваемый элемент стержня:

$$\int_{F_{отс}} \frac{\partial(\sigma_\omega \delta)}{\partial z} dz ds + n(z)\, dz + \tau_\omega \delta\, dz = 0. \qquad (149)$$

Значок $F_{отс}$ показывает, что интеграл распространяется только на рассматриваемую отсеченную часть стержня.

Толщина δ нами рассматривается как функция только одной переменной s, поэтому в уравнении (149) ее можно вынести из-под знака частной производной по z.

Обозначив $\delta\, ds$ через dF и сократив уравнение (149) на dz, получим

$$\int_{F_{отс}} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} dF + n(z) + \tau_\omega \delta = 0. \tag{150}$$

Из формулы (19) известно, что

$$\sigma_\omega = -E\theta''\omega, \tag{151}$$

где E — модуль продольной упругости, а

θ'' — вторая производная по z от угла закручивания θ.

Подставив это выражение в формулу (151), будем иметь

$$-E\theta''' \int_{F_{отс}} \omega\, dF + n(z) + \tau_\omega \delta = 0, \tag{152}$$

откуда

$$\tau_\omega = \frac{1}{\delta}\left[E\theta''' \int_{F_{отс}} \omega\, dF - n(z)\right]. \tag{153}$$

Изгибно-крутящий момент M_ω вычисляется как интеграл из произведения сдвигающих усилий $\tau\delta$ на дифференциал секториальной площади $d\omega$, т. е.

$$M_\omega = \int_F \tau\delta\, d\omega. \tag{154}$$

Подставляя в формулу (154) значение τ_ω из формулы (153), получим

$$M_\omega = \int_F \left[E\theta''' \int_{F_{отс}} \omega\, dF - n(z)\right] d\omega = E\theta''' \int_F d\omega \int_{F_{отс}} \omega\, dF - \int_F n(z)\, d\omega.$$

Интегрируя интеграл первого слагаемого правой части по частям, будем иметь

$$M_\omega = E\theta'''\left[\omega \int_F \omega\, dF - \int_F \omega^2 dF\right] - n(z) \int_F d\omega$$

или

$$M_\omega = -EJ_\omega \theta''' - n(z)\,\omega, \tag{155}$$

где ω — секториальная координата точки сечения, через которую проходит линия действия продольных сил $n(z)$.

Так как

$$B_\omega = -EJ_\omega \theta'', \tag{156}$$

то поэтому можно написать

$$M_\omega = \frac{dB_\omega}{dz} - n(z)\,\omega = B'_\omega - n(z)\,\omega, \tag{157}$$

т. е. для случая действия продольных сил

$$M_\omega \neq B'_\omega .$$

§ 19. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ НА ТОНКОСТЕННЫЙ СТЕРЖЕНЬ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

Составим теперь уравнение моментов внешних и внутренних сил, действующих на рассматриваемый элемент стержня (см. рис. 108) относительно продольной оси, проходящей через центр изгиба сечения A, распространив это уравнение на все поперечное сечение стержня

$$-\int_F \frac{\partial(\tau_\omega\ \delta)}{\partial z}\,dz ds\, r - \int_F \frac{\partial m_\tau}{\partial z}\,dz ds = 0. \tag{158}$$

Здесь r — перпендикуляр из центра изгиба на касательную к контуру (на направление касательных напряжений τ_ω).

Сократим уравнение (158) на dz, вынесем δ из-под знака частной производной по z и заменим rds через $d\omega$, где $d\omega$ есть удвоенная площадь элементарного треугольника (сектора) с основанием, равным дифференциалу дуги контура ds и вершиной в центре изгиба A.

Тогда получим

$$\int_F \delta \frac{\partial \tau_\omega}{\partial z}\,d\omega + \frac{\partial}{\partial z}\int m_\tau\, ds = 0. \tag{159}$$

Касательные напряжения, соответствующие чистому кручению, для всего поперечного сечения стержня приводятся к крутящему моменту $M_{кр}$, т. е.

$$\int_F m_\tau\, ds = M_{кр}. \tag{160}$$

Из теории же чистого кручения известно, что

$$M_{кр} = GJ_d\,\theta', \tag{161}$$

где G — модуль упругости при сдвиге;

J_d — момент инерции при чистом кручении (крутильное сопротивление).

Подставив (153), (160) и (161) в (159), получим

$$\int_F \left[E\,\theta^{IV} \int_{F_{отс}} \omega\, dF - n'(z)\right] d\omega + GJ_d\,\theta'' = 0$$

или

$$E\theta^{IV}\int_F d\omega\int_{F_{отс}}\omega\, dF-\int_F n'(z)d\omega+GJ_d\theta''=0.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, будем иметь

$$E\theta^{IV}\left(\omega\int_F\omega\, dF-\int_F\omega^2 dF\right)-n'(z)\,\omega_k+GJ_d\theta''=0. \qquad (162)$$

Здесь $\int_F\omega\, dF$ — секториальный статический момент всего сечения, он равен нулю;

$\int_F\omega^2 dF$ — секториальный момент инерции сечения;

ω_k — секториальная координата точки сечения, через которую проходит линия действия продольных сил $n(z)$.

Подставив эти значения в уравнение (162), получим

$$EJ_\omega\theta^{IV}-GJ_d\theta''+n'(z)\,\omega_k=0.$$

Разделив это уравнение на EJ_ω и введя обозначение

$$\frac{GJ_d}{EJ_\omega}=k^2, \qquad (163)$$

окончательно будем иметь

$$\theta^{IV}-k^2\theta''+\frac{n'(z)\,\omega}{EJ_\omega}=0 \qquad (164)$$

(значок k у ω опущен).

Уравнение (164) есть дифференциальное уравнение упругой линии углов закручивания для случая действия на тонкостенный стержень продольных сил.

§ 20. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Из первого из уравнений (147) известно, что

$$n\,\omega=b, \text{ а } n'\omega=b'.$$

Сделав соответствующую подстановку в уравнении (164), получим

$$\theta^{IV}-k^2\theta''=\frac{b'(z)}{EJ_\omega}, \qquad (165)$$

а для случая действия на тонкостенный стержень одновременно поперечной и продольной нагрузок дифференциальное уравнение равновесия примет следующий вид:

$$\theta^{IV}-k^2\theta''=\frac{m(z)-b'(z)}{EJ_\omega}, \qquad (166)$$

где θ — угол закручивания стержня;

$m(z)$ — интенсивность внешних распределенных закручивающих моментов;

$b'(z)$ — производная по z интенсивности внешних распределенных бимоментов;

EJ_ω — секториальная жесткость депланации тонкостенного стержня;

GJ_d — жесткость стержня при чистом кручении;

$k=\sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$ — упругая изгибно-крутильная характеристика тонкостенного стержня.

Общий интеграл уравнения (166) можно написать так:

$$\theta = A\,\mathrm{sh}\,kz + B\,\mathrm{ch}\,kz + Cz + D + f(z), \tag{167}$$

где $f(z)$ — частный интеграл уравнения, а

$$A\,\mathrm{sh}\,kz + B\,\mathrm{ch}\,kz + Cz + D \text{ —} \tag{168}$$

общий интеграл соответствующего однородного уравнения.

Пользуясь методом интегрирования уравнений акад. А. Н. Крылова и несколько видоизменяя его, как это рекомендует проф. М. М. Филоненко-Бородич, введем вместо независимых частных интегралов $\mathrm{sh}kz$, $\mathrm{ch}kz$, z и 1 другие частные интегралы $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$ и $\psi_4(z)$, представляющие линейные комбинации первых

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1 &= a_1\,\mathrm{sh}\,kz + a_2\,\mathrm{ch}\,kz + a_3z + a_4;\\
\psi_2 &= b_1\,\mathrm{sh}\,kz + b_2\,\mathrm{ch}\,kz + b_3z + b_4;\\
\psi_3 &= c_1\,\mathrm{sh}\,kz + c_2\,\mathrm{ch}\,kz + c_3z + c_4;\\
\psi_4 &= d_1\,\mathrm{sh}\,kz + d_2\,\mathrm{ch}\,kz + d_3z + d_4.
\end{aligned}\right\} \tag{169}$$

Тогда общий интеграл уравнения (166) примет следующий вид:

$$\theta = A\psi_1 + B\psi_2 + C\psi_3 + D\psi_4 + f(z). \tag{170}$$

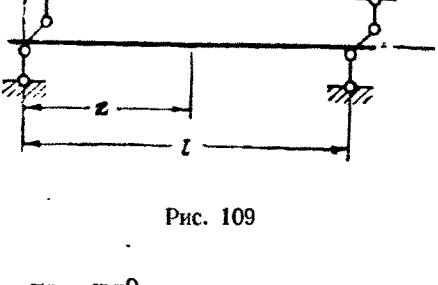


Рис. 109

Для определения произвольных постоянных A, B, C и D в однопролетном стержне всегда имеются четыре граничных условия независимо от того, статически определим или неопределим этот стержень.

Так, например, для стержня, свободно опертого, но закрепленного от закручивания по концам, граничные условия будут следующие (рис. 109):

при $z=0$

$$\theta = 0 \text{ и } \theta'' = 0,$$

при $z=l$

$$\theta = 0 \text{ и } \theta'' = 0.$$

Для упрощения дальнейших вычислений определим для этого случая частные интегралы однородного уравнения (170) так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1(0)=1;\ \psi_1''(0)=0;\ \psi_1(l)=0;\ \psi_1''(l)=0; \\ \psi_2(0)=0;\ \psi_2''(0)=1;\ \psi_2(l)=0;\ \psi_2''(l)=0; \\ \psi_3(0)=0;\ \psi_3''(0)=0;\ \psi_3(l)=1;\ \psi_3''(l)=0; \\ \psi_4(0)=0;\ \psi_4''(0)=0;\ \psi_4(l)=0;\ \psi_4''(l)=1. \end{array}\right\} \quad (171)$$

Частный интеграл $f(z)$ уравнения (166) с правой частью выберем так, чтобы

$$f(0)=0;\ f'(0)=0;\ f''(0)=0;\ f'''(0)=0. \quad (172)$$

Приравняв выражение (170) и его вторую производную нулю при значениях аргументов $z=0$ и $z=l$, мы с помощью выражений (171) и (172) получим четыре уравнения, из которых каждое будет содержать в качестве неизвестного одно из произвольных постоянных. Из этих уравнений легко найти произвольные постоянные, причем два из них всегда будут равны нулю.

В данном случае получим

$$A=B=0;\ C=-f(l);\ D=-f''(l).$$

Определив при помощи условий (171) коэффициенты c_1, c_2, c_3 и c_4 функции ψ_3 и коэффициенты d_1, d_2, d_3 и d_4 функции ψ_4, получим интеграл уравнения (166) в виде

$$\theta = -f(l)\frac{z}{l} + \frac{f''(l)}{k^2}\left(\frac{z}{l} - \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}\right) + f(z). \quad (173)$$

Дважды продифференцировав это уравнение по z и умножив его на $-EJ_\omega$, получим общее уравнение изгибно-крутящих бимоментов

$$B_\omega = EJ_\omega \frac{f''(l)}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz - EJ_\omega f''(z). \quad (174)$$

Совершенно аналогично мы получили соответствующие общие уравнения упругой линии углов закручивания и изгибно-крутящих бимоментов для стержней с иными условиями закрепления на концах. Эти уравнения приведены в табл. 25.

Таблица 25

Общие уравнения углов закручивания и изгибно-крутящих бимоментов

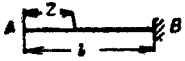
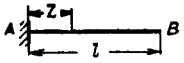
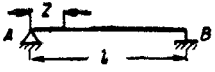
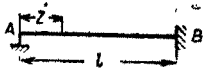
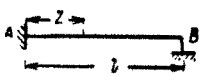
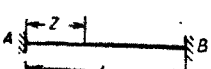
Схема балок	Граничные условия		Общие уравнения углов закручивания	Общие уравнения изгибно-крутящих бимоментов
	$z=0$	$\theta''=0_1$ $L=0$	$\theta=-f(l)+f'(l)\dfrac{\operatorname{sh}kl-\operatorname{sh}kz}{k\operatorname{ch}kl}+f(z)$	$B_\omega=EJ_\omega f'(l)\dfrac{k\operatorname{sh}kz}{\operatorname{ch}kl}-EJ_\omega f''(z)$
	$z=l$	$\theta=0$ $\theta'=0$		
	$z=0$	$\theta=0$ $\theta'=0$	$\theta=f''(l)\dfrac{1-\operatorname{ch}kz}{k^2\operatorname{ch}kl}+\left[f'(l)-\dfrac{f'''(l)}{k^2}\right]\times$ $\times\dfrac{\operatorname{sh}kl-\operatorname{sh}k(l-z)-kz\operatorname{ch}kl}{k\operatorname{ch}kl}+f(z)$	$B_\omega=EJ_\omega f''(l)\dfrac{\operatorname{ch}kz}{\operatorname{ch}kl}+EJ_\omega\left[f'(l)-\right.$ $\left.-\dfrac{f'''(l)}{k^2}\right]\dfrac{k\operatorname{sh}k(l-z)}{\operatorname{ch}kl}-EJ_\omega f''(z)$
	$z=l$	$\theta''=0_1$ $L=0$		
	$z=0$	$\theta=0$ $\theta''=0$	$\theta=-f(l)\dfrac{z}{l}+\dfrac{f''(l)}{k^2}\left(\dfrac{z}{l}-\dfrac{\operatorname{sh}kz}{\operatorname{sh}kl}\right)+f(z)$	$B_\omega=\dfrac{EJ_\omega f''(l)}{\operatorname{sh}kl}\operatorname{sh}kz-EJ_\omega f''(z)$
	$z=l$	$\theta=0$ $\theta''=0$		

Схема балок	Граничные условия		Общие уравнения углов закручивания	Общие уравнения изгибно-крутящих бимоментов
	$z=0$	$\theta=0$ $\theta''=0$	$\theta=-f(l)\dfrac{kz\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kz}{kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl}+$ $+f'(l)\dfrac{z\,\mathrm{sh}\,kl-l\,\mathrm{sh}\,kz}{kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl}+f(z)$	$B_\omega=-EJ_\omega f(l)\dfrac{k^2\,\mathrm{sh}\,kz}{kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl}+$ $+EJ_\omega f'(l)\dfrac{k^2 l\,\mathrm{sh}\,kz}{kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl}-EJ_\omega f''(z)$
	$z=l$	$\theta=0$ $\theta'=0$		
	$z=0$	$\theta=0$ $\theta'=0$	$\theta=-f(l)\dfrac{kz\,\mathrm{ch}\,kl+\mathrm{sh}\,k(l-z)-\mathrm{sh}\,kl}{kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl}+$ $+f''(l)\dfrac{kz\,\mathrm{ch}\,kl+\mathrm{sh}\,k(l-z)-\mathrm{sh}\,kl+}{(kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl)}\rightarrow$ $\rightarrow\dfrac{+\mathrm{sh}\,kz-kl\,\mathrm{ch}\,kz+k(l-z)}{(kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl)}+f(z)$	$B_\omega=EJ_\omega f(l)\dfrac{k^2\,\mathrm{sh}\,k(l-z)}{kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl}-$ $-EJ_\omega f''(l)\dfrac{\mathrm{sh}kz+\mathrm{sh}\,k(l-z)-kl\,\mathrm{ch}\,kz}{kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl}-$ $-EJ_\omega f''(z)$
	$z=l$	$\theta=0$ $\theta''=0$		
	$z=0$	$\theta=0$ $\theta'=0$	$\theta=-f(l)\dfrac{\mathrm{ch}k(l-z)-\mathrm{ch}kz+kz\mathrm{sh}kl-\mathrm{ch}kl+1}{kl\,\mathrm{sh}\,kl-2\,\mathrm{ch}\,kl+2}-$ $-f'(l)\dfrac{kl\,\mathrm{ch}\,kz-kz\,\mathrm{ch}\,kl+\mathrm{sh}\,kl-}{k(kl\,\mathrm{sh}\,kl-2\mathrm{ch}\,kl+2)}\rightarrow$ $\leftarrow\dfrac{-\mathrm{sh}\,kz-\mathrm{sh}\,k(l-z)-k(l-z)}{k(kl\,\mathrm{sh}\,kl-2\,\mathrm{ch}\,kl+2)}+f(z)$	$B_\omega=EJ_\omega k^2 f(l)\dfrac{\mathrm{ch}\,k(l-z)-\mathrm{ch}\,kz}{kl\,\mathrm{sh}\,kl-2\,\mathrm{ch}\,kl+2}+$ $+EJ_\omega kf'(l)\dfrac{kl\,\mathrm{ch}\,kz-\mathrm{sh}\,kz-\mathrm{sh}\,k(l-z)}{kl\,\mathrm{sh}\,kl-2\,\mathrm{ch}\,kl+2}-$ $-EJ_\omega f''(z)$
	$z=l$	$\theta=0$ $\theta'=0$		

[1] $L=EJ_\omega\theta'''-GJ_d\theta'$.

§ 21. ЗНАЧЕНИЯ ЧАСТНОГО ИНТЕГРАЛА $f(z)$ ДЛЯ ОСНОВНЫХ НАГРУЗОК

В общие уравнения углов закручивания и изгибно-крутящих бимоментов входит функция $f(z)$, представляющая частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения.

1. Для продольных нагрузок интеграл этот можно написать в следующей форме:

$$f(z) = -\int_0^z \bar{\psi}'(z-t)\frac{n(t)\,\omega}{EJ_\omega}\,dt, \tag{175}$$

где $\bar{\psi}(z-t)$ — производная функция $\bar{\psi}(z)$, в которую вместо аргумента z подставляем аргумент $(z-t)$. Сама же функция $f(z)$ — одно из частных решений уравнения (164). Кроме того, функция $f(z)$ должна удовлетворять условиям (172).

Условия эти, кроме последнего, будут удовлетворены, если мы в качестве функции $\bar{\psi}(z)$ возьмем функцию, удовлетворяющую условиям:

$$\bar{\psi}(0) = 0;\quad \bar{\psi}'(0) = 0;\quad \bar{\psi}''(0) = 0;\quad \bar{\psi}'''(0) = 1, \tag{176}$$

Функция $\psi(z)$ есть результат линейного преобразования частных решений однородного уравнения [уравнения (164) без свободного члена]

$$\bar{\psi}(z) = a_1 \operatorname{sh} kz + a_2 \operatorname{ch} kz + a_3 z + a_4.$$

Составим три первых производных этой функции

$$\bar{\psi}'(z) = ka_1 \operatorname{ch} kz + ka_2 \operatorname{sh} kz + a_3;$$

$$\bar{\psi}''(z) = k^2 a_1 \operatorname{sh} kz + k^2 a_2 \operatorname{ch} kz;$$

$$\bar{\psi}'''(z) = k^3 a_1 \operatorname{ch} kz + k^3 a_2 \operatorname{sh} kz.$$

Подставляя эти значения в условия (176), найдем

$$a_2 + a_4 = 0;\ ka_1 + a_3 = 0;\ k^2 a_2 = 0;\ k^3 a_1 = 1,$$

откуда

$$a_1 = \frac{1}{k^3};\ a_2 = 0;\ a_3 = -\frac{1}{k^2};\ a_4 = 0.$$

Следовательно,

$$\bar{\psi}'(z) = \frac{1}{k^2}(\operatorname{ch} kz - 1). \tag{177}$$

Подставляя выражение (177) в общую формулу (175) для частного интеграла $f(z)$, получим

$$f(z) = -\int_0^z [\operatorname{ch} k(z-t) - 1]\frac{n(t)\,\omega}{k^2 EJ_\omega}\,dt.$$

Подставив значение k^2 из формулы (163), будем иметь

$$f(z) = -\frac{\omega}{GJ_d}\int_0^z [\operatorname{ch} k(z-t) - 1]\, n(t)\, dt. \qquad (178)$$

Для того чтобы убедиться в правильности принятого частного интеграла (178), подставим его в уравнение (164).

С этой целью найдем

$$f'(z) = -\frac{\omega}{GJ_d}[\operatorname{ch} k(z-z) - 1]\, n(z) - \frac{\omega k}{GJ_d}\int_0^z \operatorname{sh} k(z-t)\, n(t)\, dt =$$

$$= -\frac{\omega k}{GJ_d}\int_0^z \operatorname{sh} k(z-t)\, n(t)\, dt;$$

$$f''(z) = -\frac{\omega k}{GJ_d}\operatorname{sh} k(z-z)\, n(z) - \frac{\omega k^2}{GJ_d}\int_0^z \operatorname{ch} k(z-t)\, n(t)\, dt =$$

$$= -\frac{\omega k^2}{GJ_d}\int_0^z \operatorname{ch} k(z-t)\, n(t)\, dt;$$

$$f'''(z) = -\frac{\omega k^2}{GJ_d}\operatorname{ch} k(z-z)\, n(z) - \frac{\omega k^3}{GJ_d}\int_0^z \operatorname{sh} k(z-t)\, n(t)\, dt =$$

$$= -\frac{\omega k^2}{GJ_d}\, n(z) - \frac{\omega k^3}{GJ_d}\int_0^z \operatorname{sh} k(z-t)\, n(t)\, dt;$$

$$f^{\mathrm{IV}}(z) = -\frac{\omega k^2}{GJ_d}\, n'(z) - \frac{\omega k^3}{GJ_d}\operatorname{sh} k(z-z)\, n(z) -$$

$$-\frac{\omega k^4}{GJ_d}\int_0^z \operatorname{ch} k(z-t)\, n(t)\, dt = -\frac{\omega k^2}{GJ_d}\, n'(z) -$$

$$-\frac{\omega k^4}{GJ_d}\int_0^z \operatorname{ch} k(z-t)\, n(t)\, dt.$$

Подставляя эти значения в уравнение (164), найдем

$$-\frac{\omega k^2}{GJ_d}\, n'(z) - \frac{\omega k^4}{GJ_d}\int_0^z \operatorname{ch} k(z-t)\, n(t)\, dt +$$

$$+\frac{\omega k^4}{GJ_d}\int_0^z \operatorname{ch} k(z-t)\, n(t)\, dt + \frac{n'(z)\,\omega}{EJ_\omega} = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

При $z=0$, как нетрудно видеть:

$$f(0)=0;\ f'(0)=0=0;\ f''(0)=0;\ f'''(0)=-\frac{\omega k^2}{GJ_d}n(0). \qquad (179)$$

Последнее равенство необходимо иметь в виду при подстановке частного интеграла в общие уравнения, которые были выведены при условии $f'''(0)=0$. Это, очевидно, будет иметь место только для таких нагрузок, для которых на левом конце стержня $n(0)\neq 0$, например, для равномерно распределенной по всей длине стержня продольной нагрузки.

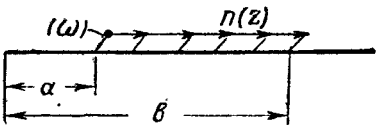


Рис. 110

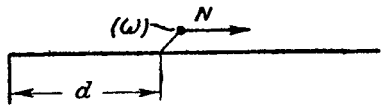


Рис. 111

Найдем теперь выражение частного интеграла $f(z)$ для наиболее часто встречающихся в практике случаев загружения тонкостенного стержня продольными силами.

1 случай. Равномерно распределенная по длине стержня продольная нагрузка интенсивности n, действующая на участке от $z=a$ до $z=b$ (рис. 110).

I участок $f_1(z)=0$, так как всюду $n(t)=0$;

II участок

$$f_2(z)=-\frac{\omega}{GJ_d}\int_0^z[\operatorname{ch}k(z-t)-1]\,n(t)\,dt=-\frac{n\omega}{GJ_d}\left[\int_0^a+\int_a^z\right]=$$

$$=-\frac{n\omega}{GJ_d}\left[-\frac{1}{k}\operatorname{sh}k(z-t)-t\right]_a^z \qquad (180)$$

$$f_2(z)=-\frac{n\omega}{kGJ_d}[\operatorname{sh}k(z-a)-k(z-a)].$$

III участок

$$f_3(z)=\int_0^z=\int_0^a+\int_a^b+\int_b^z=-\frac{n\omega}{GJ_d}\int_a^b[\operatorname{ch}k(z-t)-1]\,dt=$$

$$=-\frac{n\omega}{GJ_d}\left[-\frac{1}{k}\operatorname{sh}k(z-t)-t\right]_a^b$$

$$f_3(z)=-\frac{n\omega}{kGJ_d}[\operatorname{sh}k(z-a)-\operatorname{sh}k(z-b)-k(b-a)]. \qquad (181)$$

2 случай. Сосредоточенная продольная сила N, приложенная в точке с секториальной координатой ω на расстояние $z=d$ (рис. 111).

I участок $f_1(z)=0$, так как всюду $n(t)=0$.

II участок. Для нахождения функции $f(z)$ для какой-нибудь точки Z правого участка следует иметь в виду, что слева от этой точки находится сила N, которую можно представить в виде продольной равномерно распределенной нагрузки интенсивности n на бесконечно малой длине Δd, т. е.

$$N = n\Delta d$$

и взять интеграл формулы (178) в пределах d и $d+\Delta d$

$$f_2(z) = -\frac{n\omega}{GJ_d}\int_d^{d+\Delta d}[\operatorname{ch} k(z-t)-1]\,dt\,.$$

По теореме о среднем значении интеграла получим

$$f_2(z) = -\frac{n\omega}{GJ_d}[\operatorname{ch} k(z-t_m)-1]\int_d^{d+\Delta d}dt =$$

$$= -\frac{n\omega\Delta d}{GJ_d}[\operatorname{ch} k(z-t_m)-1]\,,$$

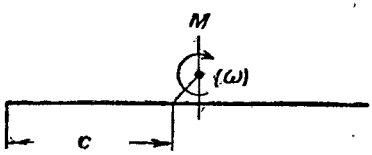


Рис. 112

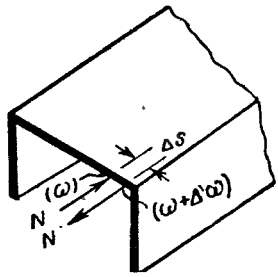


Рис. 113

где t_m — неизвестное значение t, заключенное в пределах интегрирования

$$d < t_m < d + \Delta d\,.$$

Полагая $\Delta d \to 0$, находим $t_m \to d$. Кроме того, $n\Delta d = N$. Принимая это во внимание, получим

$$f_2(z) = -\frac{N\omega}{GJ_d}[\operatorname{ch} k(z-d)-1]\,. \qquad (182)$$

3. случай Пара сил с моментом M, приложенная в сечении $z=c$ и действующая в касательной плоскости к контуру сечения в точке, секториальная координата которой равна ω (рис. 112).

Этот случай загружения можно рассматривать как предельное состояние нагрузки, состоящей из двух равных и противоположных сил N с плечом Δs при $\Delta s \to 0$ (рис. 113), т. е. $N\Delta s = M$, откуда

$$N = \frac{M}{\Delta s}\,. \qquad (183)$$

Пусть первая из этих сил N приложена в точке с секториальной координатой ω и действует вдоль положительной оси. Тогда вторая сила N будет приложена в точке с секториальной координатой $\omega + \Delta\omega$ и будет действовать по отрицательному направлению оси.

Применяя формулу (182) для каждой из этих двух сил, для участка II (при $z > c$), получим

$$f_2(z) = -\frac{N\omega}{GJ_d}[\operatorname{ch} k(z-c)-1] + \frac{N(\omega+\Delta\omega)}{GJ_d}[\operatorname{ch} k(z-c)-1] =$$

$$= \frac{N\Delta\omega}{GJ_d}[\operatorname{ch} k(z-c)-1].$$

Подставим в эту формулу значения N из формулы (183) и примем во внимание, что предел $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ равен

$$\lim\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta s}\right)_{\Delta s\to 0} = \frac{d\omega}{ds} = \omega'; \tag{184}$$

получим

$$f_2(z) = \frac{M\omega'}{GJ_d}[\operatorname{ch} k(z-c)-1]. \tag{185}$$

Формула (185) для частного интеграла $f(z)$ в случае действия сосредоточенного момента в плоскости, касательной к средней поверхности стержня, отличается от соответствующей формулы для случая действия сосредоточенного момента, образованного не продольными, а поперечными силами, знаком и тем, что в этом случае вместо Me стоит произведение $M\omega'$. В § 17 было показано, что эти величины эквивалентны. Что же касается разницы в знаках, то это объясняется тем, что знак правой части дифференциального уравнения (164) противоположен соответствующему знаку дифференциального уравнения упругой линии углов закручивания от действия поперечных нагрузок.

Формулы частных интегралов $f(z)$ для различных случаев действия на стержень продольных сил представлены в табл. 26.

К этой таблице следует сделать следующее примечание. Для случая загружения стержня равномерно распределенными по всей длине его продольными силами $n(0) \neq 0$, а следовательно, как мы видели выше, будет и $f'''(0) \neq 0$, а общие уравнения углов закручивания, как известно, выведены при условии $f'''(0) = 0$. Поэтому при пользовании формулой (4) табл. 26 при вычислении $f'''(z)$ необходимо вычесть из него значение $f'''(0) = -\frac{n\omega k^2}{GJ_d}$ (формула 179).

2. Для поперечных нагрузок частный интеграл $f(z)$ можно написать в форме

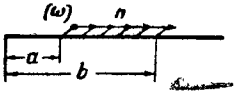
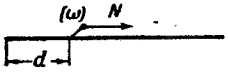
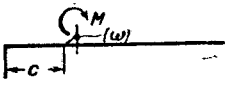
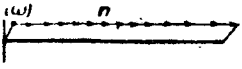
$$f(z) = \int_0^z \bar{\psi}(z-t)\frac{q(t)e}{EJ_\omega}dt, \tag{186}$$

Таблица 26

Формулы частного интеграла $f(z)$ дифференциального уравнения упругой линии углов закручивания для различных видов загружения тонкостенного стержня продольными силами

Общая формула частного интеграла

$$f(z) = -\frac{\omega}{GJ_d}\int_0^z [\operatorname{ch} k(z-t) - 1]\, n(t)\, dt.$$

№ п/п	Схема нагрузки	Формулы частного интеграла для различных видов загружения
1		$f_1(z) = 0$ $f_2(z) = \frac{-n\omega}{kGJ_d}[\operatorname{sh} k(z-a) - k(z-a)]$ $f_3(z) = \frac{-n\omega}{kGJ_d}[\operatorname{sh} k(z-a) - \operatorname{sh} k(z-b) - k(b-a)]$
2		$f_1(z) = 0$ $f_2(z) = \frac{-N\omega}{GJ_d}[\operatorname{ch} k(z-d) - 1]$
3		$f_1(z) = 0$ $f_2(z) = \frac{M\omega'}{GJ_d}[\operatorname{ch} k(z-c) - 1]$
4		$f(z) = \frac{-n\omega}{kGJ_d}(\operatorname{sh} kz - kz)$
5		$f(z) = \frac{-N\omega}{GJ_d}(\operatorname{ch} kz - 1)$
6		$f(z) = \frac{M\omega'}{GJ_d}(\operatorname{ch} kz - 1)$

где $\bar{\psi}(z-t)$ — результат подстановки в функцию $\psi(z)$ аргумента $(z-t)$ вместо z.

Функция $f(z)$ должна удовлетворять условиям (172), так как из этих условий подобраны постоянные общего интеграла. В качестве же функции $\bar{\psi}(z)$ возьмем одно из частных решений уравнения (64), составленного по типу (169), удовлетворяющее условиям

$$\bar{\psi}(0)=0;\quad \bar{\psi}'(0)=0;\quad \psi''(0)=0;\quad \psi'''(0)=1. \tag{187}$$

Применяя эти условия к любому из выражений (169), найдем значение $\bar{\psi}(z)$ и, подставив его в формулу (186), получим

$$f(z)=\frac{e}{k^3EJ_\omega}\int_0^z[\operatorname{sh}k(z-t)-k(z-t)]\,q(t)\,dt. \tag{188}$$

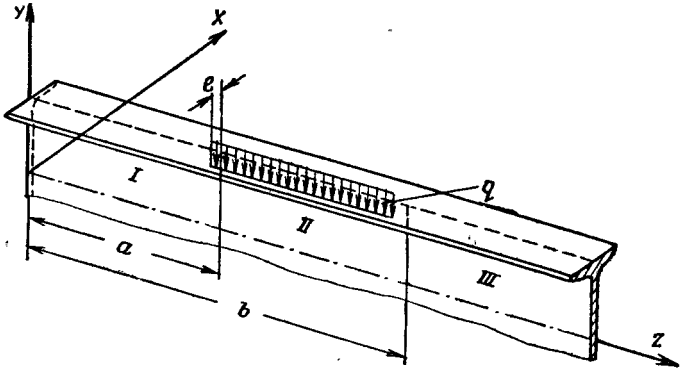


Рис. 114

Пользуясь общей формулой (188) частного интеграла $f(z)$, нетрудно найти его выражение для любых частных случаев загружения стержней.

Так, например, для загружения на рис. 114 будем иметь:

а) на участке I

$$f_1(z)=0,$$

так как всюду $q(t)=0$;

б) на участке II

$$f_2(z)=\frac{qe}{k^4EJ_\omega}\left[\operatorname{ch}k(z-a)-\frac{k^2(z-a)^2}{2}-1\right]; \tag{189}$$

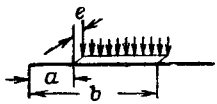
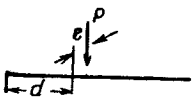
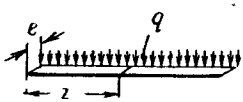
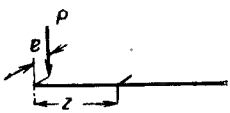
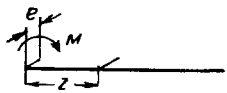
в) на участке III

$$f_3(z)=\frac{qe}{k^4EJ_\omega}\left[\operatorname{ch}k(z-a)-\operatorname{ch}k(z-b)-\frac{(z-a)^2-(z-b)^2}{2}k^2\right]. \tag{190}$$

Таблица 27

Общая формула частного интеграла

$$f(z)=\frac{e}{k^3EJ_\omega}\int_0^z [\operatorname{sh} k(z-t)-k(z-t)]\,q(t)\,dt$$

№ п/п	Схема нагрузки	Формулы частного интеграла $f(z)$ для различных видов загружения
1		$f_1(z)=0$ $f_2(z)=\frac{qe}{k^4EJ_\omega}\left[\operatorname{ch} k(z-a)-\frac{k^2(z-a)^2}{2}-1\right]$ $f_3(z)=\frac{qe}{k^4EJ_\omega}\left[\operatorname{ch} k(z-a)-\operatorname{ch} k(z-b)-\frac{(z-a)^2-(z-b)^2}{2}k^2\right]$
2		$f_1(z)=0$ $f_2(z)=\frac{Pe}{k^3EJ_\omega}[\operatorname{sh} k(z-d)-k(z-d)]$
3		$f_1(z)=0$ $f_2(z)=-\frac{Me}{k^2EJ_\omega}[\operatorname{ch} k(z-c)-1]$
4		$f(z)=\frac{qe}{k^4EJ_\omega}\left(\operatorname{ch} kz-\frac{k^2z^2}{2}-1\right)$
5		$f(z)=\frac{Pe}{k^3EJ_\omega}(\operatorname{sh} kz-kz)$
6		$f(z)=-\frac{Me}{k^2EJ_\omega}(\operatorname{ch} kz-1)$

Общие выражения частного интеграла $f(z)$ для основных, наиболее часто встречающихся в практике нагрузок представлены нами в форме табл. 27.

Следует иметь в виду, что в табл. 27 и во всех дальнейших таблицах и чертежах для наглядности действующая нагрузка изображена сзади стержня, т. е. таким образом, что если смотреть со стороны положительного направления оси Z, то она вращает стержень вокруг нее по часовой стрелке, все же формулы даны для случая расположения нагрузки впереди стержня.

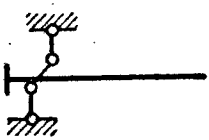


Рис. 115

В дальнейшем опоры, закрепляющие конец или промежуточное сечение тонкостенного стержня от закручивания ($\theta=0$), но не препятствующие свободной депланации соответствующего сечения стержня (мы будем их называть шарнирными относительно депланаций), будем условно обозначать, как показано на рис. 109, в виде двух перпендикулярно расположенных к оси стержня стерженьков, а опоры, закрепляющие конец стержня от закручивания и депланаций ($\theta=0$ и $\theta'=0$), — в виде двух таких же стерженьков и, кроме того, в виде дополнительной пластинки, прикрепленной к торцу стержня (рис. 115).

Уравнения упругой линии углов закручивания тонкостенных стержней при различных закручивающих нагрузках и различных опорных закреплениях представлены в форме таблицы приложения 7.

§ 22. ПРАВИЛА ЗНАКОВ ДЛЯ СИЛОВЫХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ ФАКТОРОВ

Внешний закручивающий момент M будем считать положительным, если для наблюдателя, смотрящего со стороны положительной оси z, он закручивает стержень против движения часовой стрелки (рис. 100), и отрицательным в противном случае.

Внешний бимомент B будем считать положительным, если, как уже было установлено выше, для наблюдателя, смотрящего вдоль плеча бипары, изображающей этот бимомент, ближайшая к нему пара действует по часовой стрелке (рис. 102), и отрицательным в противном случае.

За положительный угол закручивания θ будем принимать поворот сечения стержня вокруг центра изгиба против движения часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной оси z.

Депланацию θ' будем считать положительной, если она соответствует положительному приращению угла закручивания θ. И, наконец, изгибно-крутящие бимоменты B_ω, возникающие в тонкостенном стержне, находящемся в условиях стесненного кручения, будем изображать также в виде бипар, при этом за положительный будем принимать бимомент, который соответствует отри-

цательному приращению депланаций θ', так как по формуле (155) $B_\omega = -EJ_\omega \theta''$.

Принятое правило знаков иллюстрировано на рис. 116, где изображена двутавровая балка, защемленная на обоих концах от закручивания и депланаций и нагруженная по середине пролета закручивающим моментом M (опоры для ясности на этой фигуре не изображены).

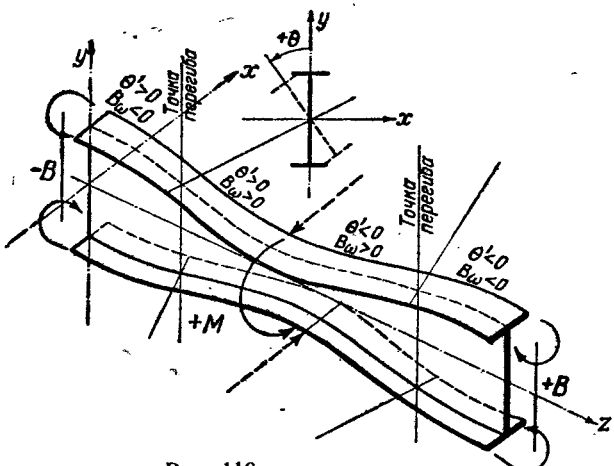


Рис. 116

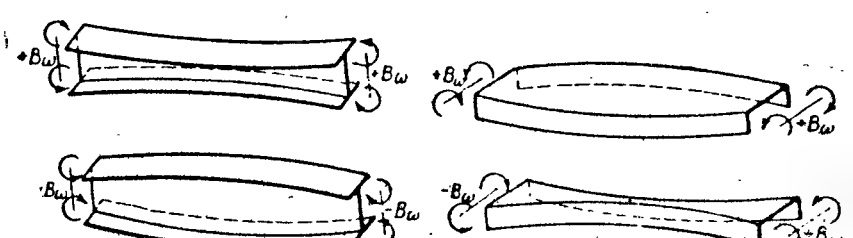


Рис. 117

Для двутавра и других двухполочных профилей принятое правило знаков легко запомнить, если представить себе верхнюю и нижнюю полки балки находящимися в условиях простого поперечного изгиба. При таком представлении правило знаков для внешних бимоментов, депланаций и изгибно-крутящих бимоментов легко увязать с привычным для расчетчика правилом знаков для внешних моментов, углов поворота и изгибающих моментов в одной, например, верхней полке балки.

Из рис. 116 видно, что если смотреть на двухполочный профиль со стороны одной из его полок, то при принятом нами правиле знаков депланация будет положительной, если ближайшая к на-

блюдателю полка профиля поворачивается относительно задней полки по часовой стрелке.

Что же касается изгибно-крутящих бимоментов, то из этой же фигуры видно, что для вертикально расположенных двухполочных профилей положительный изгибно-крутящий бимомент выгибает верхнюю полку балки выпуклостью, а нижнюю — вогнутостью к наблюдателю, смотрящему так, что положительная ось балки z направлена для него слева направо.

Для горизонтально расположенных двухполочных профилей положительный изгибно-крутящий бимомент выгибает ближайшую к наблюдателю полку выпуклостью вниз, а заднюю — выпуклостью вверх.

Указанные правила знаков для изгибно-крутящих бимоментов отдельно изображены на рис. 117.

§ 23. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ. ТАБЛИЦА БИМОМЕНТОВ И ОБЩИХ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

1. Рассмотрим тонкостенный стержень (или часть тонкостенного стержня) длиной l, по концам которого действуют изгибно-крутящие положительные бимоменты B_A и B_B (рис. 118, *а*).

Дифференциальное уравнение бимоментов по длине этого стержня нетрудно получить из дифференциального уравнения (166) упругой линии углов закручивания, если подставить в это уравнение значения θ^{IV} и θ^{II} из формулы (156) и положить в нем $m(z) = b'(z) = 0$.

После указанной подстановки получим

$$B''_\omega - k^2 B_\omega = 0. \tag{191}$$

Общий интеграл уравнения (191) можно написать так:

$$B_\omega = C_1 \operatorname{sh} kz + C_2 \operatorname{ch} kz. \tag{192}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из условий:

$$\text{при } z = 0 \;\; B_\omega = B_A$$

$$\text{и при } z = l \;\; B_\omega = B_B.$$

Подставив их в выражение (192), получим

$$C_2 = B_A \text{ и } C_1 = \frac{B_B - B_A \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl}.$$

После подстановки полученных значений C_1 и C_2 в уравнение (192) будем иметь

$$B_\omega = B_A \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} + B_B \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}. \tag{193}$$

Уравнение (193) показывает, что если рассматриваемый тонкостенный стержень (или отдельный участок стержня) загружен

только по концам бимоментами B_A и B_B, то последние по длине этого стержня затухают по закону $\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}$, где l — длина стержня, а z — координата, отсчитываемая от конца стержня, противоположного рассматриваемому концевому бимоменту.

В пределе при $k=0$ (для идеально тонкостенного стержня) закон затухания изгибно-крутящих бимоментов, так же как и для соответствующих изгибающих моментов, будет линейный, так как

$$\lim_{k\to 0}\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}=\lim_{k\to 0}\frac{z\operatorname{ch} kz}{l\operatorname{ch} kl}=\frac{z}{l}.$$

В практических же случаях при $k\neq 0$ эпюра бимоментов, определяемая формулой (193), имеет криволинейный вид (рис. 118, *б*).

Для упрощения пользования формулой (193) при построении эпюр бимоментов нами составлена табл. 28 численных значений коэффициентов этой формулы для пяти точек рассматриваемого участка стержня (двух крайних и трех в четвертях участка) при значениях kl от 0 до 15.

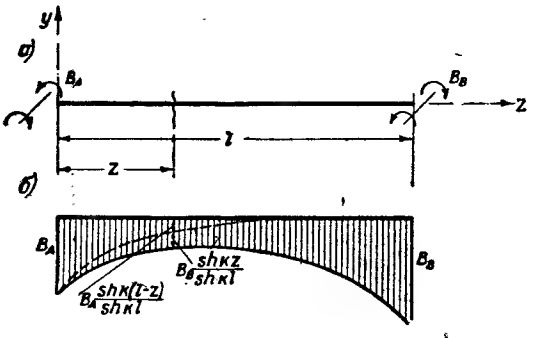


Рис. 118

При помощи этой таблицы в качестве примера на рис. 119 нами построены эпюры затухания по длине стержня бимомента $B=1$ для различных значений $kl=0$, 1,25, 2,5, 5, 7,5 и 10.

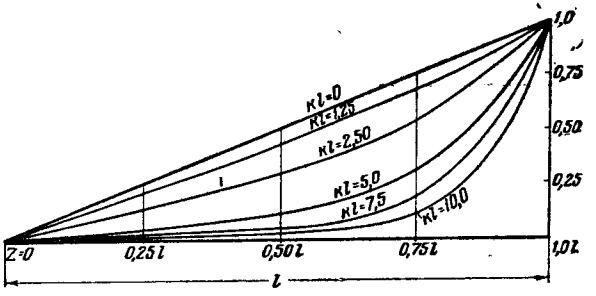


Рис. 119

Из рисунка видно, что при $kl=0$ эпюра бимоментов имеет вид прямой линии, а по мере увеличения kl распределение бимомента по длине стержня становится все более затухающим и при $kl=10$ бимомент на ближайшей четверти участка составляет 8,2%, а по

Таблица 28

Численные значения коэффициентов $\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}$

kl \ z	0,000	0,25 l	0,50 l	0,75 l	1,00 l
0,0	0,000	0,250	0,500	0,750	1,000
0,1	0,000	0,250	0,499	0,749	1,000
0,2	0,000	0,248	0,497	0,748	1,000
0,3	0,000	0,246	0,494	0,745	1,000
0,4	0,000	0,244	0,490	0,741	1,000
0,5	0,000	0,240	0,485	0,737	1,000
0,6	0,000	0,236	0,478	0,731	1,000
0,7	0,000	0,232	0,471	0,724	1,000
0,8	0,000	0,227	0,462	0,717	1,000
0,9	0,000	0,221	0,453	0,709	1,000
1,0	0,000	0,215	0,443	0,700	1,000
1,2	0,000	0,202	0,422	0,680	1,000
1,4	0,000	0,188	0,398	0,658	1,000
1,6	0,000	0,173	0,374	0,635	1,000
1,8	0,000	0,158	0,349	0,611	1,000
2,0	0,000	0,144	0,324	0,587	1,000
2,5	0,000	0,110	0,265	0,526	1,000
3,0	0,000	0,0808	0,212	0,468	1,000
3,5	0,000	0,0599	0,169	0,415	1,000
4,0	0,000	0,0431	0,133	0,367	1,000
5,0	0,000	0,0209	0,0815	0,286	1,000
6,0	0,000	0,0106	0,0497	0,223	1,000
7,0	0,000	0,00495	0,0302	0,174	1,000
8,0	0,000	0,00243	0,0183	0,135	1,000
9,0	0,000	0,00116	0,0111	0,105	1,000
10,0	0,000	0,000549	0,00674	0,0821	1,000
11,0	0,000	0,000260	0,00409	0,0639	1,000
12,0	0,010	0,000123	0,00248	0,0498	1,000
13,0	0,000	0,0000583	0,00150	0,0388	1,000
14,0	0,000	0,0000275	0,000912	0,0302	1,000
15,0	0,000	0,0000130	0,000553	0,0235	1,000

середине пролета — только 0,67% от величины действующего на стержень бимомента, что при практических расчетах не следует забывать.

В большинстве случаев при изменении величины kl меняется не только степень затухания рассматриваемого бимомента, но и величина его, так как изгибно-крутящие бимоменты в опорных или промежуточных характерных сечениях стержня являются, как правило, функциями величины kl.

Так, например, для стержня длиной $2l$, шарнирно опертого по концам и нагруженного по середине пролета закручивающим моментом M (рис. 120, *а*), максимальный изгибно-крутящий бимомент по середине пролета будет равен [см. уравнение (16), приложения 7]

$$B_{max} = -EJ_{\omega}\,\theta''(l) = \frac{M}{2k}\,\frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl} = \frac{Ml}{2}\,\frac{\operatorname{th} kl}{kl},$$

или

$$B_{max} = \frac{Ml}{2}\,b, \tag{194}$$

где через b мы обозначили отвлеченный коэффициент, равный

$$b = \frac{\operatorname{th} kl}{kl}. \tag{195}$$

Численные значения этого коэффициента в зависимости от величины kl — см. в приложении 11.

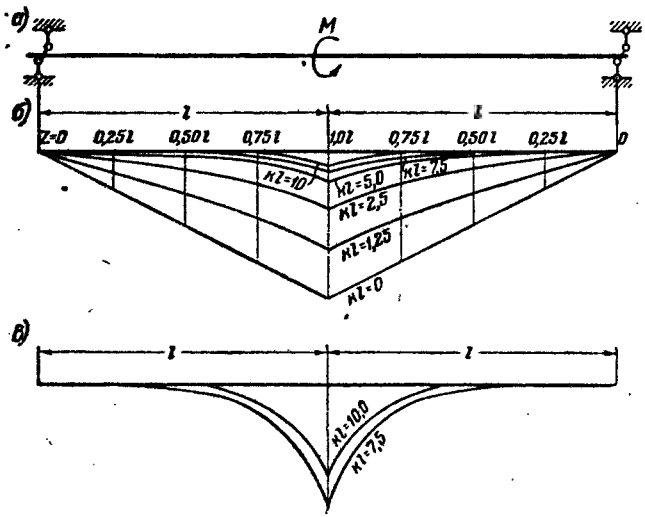


Рис. 120

При помощи этой таблицы и приложения 7 на рис. 120, *б* построена соответствующая эпюра бимоментов для различных значений $kl=0$, 1,25, 2,5, 5, 7,5 и 10.

Для большей ясности чертежа эпюры B при $kl=7{,}5$ и 10 изображены в увеличенном масштабе еще раз на рис. 120, *в*.

Не следует забывать, что на этих фигурах в качестве l следует принимать длину полупролета балки.

Из рис. 120 видно, что при значениях $kl=0$ бимоменты по длине стержня меняются по закону прямой линии и эпюра имеет вид равнобедренного треугольника. По мере увеличения kl величина максимального бимомента уменьшается, бимомент по длине стержня становится все более затухающим и распространяется лишь на небольшой участок по длине стержня от места приложения нагрузки.

2. Рассмотрим теперь тонкостенный стержень (или часть стержня), по концам которого бимоменты равны нулю, а по всей длине стержень нагружен равномерно распределенными закручивающими моментами интенсивности m.

Для простоты вычисления ординат эпюры бимоментов длину стержня примем равной $2l$, а начало отсчета координат — по середине пролета.

Тогда уравнение бимоментов будет иметь следующий вид:

$$B_\omega = ml^2 \frac{\operatorname{ch} kl - \operatorname{ch} kz}{k^2 l^2 \operatorname{ch} kl}. \tag{196}$$

Уравнение (196) получено из уравнения (14) приложения 7, в котором принято вместо $\frac{l}{2}$ значение l, а вместо z — значение $z+l$.

Максимальный бимомент по середине пролета (при $z=0$) будет равен

$$B_{\max} = ml^2 \frac{\operatorname{ch} kl - 1}{k^2 l^2 \operatorname{ch} kl}.$$

Подставив это выражение в формулу (196), получим

$$B_\omega = B_{\max} \frac{\operatorname{ch} kl - \operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} kl - 1}. \tag{197}$$

Коэффициент формулы (197) в пределе при $kl \to 0$ будет равен

$$\lim_{k\to 0} \frac{\operatorname{ch} kl - \operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} kl - 1} = \lim_{k\to 0} \frac{l \operatorname{sh} kl - z \operatorname{sh} kz}{l \operatorname{sh} kl} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{l^2 \operatorname{ch} kl - z^2 \operatorname{ch} kz}{l^2 \operatorname{ch} kl} = 1 - \frac{z^2}{l^2}.$$

Подставив это выражение в формулу (197), получим, что в пределе при $kl \to 0$ уравнение бимоментов будет выражаться квадратной параболой, т. е. иметь такой же вид, как и уравнение изгибающих моментов от равномерно распределенной по всему пролету нагрузки.

Для облегчения пользования формулой (197) при построении эпюр бимоментов нами составлена табл. 29 численных значений коэффициента этой формулы так же, как и предыдущая таблица для различных значений z и kl.

При помощи этой таблицы, а также приложения 8 для определения значений $B_{\max}$, входящих в формулу (197), о которой будет сказано ниже, на рис. 121, *а* построены соответствующие эпюры бимоментов для различных значений $kl=0$, 1,25, 2,5, 5, 7,5 и 10, при этом, как и в предыдущем случае, через l здесь обозначен полупролет балки. Для большей ясности чертежа эпюры B при $kl=7{,}5$ и 10 изображены в увеличенном масштабе на рис. 121,*б*.

Из рисунка видно, что по мере увеличения kl максимальный бимомент уменьшается, а распределение его по длине стержня

Таблица 29

Численные значения коэффициентов $\frac{\operatorname{ch} kl - \operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} kl - 1}$

l \ z	0,00	0,25 l	0,50 l	0,75 l	1,00 l
0,0	1,000	0,938	0,750	0,438	0,000
0,1	1,000	0,938	0,750	0,438	0,000
0,2	1,000	0,938	0,751	0,438	0,000
0,3	1,000	0,938	0,751	0,439	0,000
0,4	1,000	0,938	0,752	0,441	0,000
0,5	1,000	0,938	0,754	0,442	0,000
0,6	1,000	0,939	0,755	0,445	0,000
0,7	1,000	0,939	0,757	0,447	0,000
0,8	1,000	0,940	0,760	0,450	0,000
0,9	1,000	0,941	0,762	0,454	0,000
1,0	1,000	0,942	0,765	0,457	0,000
1,2	1,000	0,944	0,771	0,466	0,000
1,4	1,000	0,946	0,778	0,475	0,000
1,6	1,000	0,948	0,786	0,486	0,000
1,8	1,000	0,951	0,794	0,498	0,000
2,0	1,000	0,954	0,803	0,510	0,000
2,5	1,000	0,960	0,827	0,545	0,000
3,0	1,000	0,967	0,851	0,581	0,000
3,5	1,000	0,974	0,874	0,619	0,000
4,0	1,000	0,979	0,895	0,655	0,000
5,0	1,000	0,988	0,930	0,723	0,000
6,0	1,000	0,993	0,955	0,781	0,000
7,0	1,000	0,996	0,971	0,828	0,000
8,0	1,000	0,998	0,982	0,865	0,000
9,0	1,000	0,999	0,989	0,894	0,000
10,0	1,000	0,999	0,993	0,918	0,000
11,0	1,000	1,000	0,996	0,936	0,000
12,0	1,000	1,000	0,997	0,950	0,000
13,0	1,000	1,000	0,998	0,961	0,000
14,0	1,000	1,000	0,999	0,970	0,000
15,0	1,000	1,000	0,999	0,976	0,000

становится все более равномерным и эпюра бимоментов приближается к форме прямоугольника.

При $kl=0$, как было сказано выше, рассматриваемая эпюра является квадратной параболой.

Это показывает, что в эксцентрично загруженных балках влияние кручения на расчетные напряжения по мере увеличения величины kl уменьшается. К этому же выводу мы пришли и ниже в § 35 при исследовании влияния эксцентричности приложения нагрузки на расчетные нормальные напряжения в двутавровых балках.

Если рассматриваемый участок или весь тонкостенный стержень загружен по концам бимоментами, а в пролете — равномерно распределенными по длине его закручивающими моментами, то эпюру бимоментов можно строить путем наложения, рассматривая

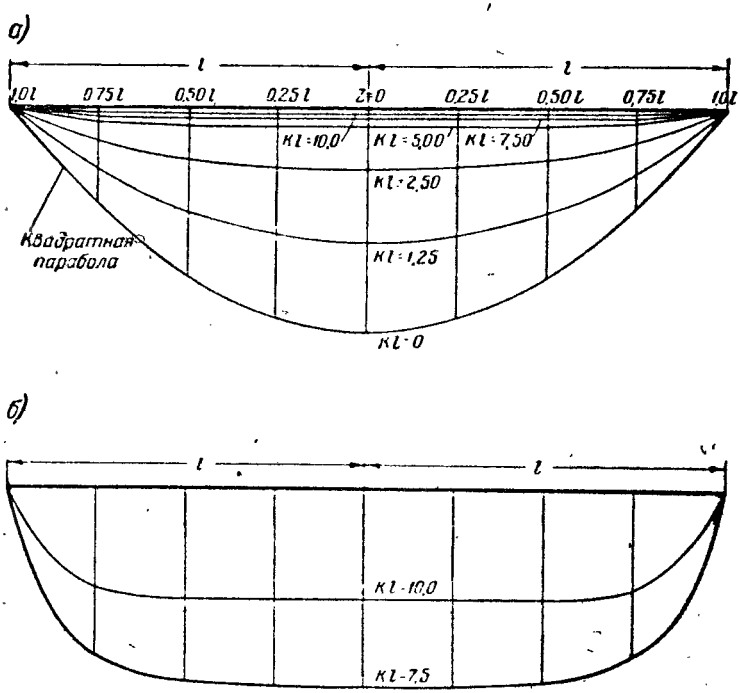


Рис. 121

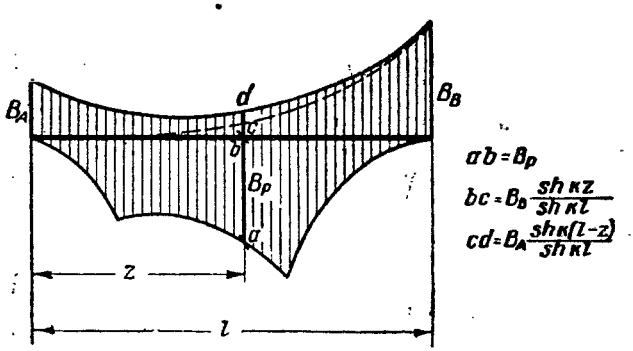


Рис. 122

влияние каждой нагрузки в отдельности и используя указания настоящего параграфа и данные табл. 28 и 29.

3. Аналитическое выражение для изгибно-крутящего бимомента в произвольном сечении тонкостенного стержня, нагруженного произвольной закручивающей нагрузкой в пролете и положительными бимоментами B_A и B_B по концам, имеет следующий вид (рис. 122):

$$B_z = B_A \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} + B_B \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl} + B_p. \tag{198}$$

Формула (198) справедлива при любых значениях B_A, B_B и B_P.

Значения бимомента от пролетной нагрузки B_P можно определить по формулам приложения 8.

4. Для составления аналитической формулы общего крутящего момента L рассмотрим отдельно действие на стержень концевых бимоментов и пролетной закручивающей нагрузки.

Воспользовавшись формулой (55) и (155) и формулами (19) и (20) приложения 7 и имея в виду, что $GJ_d = k^2 EJ_\omega$, получим:

$$-EJ_\omega \theta''' + GJ_d \theta' = EJ_\omega (k^2 \theta' - \theta''') = EJ_\omega \left[\frac{B_A k}{EJ_\omega} \left(\frac{\operatorname{ch} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} - \frac{1}{kl} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{B_B k}{EJ_\omega} \left(\frac{1}{kl} - \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kl} \right) - \frac{B_A k}{EJ_\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} + \frac{B_B k}{EJ_\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kl} \right].$$

(Знаки при подстановке θ' и θ''' в это выражение для B_A и B_B приняты в соответствии с установленным выше правилом знаков для изгибно-крутящих бимоментов).

После приведения подобных членов получим, что рассматриваемое выражение равно

$$\frac{B_B - B_A}{l}.$$

Обозначив значение общего крутящего момента только от пролетной нагрузки через L_p, получим

$$L = L_p + \frac{B_B - B_A}{l} - n(z)\,\omega, \tag{199}$$

а при отсутствии продольных сил

$$L = L_p + \frac{B_B - B_A}{l}. \tag{200}$$

Значения L_p, входящие в формулы (199) и (200), можно брать из приложения 8.

Так, например, для случая загружения шарнирно опертого по концам стержня равномерно распределенными по всей длине его

закручивающими моментами интенсивности m (рис. 123, *а*) будем иметь

$$L_p = -EJ_\omega \theta''' + GJ_d \theta' = EJ_\omega (k^2 \theta' - \theta''') =$$

$$= \frac{m}{k}\left[k\left(\frac{l}{2} - z\right) - \frac{\operatorname{sh} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right] + \frac{m}{k} \cdot \frac{\operatorname{sh} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$$

или

$$L_p = m\left(\frac{l}{2} - z\right). \qquad (201)$$

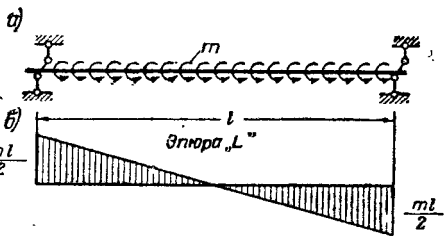


Рис. 123

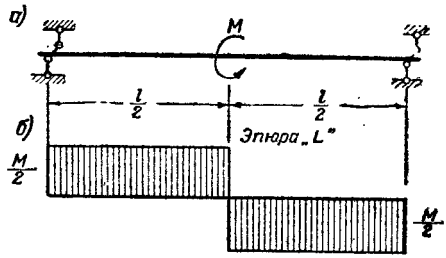


Рис. 124

Формула (201) показывает, что общие крутящие моменты от рассматриваемой нагрузки по длине пролета изменяются по закону прямой линии, так же как и поперечные силы Q_y от соответствующей нагрузки при изгибе (рис. 123, *б*).

Для случая загружения стержня закручивающим моментом M, приложенным по середине пролета (рис. 124, *а*):

$$L_{p(1)} = EJ_\omega (k^2 \theta' - \theta''') = \frac{M}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right) + \frac{M}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$$

или

$$L_{p(1)} = \frac{M}{2}. \qquad (202)$$

Аналогично получим во втором участке

$$L_{p(2)} = -\frac{M}{2}. \qquad (203)$$

Соответствующая эпюра L, напоминающая эпюру Q_y при изгибе, изображена на рис. 124, *б*.

Таким образом, эпюру общих крутящих моментов L при стесненном кручении можно строить так же, как и эпюру поперечных сил Q при изгибе стержня

от действия на него опорных изгибающих моментов и соответствующей пролетной нагрузки.

Относительно этого правила следует сделать лишь одно замечание.

При вычислении величины L_p от поворота какой-нибудь из опор стержня на угол закручивания, равный θ, в формулах (199) или (200) необходимо учесть влияние этого угла на величину L путем добавления члена

$$L_\theta = M_\theta^{кр} = GJ_d\theta' = k' EJ_\omega \frac{\theta}{l}. \tag{204}$$

5. Выше мы уже несколько раз делали ссылки на таблицу приложения 8. В этой таблице, кроме уравнений изгибно-крутящих бимоментов B_ω и общих крутящих моментов L, представлен общий вид эпюр указанных силовых факторов и даны формулы максимальных значений их.

Отвлеченные коэффициенты, входящие в последние, выражаемые гиперболическими функциями, для простоты записей и дальнейших выкладок мы представили в виде буквенных выражений, формулы которых приведены в приложении 10. Численные значения этих и других встречающихся далее подобных коэффициентов даны в приложении 11. Кроме того, в приложении 10 приведены установленные нами некоторые зависимости между указанными коэффициентами, пользование которыми чрезвычайно облегчает вывод формул для расчета балок и рам на кручение.

ГЛАВА VI

НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЯХ ПРИ СТЕСНЕННОМ КРУЧЕНИИ И ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

§ 24. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

В п. 5 § 7 мы установили, что секториальные нормальные напряжения, возникающие в тонкостенном стержне при стесненном кручении, определяются по формуле

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega \omega}{J_\omega}, \tag{205}$$

где B_ω — изгибно-крутящий бимомент в том сечении стержня, в котором определяются нормальные напряжения;

ω — секториальная координата точки, в которой определяются напряжения;

J_ω — секториальный момент инерции сечения стержня.

Формула (205) показывает, что секториальные нормальные напряжения распределяются по сечению по закону секториальных площадей, определяемому главной эпюрой секториальных координат, т. е. эпюрой, построенной на контуре сечения с полюсом в центре изгиба.

Так, например, для двутаврового профиля она представлена на рис. 65, *б*, а для швеллера на рис. 66, *б*.

Из этих эпюр видно, что при положительном изгибно-крутящем бимоменте B_ω волокна справа для двутавра от стенки, а для швеллера от вертикальной линии, соединяющей нулевые точки эпюры, в верхней полке будут сжаты, а в нижней — растянуты, слева — наоборот.

Поэтому сечение стержня, вообще говоря, не остается плоским, а примет вид, представленный на рис. 5, *а*, для швеллера — на рис. 31, *б*.

Нормальные напряжения в крайних точках сечения можно определить по формуле

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{W_\omega}, \tag{206}$$

где W_ω — секториальный момент сопротивления, определяемый формулой (27).

В самом общем случае действия сил на тонкостенный стержень формула для определения нормальных напряжений имеет вид

$$\sigma_\omega = -\frac{N}{F} - \frac{M_y x}{J_y} + \frac{M_x y}{J_x} + \frac{B_\omega \omega}{J_\omega}, \tag{207}$$

где изгибно-крутящий бимомент B_ω является функцией как поперечных, так и продольных сил, действующих на тонкостенный стержень.

§ 25. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

В п. 2 § 7 мы установили, что в каждом сечении тонкостенного стержня при стесненном кручении возникают два рода касательных напряжений: секториальные касательные напряжения τ_ω и касательные напряжения при чистом кручении, которые в дальнейшем будем обозначать через τ_{kp}.

Первые определяются формулой (58)

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^{\text{отс}}}{J_\omega \delta}, \tag{208}$$

а вторые — формулой (6)

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}} \delta}{J_d}, \tag{209}$$

где M_ω — изгибно-крутящий момент в том сечении, в котором определяются касательные напряжения;

$S_\omega^{отс}$ — секториальный статический момент отсеченной части сечения, определяемый формулой (21);

J_ω — секториальный момент инерции всего сечения;

δ — толщина сечения в том месте, где определяются напряжения;

M_{kp} — крутящий момент при чистом кручении;

J_d — момент инерции сечения при чистом кручении.

При постоянной толщине стенок элементов профиля эпюра распределения секториальных касательных напряжений по сечению будет, очевидно, пропорциональна соответствующей эпюре секториальных статических моментов отсеченной части сечения ($S_\omega^{отс}$).

Построим эти эпюры для двутаврового и швеллерного профилей (рис. 125 и 126). Ординаты этих эпюр определяются как площадь соответствующей части эпюры главных секториальных координат, считая от крайних точек сечения.

Так, например, для двутавра, представленного на рис. 65, в точке верхней полки на расстоянии x слева от стенки секториальный статический момент $S_\omega^{отс}$ будет равен

$$S_\omega^{отс} = \int\limits_{F_{отс}} \omega dF = \int\limits_{b/2}^{x} -\frac{hx}{2}\delta dx = -\frac{h}{2}\delta \left|\frac{x^2}{2}\right|_{b/2}^{x} = -\frac{h\delta}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{b^2}{8}\right);$$

уравнение квадратной параболы:

$$\text{при } x = \frac{b}{2};\ S_\omega^{отс} = 0,$$

$$\text{„ } x = 0;\ S_\omega^{отс} = \frac{hb^2\delta}{16}.$$

Стрелками на рис. 125 и 126 показаны направления секториальных касательных напряжений τ_ω при положительном (против часовой стрелки) закручивании стержня.

Касательные напряжения в общем случае действия сил на тонкостенный стержень определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{отс}}{J_x \delta} + \frac{Q_x S_y^{отс}}{J_y \delta} + \frac{M_\omega S_\omega^{отс}}{J_\omega \delta}, \qquad (210)$$

где Q_y и Q_x — компоненты поперечной силы по главным осям координат:

$S_x^{отс}$ и $S_y^{отс}$ — статические моменты отсеченной части сечения относительно главных осей координат;

J_x и J_y — моменты инерции относительно тех же осей.

Значения M_ω, $S_\omega^{отс}$ и J_ω даны после формулы (209);

δ — толщина сечения в месте определения напряжений, измеряемая перпендикулярно к контуру сечения.

Кроме того, к касательным напряжениям, определяемым по формуле (210), добавляются еще касательные напряжения от чистого кручения, вычисляемые по формуле (209).

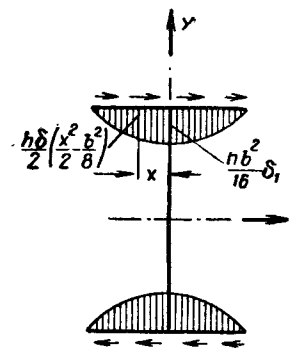


Рис. 125

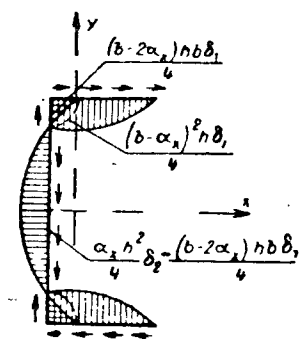


Рис. 126

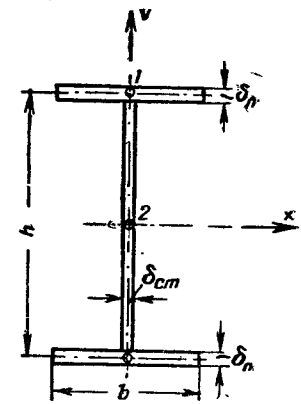


Рис. 127

§ 26. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДВУТАВРОВЫХ БАЛКАХ, НАХОДЯЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ СОВМЕСТНОГО ДЕЙСТВИЯ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Рассматривая эпюры касательных напряжений при изгибе двутавровой балки, мы наблюдаем, что максимальные касательные напряжения возникают посредине стенки. При совместном действии изгиба и кручения в наружных точках посредине стенки к напряжениям от изгиба добавляются максимальные касательные напряжения $\tau_{кр}$, соответствующие чистому кручению; что же касается секториальных касательных напряжений τ_ω, то в этом месте сечения, как видно из эпюры на рис. 125, они равны нулю.

Другой опасной точкой двутаврового сечения может оказаться середина полки, в наружных краях которой при совместном действии изгиба и кручения имеют место все три рода касательных напряжений τ_x, τ_ω и $\tau_{кр}$.

Заметив это, рассмотрим двутавр, изображенный на рис. 127, и исследуем, как велика разница между величинами этих компонентов касательных напряжений и нельзя ли каким-нибудь из них по сравнению с другим пренебречь.

В точке *1* рассматриваемого профиля секториальные касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau_{1\omega} = \frac{M_\omega S_{1\omega}^{отс}}{J_\omega \delta_n} = \frac{M_\omega \frac{hb^2}{16}\delta_n}{J_y \cdot \frac{h^2}{4}\delta_n}$$

или

$$\tau_{1\omega} = \frac{M_\omega}{J_y} \cdot \frac{b^2}{4h}. \tag{211}$$

Касательные напряжения, соответствующие чистому кручению:

$$\tau_{1кр} = \frac{M_{кр}\,\delta_n}{J_d}. \tag{212}$$

Для сравнения $\tau_{1\omega}$ и $\tau_{1кр}$ разделим первое на второе

$$\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}} = 0{,}25\frac{M_\omega}{M_{кр}} \cdot \frac{J_d}{J_y} \cdot \frac{b^2}{h\delta_n}. \tag{213}$$

Для того чтобы получить численное значение величины отношения, выражаемого формулой (213), рассмотрим балку пролетом l, свободно опертую, но закрепленную от углов закручивания на опорах и нагруженную поперечной, эксцентрично приложенной, равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой.

Максимальные значения изгибно-крутящего момента M_ω и крутящего момента $M_{кр}$ для рассматриваемой балки и нагрузки будут на опорах и определяются по формулам

$$M_\omega = qel\frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = \alpha\, qel, \tag{214}$$

где

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}. \tag{215}$$

$$M_{кр} = qel\left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right) = qel\,(0{,}5 - \alpha), \tag{216}$$

которые нетрудно получить из соответствующих формул приложения 7, тогда

$$\frac{M_\omega}{M_{кр}} = \frac{\alpha}{0{,}5-\alpha} \tag{217}$$

и формула (213) примет вид

$$\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}} = \frac{0{,}25\,\alpha}{0{,}5-\alpha} \cdot \frac{J_d}{J_y} \cdot \frac{b^2}{h\delta_n}. \tag{218}$$

Для прокатного двутавра № 30а пролетом $l=6$ *м*:

$$kl = 0{,}01389 \cdot 600 = 8{,}334;$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = \frac{32{,}25}{8{,}334 \cdot 32{,}27} = 0{,}12;$$

$$\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}12}{0{,}5 - 0{,}12} \cdot \frac{38{,}83}{400} \cdot \frac{12{,}6^2}{30 \cdot 1{,}44} = 0{,}0282.$$

Для прокатного двутавра № 60 с пролетом $l=8$ *м*;

$$kl = 0{,}008226 \cdot 800 = 6{,}58;$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = \frac{13{,}403}{6{,}58 \cdot 13{,}44} = 0{,}152;$$

$$\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}152}{0{,}5 - 0{,}152} \cdot \frac{255{,}3}{1\,840} \cdot \frac{18^2}{60 \cdot 2{,}2} = 0{,}0372.$$

Для двутавра, сваренного из трех листов (рис. 127):

$$J_d = \sum \frac{b\delta^3}{3} = \frac{1}{3}\left(2b\delta_п^3 + h\delta_{ст}^3\right);$$

$$J_y = \frac{\delta_п b^3}{6};$$

$$J_\omega = J_y \frac{h^2}{4} = \frac{\delta_п b^3 h^2}{24};$$

$$kl = l\sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}} = l\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 10^6}{2{,}1 \cdot 10^6} \cdot \frac{8\left(2b\delta_п^3 + h\delta_{ст}^3\right)}{\delta_п b^3 h^2}}$$

или

$$kl = 1{,}75 \frac{l}{h} \cdot \frac{\delta_{ст}}{h} \cdot \frac{h}{b}\sqrt{2\frac{\delta_п^2}{\delta_{ст}^2} + \frac{h\delta_{ст}}{b\delta_п}}. \qquad (219)$$

Пусть

$$\frac{\delta_п}{\delta_{ст}} = 2;\ \frac{h}{b} = 5;\ \frac{l}{h} = 10 \text{ и } \frac{\delta_{ст}}{h} = 0{,}01.$$

При этих данных получим

$$kl = 1{,}75 \cdot 10 \cdot 0{,}01 \cdot 5\sqrt{2{,}2^2 + 5 \cdot 0{,}5} = 2{,}84;$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = \frac{1{,}948}{2{,}84 \cdot 2{,}189} = 0{,}313;$$

$$\frac{J_d}{J_y} = 4\frac{\delta_п^2}{b^2} + 2\frac{h}{\delta_п}\cdot\frac{\delta_{ст}^3}{b^3} = 4\cdot 0{,}1^2 + 2\cdot 50\cdot 0{,}05^3 = 0{,}0525;$$

$$\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}313}{0{,}5-0{,}313}\,0{,}0525\cdot 0{,}2\cdot 10 = 0{,}0439.$$

Таким образом, посредине полок рассмотренных двутавровых балок, находящихся в условиях стесненного кручения, секториальные касательные напряжения $\tau_{1\omega}$ составляют только 2—5% от касательных напряжений $\tau_{1кр}$, соответствующих чистому кручению.

Аналогичные исследования, проведенные нами для двутавровых балок с другими условиями опирания и загружения, показали, что отношение $\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}}$ в опасных сечениях находится в пределах 10%.

Посредине же стенки (в точке 2 на рис. 127) секториальные касательные напряжения, как было сказано выше, равны нулю.

Следовательно, при расчете двутавровых балок следует иметь в виду, что секториальные касательные напряжения не являются решающими и во многих случаях их, вообще говоря, можно во внимание не принимать.

Что же касается соотношения между компонентами касательных напряжений от изгиба и чистого кручения $\frac{\tau_{1x}}{\tau_{1кр}}$, то исследования показали, что при практических эксцентрицитетах приложения поперечной нагрузки они получаются примерно одного порядка.

§ 27. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Пример 20. Определить нормальные и касательные напряжения от изгиба и от кручения в средней главной балке междуэтажного перекрытия складочного помещения при одностороннем загружении ее временной нагрузкой.

План перекрытия и схема загружения даны на рис. 128, сечение балки указано на рис. 129.

Постоянная нагрузка $g = 400$ *кг/м*². Временная нагрузка $p = 1600$ *кг/м*². Опорные давления от вспомогательных балок

$$P_1 = \frac{gbB}{2} = \frac{0{,}4\cdot 3\cdot 6}{2} = 3{,}6\ m;$$

$$P_2 = \frac{(g+p)\,bB}{2} = \frac{2{,}0\cdot 3{,}6}{2} = 18\ m.$$

Равнодействующая

$$R = P_1 + P_2 = 3{,}6 + 18 = 21{,}6\ m.$$

Эксцентрицитет точки ее приложения

$$e = \frac{5,5\,(18-3,6)}{18+3,6} = 3,67\ см \text{ (рис. 130).}$$

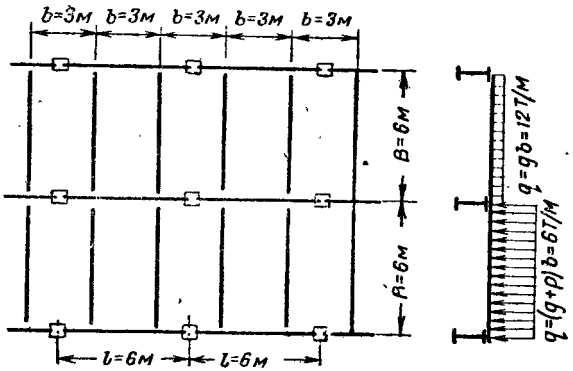


Рис. 128

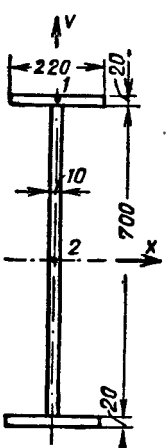


Рис. 129

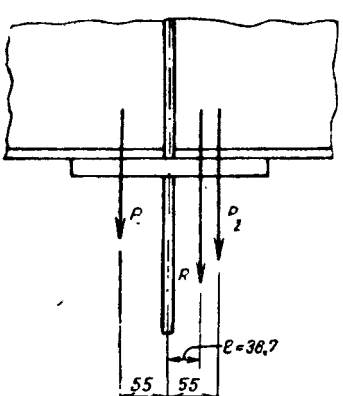


Рис. 130

Максимальный изгибающий момент

$$M_x = \frac{Rl}{4} = 21,6 \cdot 1,5 = 32,4\ тм.$$

Момент инерции балки

$$J_x = 14,27 \cdot 10^4\ см^4.$$

Момент сопротивления

$$W_x = 3\,856\ см^3.$$

Нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x} = \frac{3\,240\,000}{3\,856} = 840\ кг/см^2.$$

Поперечная сила $Q = R = 21{,}6\ т$.

Статические моменты отсеченной части сечения

$$S_{1x}^{отс} = 11 \cdot 2 \cdot 36 = 792\ см^3;$$

$$S_{2x}^{отс} = 22 \cdot 2 \cdot 36 + 1\,\frac{35^2}{2} = 1584 + 612{,}5 = 2\,196{,}5\ см^3.$$

Касательные напряжения при изгибе

$$\tau_{1x} = \frac{QS_{1x}^{отс}}{J_x\,\delta_п} = \frac{21\,600 \cdot 792}{14{,}27 \cdot 10^4 \cdot 2} = 60\ кг/см^2;$$

$$\tau_{2x} = \frac{QS_{2x}^{отс}}{J_x\,\delta_{ст}} = \frac{21\,600 \cdot 2\,196{,}5}{14{,}27 \cdot 10^4 \cdot 1} = 332\ кг/см^2.$$

Максимальный изгибно-крутящий бимомент B_ω

$$B_\omega = 8{,}048 \cdot 10^6\ кгсм^2.$$

Секториальный момент инерции J_ω по формуле (2) приложения 5

$$J_\omega = \frac{J_y h^2}{4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 22^3 \cdot 72^2}{12 \cdot 4} = 4{,}6 \cdot 10^6\ см^6.$$

Секториальная координата наиболее удаленной точки сечения (приложение 6)

$$\omega_{max} = \frac{bh}{4} = \frac{22 \cdot 72}{4} = 396\ см^2.$$

Секториальный момент сопротивления

$$W_\omega = \frac{J_\omega}{\omega_{max}} = \frac{4{,}6 \cdot 10^6}{396} = 11\,616\ см^4.$$

Нормальные напряжения от кручения

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{W_\omega} = \frac{8{,}048 \cdot 10^6}{11\,616} = 693\ кг/см^2.$$

Изгибно-крутящие моменты M_ω в характерных сечениях рассматриваемой балки:

на левой опоре (при $z=0$)

$$M_\omega = 5{,}059 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

под грузом $\left(\text{при } z = \frac{l}{4}\right)$

$$M_{\omega(1)} = 6{,}097 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

$$M_{\omega(2)} = -1{,}899 \cdot 10^4 \text{ кгсм}.$$

Крутящие моменты в характерных сечениях балки:
на левой опоре (при $z=0$)

$$M_{кр} = 2{,}868 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

под грузом $\left(\text{при } z = \frac{l}{4}\right)$

$$M_{кр} = 1{,}899 \cdot 10^4 \text{ кгсм}.$$

Секториальный статический момент в точке *1* (середина полки) по формуле приложения 6

$$S_{1\omega}^{отс} = \frac{hb^2}{16}\delta_1 = \frac{72 \cdot 22^2}{16} 2 = 4\,356 \text{ см}^4.$$

Секториальные касательные напряжения и касательные напряжения, соответствующие чистому кручению:
на опоре

$$\tau_{1\omega} = \frac{M_\omega S_{1\omega}^{отс}}{J_\omega \delta_п} = \frac{5{,}059 \cdot 10^4 \cdot 4\,356}{4\,600\,000 \cdot 2} = 24 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{2\omega} = 0;$$

$$\tau_{1кр} = \frac{M_{кр}\delta_п}{J_d} = \frac{2{,}868 \cdot 10^4 \cdot 2}{\frac{1}{3}(2 \cdot 22 \cdot 2^3 + 70 \cdot 1^3)} = \frac{5{,}736 \cdot 10^4}{140{,}7} = 408 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{2кр} = \frac{M_{кр}\delta_{ст}}{J_d} = \frac{2{,}868 \cdot 10^4 \cdot 1}{140{,}7} = 204 \text{ кг/см}^2;$$

под грузом (для 1-го участка балки)

$$\tau_{1\omega} = \frac{M_\omega S_{1\omega}^{отс}}{J_\omega \delta_п} = \frac{6{,}097 \cdot 10^4 \cdot 4356}{4\,600\,000 \cdot 2} = 29 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{2\omega} = 0;$$

$$\tau_{1кр} = \frac{M_{кр}\delta_п}{J_d} = \frac{1{,}899 \cdot 10^4 \cdot 2}{140{,}7} = 268 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{2кр} = \frac{M_{кр}\delta_{ст}}{J_d} = \frac{1{,}899 \cdot 10^4 \cdot 1}{140{,}7} = 134 \text{ кг/см}^2.$$

Суммарные нормальные напряжения в сечении под грузом

$$\delta = \delta_x + \delta_\omega = 840 + 693 = 1\,533\ кг/см^2.$$

Суммарные касательные напряжения:

на опоре

$$\tau_1 = \tau_{1x} + \tau_{1\omega} + \tau_{1кр} = 60 + 24 + 408 = 492\ кг/см^2;$$

$$\tau_2 = \tau_{2x} + \tau_{2\omega} + \tau_{2кр} = 332 + 0 + 204 = 536\ кг/см^2;$$

под грузом (в первом участке)

$$\tau_1 = \tau_{1x} + \tau_{1\omega} + \tau_{1кр} = 60 + 29 + 268 = 357\ кг/см^2;$$

$$\tau_2 = \tau_{2x} + \tau_{2\omega} + \tau_{2кр} = 332 + 0 + 134 = 466\ кг/см^2.$$

Обычно подобные балки рассчитываются без учета крутящих моментов от загружения обоих пролетов временной нагрузкой. Определим δ для этого случая.

Равнодействующая опорных давлений

$$R = 2 \cdot 18 = 36\ т.$$

Максимальный изгибающий момент

$$M_x = 36 \cdot 1{,}5 = 54\ тм.$$

Нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x} = \frac{5\,400\,000}{3\,856} = 1\,400\ кг/см^2.$$

Следовательно, учет кручения дает увеличение нормальных напряжений на

$$\frac{1\,533 - 1\,400}{1\,400} = 9{,}5\%.$$

Пример 21. Определить расчетные нормальные напряжения от изгиба и кручения в ригеле обмуровочного щита прямоточного котла.

Сечение с указанием всех размеров изображено на рис. 90. Пролет $l = 2$ *м*; левый конец защемлён, а правый шарнирно оперт. Выпишем геометрические характеристики, вычисленные в примере 18.

$$J_{x\,(нетто)} = 1174{,}7\ см^4;$$

$$a_x = 2{,}1\ см;$$

$$J_\omega = 18\,896\ см^6;$$

$$J_d = 10{,}97\ см^4 \text{ (пример 6)};$$

$$\omega_1 = 44{,}32\ см^2;$$

$$\omega_1 = -\omega_5 = -42{,}04\ см^2 \text{ (рис. 92)};$$

$$W_{1x} = \frac{1\,174 \cdot 7}{3{,}8} = 309\ см^3;$$

$$W_{2x} = \frac{1\,174 \cdot 7}{9{,}3} = 126\ см^3;$$

$$W_{1\omega} = 426\ см^4;$$

$$W_{2\omega} = 449\ см^4.$$

Максимальный изгибно-крутящий бимомент по формулам приложения 7

$$\max B_\omega = -5{,}279 \cdot 10^5\ кгсм^2.$$

Максимальный изгибающий момент в сечении защемленной опоры

$$\max M_x = \frac{q\,l^2}{8} = \frac{8 \cdot 200^2}{8} = 40\,000\ кгсм.$$

Нормальные напряжения от изгиба и кручения в точках *1* и *2* (рис. 92)

$$\sigma_1 = -\sigma_4 = \sigma_{1x} + \sigma_{1\omega} = -\frac{M_x}{W_{1x}} - \frac{B_\omega}{W_{1\omega}} =$$

$$= -\frac{40\,000}{309} - \frac{5{,}279 \cdot 10^5}{426} = -129 - 1239 = -1368\ кг/см^2;$$

$$\sigma_2 = -\sigma_5 = \sigma_{2x} + \sigma_{2\omega} = -\frac{M_x}{W_{2x}} + \frac{B_\omega}{W_{2\omega}} =$$

$$= -\frac{40\,000}{126} + \frac{5{,}279 \cdot 10^5}{449} = -317 + 1\,176 = 859\ кг/см^2.$$

§ 28. ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ СТЕРЖНЯ ПРИ ЧИСТОМ КРУЧЕНИИ НА ВЕЛИЧИНУ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ

В п. 6 § 7 было выведено дифференциальное уравнение упругой линии углов закручивания тонкостенного стержня, находящегося в условиях стесненного кручения. Наличие в этом уравнении члена, содержащего жесткость при чистом кручении GJ_d, значительно усложняет пользование этим уравнением при практических расчетах. Поэтому мы поставили своей задачей исследовать, насколько велико влияние этого члена на величину расчетных нормальных напряжений и с какой степенью точности его следует определять (как мы видели выше, величина GJ_d главным образом определяется экспериментальным путем).

Первый из этих вопросов решается путем рассмотрения графиков расчетных изгибно-крутящих бимоментов B_ω, от величины которых зависят нормальные напряжения (приложения 12—16).

Если считать допустимой ошибку, не превышающую 5%, то можно принять $GJ_d=0$, когда произведение упругой изгибно-крутильной характеристики сечения k на пролет l не будет превышать следующих величин:

для консолей (см. график приложения 13)

$$kl \leqslant 0{,}3 \div 0{,}5;$$

для свободно опертых балок (см. график приложения 12)

$$kl \leqslant 0{,}65 \div 0{,}75;$$

для балок, свободно опертых на одном и защемленных на другом конце (см. график приложения 15):

$$kl \leqslant 1{,}2 \div 1{,}3;$$

для балок, защемленных на обоих концах (см. график приложения 14):

$$kl \leqslant 1{,}5 \div 1{,}6.$$

Практически же для профилей, применяемых в строительных металлических конструкциях, величина kl оказывается значительно большей.

Для прокатных (не составных) профилей величина эта, как правило, даже больше 5 и доходит до 15—20.

Таким образом, приходим к выводу, что величиной жесткости стержня при чистом кручении GJ_d почти во всех строительных металлических конструкциях пренебрегать нельзя.

Для решения вопроса о необходимой степени точности экспериментального определения величины GJ_d мы построим кривые I и VI графика приложения 12, увеличив величину GJ_d на 10%. Кривые эти и результаты сравнения их с первоначальными изображены на рис. 131.

Сравнение это показывает, что увеличение GJ_d на 10% уменьшает величину расчетного бимомента, а следовательно, и величину секториальных напряжений δ_ω в среднем на следующее число процентов:

	Для сосредоточенной нагрузки (в %)	Для распределенной нагрузки (в %)
При $kl=1$	0,6	0,8
„ $kl=2$	2,2	2,9
„ $kl=4$	4	8,15
„ $kl=8$	4,64	8,5
„ $kl=12$	4,66	9
„ $kl=16$	4,67	9,12

Таким образом, по мере увеличения величины kl влияние неточности определения жесткости GJ_d на напряжения δ_ω увеличивается и для $kl \geqslant 8$ остается примерно стабильным, а именно в

среднем 4,7% для балок, нагруженных одной сосредоточенной силой, и 9% для балок, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой.

Посмотрим, каково влияние ошибки в определении GJ_d на суммарные нормальные напряжения от изгиба и кручения. Как увидим ниже в главе VIII, мы установили, что, например, в прокатных двутавровых балках пролетом $l=6$ *м*, загруженных равномерно распределенной нагрузкой, от эксцентричности приложения

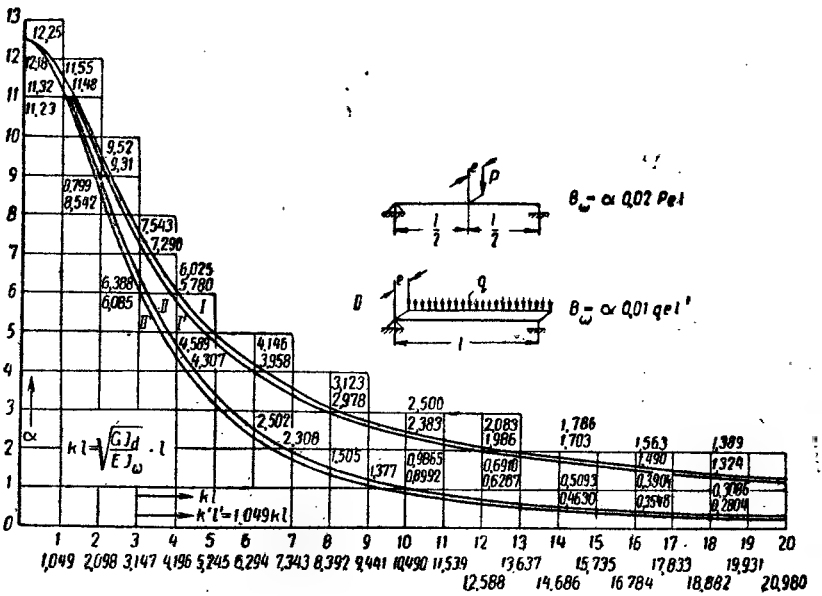


Рис. 131

последней только в 1 *см* нормальные напряжения повышаются от 3,1% для двутавра № 16 ($kl=15{,}6$) до 16,5% для двутавра № 60а ($kl=4{,}7$). Отсюда следует, что увеличение жесткости GJ_d на 10% при эксцентрицитете приложения нагрузки $e=1$ *см* уменьшает суммарные нормальные напряжения приблизительно от $9\cdot 0{,}031=$ $=0{,}27\%$ для двутавра № 16 до $8\cdot 0{,}165=1{,}32\%$ для двутавра № 60а.

Для других профилей это влияние оказывается примерно в тех же пределах.

Таким образом, мы приходим к окончательному выводу, что для стержней, находящихся в условиях совместного действия изгиба и кручения при сравнительно небольших эксцентрицитетах приложения нагрузки, ошибка в определении GJ_d в пределах 10% существенного влияния на расчетные нормальные напряжения не

оказывает. Это несколько оправдывает принятые выше поправочные коэффициенты к величине J_d, основанные на сравнительно небольшом количестве экспериментов.

§ 29. ВЛИЯНИЕ ЭКСЦЕНТРИЧНОСТИ ПРИКРЕПЛЕНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ БАЛКИ НА ОПОРАХ НА РАСЧЕТНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

В работе В. З. Власова «Тонкостенные упругие стержни» и в наших работах рассматриваются граничные условия тонкостенных балок, которые могут быть названы «идеальными» опорными закреплениями. Сюда относятся:

а) шарнирные опоры, препятствующие образованию прогибов и углов закручивания ($\xi=0$; $\eta=0$ и $\theta=0$) и не препятствующие поворотам сечения вокруг главных осей и свободной депланации сечения по главному секториальному закону, т. е. относительно центра изгиба и главной секториальной точки сечения ($\xi''=0$; $\eta''=0$ и $\theta''=0$);

б) защемленные опоры, препятствующие не только образованию прогибов и углов закручивания ($\xi=0$; $\eta=0$ и $\theta=0$), но и лишающие опорные сечения возможности свободно поворачиваться в плоскости изгиба и свободно искривляться, т. е. опорные сечения вынуждены оставаться плоскими ($\xi'=0$; $\eta'=0$ и $\theta'=0$).

в) свободные концы балки, характеризующиеся отсутствием в концевых сечениях нормальных и касательных напряжений:

$$(\xi''=0;\ \eta''=0;\ \theta''=0;\ \xi'''=0;\ \eta'''=0 \text{ и } L=-EJ_\omega\theta'''+GJ_d\theta'=0).$$

В настоящем параграфе мы рассмотрим тонкостенные балки, имеющие не «идеальные», а более сложные опорные закрепления, а именно:

а) балки, опоры которых дают возможность опорным сечениям поворачиваться, но не вокруг центральной оси сечения, а вокруг оси, не проходящей через центр тяжести сечения;

б) балки, опоры которых дают возможность опорным сечениям депланировать, но не по главному секториальному закону, а по секториальному закону относительно каких-либо других точек сечения.

Указанные сложные граничные условия будут иметь место, если балка на опорах будет прикреплена эксцентрично по отношению к главным центральным осям и центру изгиба сечения.

В таком случае в точках эксцентричного прикрепления балки от действующих на нее нагрузок возникнут дополнительные продольные силы N_i, величину которых можно определить из условий деформаций, в данном случае из условий равенства нулю продольных перемещений точек прикрепления этих сил ($u_i=0$).

Если общее число точек закрепления опорного сечения балки

более двух и они не принадлежат одной прямой, то опору можно считать защемленной от изгиба.

Если число точек закрепления более трех и они не принадлежат двум пересекающимся друг с другом прямолинейным участкам контура сечения, то опору можно считать защемленной от кручения. При этом главные секториальные координаты этих четырех или более закрепленных точек, отложенные в определенном масштабе в этих точках перпендикулярно к сечению, не должны образовывать одну плоскость.

Взаимное продольное перемещение каких-либо соответствующих точек опорных сечений тонкостенной балки с координатами x, y и ω в общем виде может быть выражено следующей формулой:

$$u = u_0 + u_x + u_y + u_\omega = \Delta l + \varphi_x y + \varphi_y x + \theta\omega', \qquad (220)$$

где $u_0 = \Delta l = \frac{Nl}{EF}$ — продольная деформация балки от продольной силы N;

$u_x = \varphi_x y = y \int_0^l \frac{M_x\,dx}{EJ_x}$ — продольное перемещение при изгибе балки вокруг оси x;

$u_y = \varphi_y x = x \int_0^l \frac{M_y\,dz}{EJ_y}$ — то же, при изгибе балки вокруг оси y;

$u_\omega = \theta\omega' = \omega \int_0^l \frac{B_\omega\,dz}{EJ_\omega}$ — продольное перемещение, возникающее вследствие депланации сечения и меняющееся по сечению по закону секториальных площадей.

Выведем теперь формулы для определения компонентов перемещений в некоторых частных случаях загружения балки.

а) Эксцентричная равномерно-распределенная по всему пролету нагрузка интенсивности q, действующая на шарнирно опертую по концам балку.

В этом случае $N = 0$; $M_x = \frac{q_y}{2} z(l - z)$; $M_y = \frac{q_x}{2} z(l - z)$,

где q_x и q_y — проекции нагрузки q на оси x и y.

$$B_\omega = \frac{qe}{k^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right]^*.$$

* См. п. 6 приложения 8.

Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 0; \\ u_x &= \frac{q_y}{2EJ_x}\, y \int_0^l z(l-z)\,dz = \frac{q_y\, l^3}{12EJ_x}\, y \\ u_y &= \frac{q_x}{2EJ_y}\, x \int_0^l z(l-z)\,dz = \frac{q_x\, l^3}{12\, EJ_y}\, x; \\ u_\omega &= \frac{qe}{k^2EJ_\omega}\,\omega \int_0^l \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right] dz = \frac{2qe}{k^3EJ_\omega}\,\omega\left(\frac{kl}{2} - \operatorname{th}\frac{kl}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (221)$$

б) Эксцентричная сосредоточенная посредине пролета сила P, действующая на шарнирно опертую по концам балку.

В этом случае

$$N = 0;\ M_x = \frac{P_y}{2}\, z;\ M_y = \frac{P_x}{2}\, z;\ B_\omega = \frac{Pe \operatorname{sh} kz}{2k \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$$

(см. п. 7 приложения 8). Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 0; \\ u_x &= \frac{P_y}{2EJ_x}\, y 2 \int_0^{\frac{l}{2}} z dz = \frac{P_y\, l^2}{8EJ_x}\, y; \\ u_y &= \frac{P_x}{2EJ_y}\, x 2 \int_0^{\frac{l}{2}} z dz = \frac{P_x\, l^2}{8EJ_y}\, x; \\ u_\omega &= \frac{Pe}{2kEJ_\omega}\,\omega\, \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\, 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \operatorname{sh} kz dz = \frac{Pe}{k^2EJ_\omega}\,\omega\, \frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - 1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (222)$$

в) Две взаимно-противоположные растягивающие силы N_i, приложенные к концевым сечениям шарнирно опертой по концам балки в точках с координатами (x_i, y_i, ω_i).

В этом случае

$$N = N_i;\ M_x = N_i y_i;\ M_y = N_i x_i;$$

$$B_\omega = N_i \omega_i \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}.$$

Тогда будем иметь:

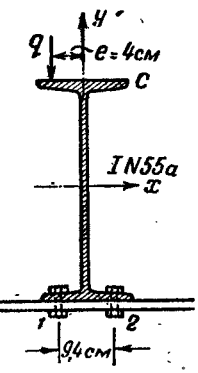


Рис. 132

$$u_0 = \frac{N_i l}{EF};\quad u_x = \frac{N_i y_i}{EJ_x} y \int_0^l dz = \frac{N_i l}{EJ_x} y_i \cdot y;$$

$$u_y = \frac{N_i x_i}{EJ_y} x \int_0^l dz = \frac{N_i l}{EJ_y} x_i x;$$

$$u_\omega = \frac{N_i \omega_i}{EJ_\omega} \omega \frac{l}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \int_0^l \operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right) dz =$$

$$= \frac{N_i l}{EJ_\omega} \omega_i \omega \frac{\operatorname{th} \frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}}. \qquad (223)$$

Пользуясь выведенными формулами, проиллюстрируем на двух частных примерах влияние эксцентричности прикрепления балки на опорах на расчетные нормальные напряжения.

Пример 22. Прокатная двутавровая балка № 55а пролетом $l=5$ *м* нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q=6$ *т/м*, действующей в вертикальной плоскости с эксцентрицитетом $e=4$ *см*. Нижняя полка балки прикреплена на каждой из опор двумя болтами на расстоянии 9,4 *см* один от другого (рис. 132).

Данные для расчета:

$$F = 134\ см^2;\ J_x = 62\,870\ см^4;\ J_y = 1\,370\ см^4;$$

$$J_\omega = 906\,350\ см^6;\ W_x = 2\,290\ см^3;\ W_y = 164\ см^3;$$

$$W_\omega = 4\,181\ см^4;\ \omega_{max} = 216{,}8\ см^2;\ k = 0{,}008198\ см^{-1};$$

$$kl = 4{,}099;\ \frac{kl}{2} = 2{,}0495;\ \operatorname{sh} \frac{kl}{2} = 3{,}82;$$

$$\operatorname{ch} \frac{kl}{2} = 3{,}948;\quad \operatorname{th} \frac{kl}{2} = 0{,}9673;\ x_1 = -4{,}7\ см;$$

$$y_1 = 26{,}45\ см;$$

$$\omega_1 = -\omega_{max}\frac{x_1}{b/2} = -216{,}8\frac{4{,}7}{8{,}3} = -122{,}8\ см^2;\ x_2 = 4{,}7\ см;$$

$$y_2 = -26{,}45\ см;\ \omega_2 = 122{,}8\ см^2.$$

Продольные усилия, возникающие под действием нагрузки в точках *1* и *2* прикрепления балки на опорах, обозначим соответственно через N_1 и N_2.

Усилия эти определим из условий деформаций, которые для данного случая двух неизвестных имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{11}N_1 + u_{12}N_2 + u_{1p} = 0; \\ u_2 &= u_{21}N_1 + u_{22}N_2 + u_{2p} = 0, \end{aligned} \tag{224}$$

где через u_{11}, u_{12}, u_{21} и u_{22} обозначены взаимные продольные перемещения точек, номер которых указан первым индексом, от действия двух взаимно-противоположных растягивающих сил $N = 1$, приложенных по концам балки в точках, номер которых указан вторым индексом.

u_{1p} и u_{2p} — взаимные продольные перемещения точек *1* и *2* от заданной нагрузки.

По формулам (223)

$$\left.\begin{aligned} u_{11} &= \frac{l}{E}\left(\frac{1}{F} + \frac{y_1^2}{J_x} + \frac{x_1^2}{J_y} + \frac{\omega_1^2}{J_\omega}\,\frac{\operatorname{th}\frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}}\right); \\ u_{12} = u_{21} &= \frac{l}{E}\left(\frac{1}{F} + \frac{y_1 y_2}{J_x} + \frac{x_1 x_2}{J_y} + \frac{\omega_1\omega_2}{J_\omega}\,\frac{\operatorname{th}\frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}}\right); \\ u_{22} &= \frac{l}{E}\left(\frac{1}{F} + \frac{y_2^2}{J_x} + \frac{x_2^2}{J_y} + \frac{\omega_2^2}{J_\omega}\,\frac{\operatorname{th}\frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{225}$$

а по формулам (221)

$$u_{1p} = -\frac{ql^3}{12E}\left(\frac{\cos\alpha}{J_x}y_1 + \frac{\sin\alpha}{J_y}x_1 - \frac{3e}{J_\omega}\omega_1\,\frac{\frac{kl}{2} - \operatorname{th}\frac{kl}{2}}{\left(\frac{kl}{2}\right)^3}\right); \tag{226}$$

$$u_{2p} = -\frac{ql^3}{12E}\left(\frac{\cos\alpha}{J_x}y_2 + \frac{\sin\alpha}{J_y}x_2 - \frac{3e}{J_\omega}\omega_2\,\frac{\frac{kl}{2} - \operatorname{th}\frac{kl}{2}}{\left(\frac{kl}{2}\right)^3}\right),$$

где через α обозначен угол, образованный плоскостью действия нагрузки с плоскостью yz. В данной задаче $\alpha = 0$.

Подставим численные значения величин, стоящих в скобках формул (225) и (226). Тогда будем иметь:

$$u_{11} = \frac{l}{E}\left(\frac{1}{134} + \frac{26,45^2}{62\,870} + \frac{4,7^2}{1\,370} + \frac{122,8^2}{906\,350} \cdot \frac{0,9673}{2,0495}\right) = 0,04257\,\frac{l}{E};$$

$$u_{12} = \frac{l}{E}\left(\frac{1}{134} + \frac{26,45^2}{62\,870} + \frac{-4,7^2}{1\,370} + \frac{-122,8^2}{906\,350} \cdot \frac{0,9673}{2,0495}\right) = -0,005381\,\frac{l}{E};$$

$$u_{22} = \frac{l}{E}\left(\frac{1}{134} + \frac{26,45^2}{62\,870} + \frac{4,7^2}{1\,370} + \frac{122,8^2}{906\,350} \cdot \frac{0,9673}{2,0495}\right) = -0,004257\,\frac{l}{E};$$

$$u_{1p} = -\frac{ql^3}{12E}\left(-\frac{1}{62\,870}\,26,45 + 0 + \frac{3\cdot 4}{906\,350}\,122,8 \cdot \frac{2,0495 - 0,9673}{2,0495^3}\right) =$$

$$= 0,0002163\,\frac{ql^3}{12E},$$

$$u_{2p} = -\frac{ql^3}{12E}\left(-\frac{1}{62\,870}\,26,45 + 0 - \frac{3\cdot 4}{906\,350}\,122,8 \cdot \frac{2,0495 - 0,9673}{2,0495^3}\right) =$$

$$= 0,0006251\,\frac{ql^3}{12E}.$$

Подставив эти значения в уравнение (224) и решив их, получим

$$N_1 = \frac{u_{12}u_{2p} - u_{22}u_{1p}}{u_{11}u_{22} - u_{12}^2} = \frac{-0,005381\cdot 0,0006251 - 0,04257\cdot 0,0002163}{0,04257^2 - 0,005381^2}\,\frac{ql^2}{12} =$$

$$= -0,00705\,\frac{ql^2}{12};$$

$$N_2 = \frac{u_{12}u_{1p} - u_{11}u_{2p}}{u_{11}u_{22} - u_{12}^2} = \frac{-0,005381\cdot 0,0002163 - 0,04257\cdot 0,0006251}{0,04257^2 - 0,005381^2}\cdot\frac{ql^2}{12} =$$

$$= -0,01558\,\frac{ql^2}{12}.$$

Нормальные напряжения в наиболее напряженной точке сечения C (рис. 132) посредине пролета балки только от нагрузки q (без учета влияния сил N_1 и N_2) будут равны

$$\sigma_{C(q)} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{B_\omega}{W_\omega} = \frac{ql^2}{8}\cdot\frac{1}{2\,290} - \frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - 1}{k^2 l^2 \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\,qel^2\,\frac{1}{4\,181} =$$

$$= -\frac{ql^2}{8}\left(0,0004367 + \frac{8\cdot 4}{4\,181}\cdot\frac{3,948 - 1}{4,099^2\cdot 3,948}\right) = -0,0007769\,\frac{ql^2}{8}.$$

Нормальные напряжения в той же точке C от сил N_1 и N_2

$$\sigma_{C(1)} = \frac{N_1}{F} + \frac{N_1 y_1}{W_x} + \frac{N_1 x_1}{W_y} + \frac{N_1\omega_1}{W_\omega}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = -0,00705\,\frac{ql^2}{12}\left(\frac{1}{134} -\right.$$

$$-\frac{26,45}{2\,290}-\frac{4,7}{164}+\frac{122,8}{4\,181}\cdot\frac{1}{3,948}\Big)=-0,00705\,\frac{ql^2}{12}\,(0,007465-$$

$$-0,01155-0,02866+0,007439)=0,0001784\,\frac{ql^2}{12};$$

$$\sigma_{C(2)}=\frac{N_2}{F}+\frac{N_2y_2}{W_x}+\frac{N_2x_2}{W_y}+\frac{N_2\omega_2}{W_\omega}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}=$$

$$=-0,01558\,\frac{ql^2}{12}\left(\frac{1}{134}-\frac{26,45}{2\,290}+\frac{4,7}{164}-\frac{122.8}{4\,181}\cdot\frac{1}{3,948}\right)=-0,0002669\frac{ql^2}{12}.$$

Таким образом, нормальные напряжения в точке C среднего сечения рассматриваемой балки, возникающие от сил N_1 и N_2 равны

$$0,0001784\,\frac{ql^2}{12}-0,0002669\,\frac{ql^2}{12}=$$

$$=-0,0000885\,\frac{ql^2}{12},$$

что составляет только $\dfrac{0,0885\cdot\frac{1}{12}}{0,0007769\,\frac{1}{8}}=$ $=7,6\%$ по сравнению с $\sigma_{C(q)}$, т. е. по сравнению с напряжениями без учета эксцентрицитета прикрепления балки на опорах.

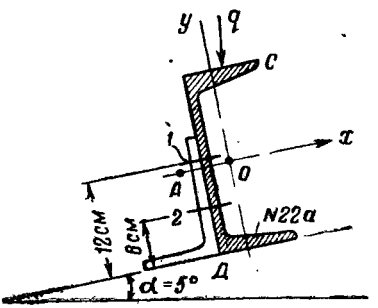


Рис. 133

Итак, влияние эксцентричности прикрепления здесь сравнительно невелико.

Пример 23. Прогон под кровлю из швеллера № 22а прикреплен на каждой из опор двумя болтами к специальным коротышам из уголков 120×80 (рис. 133). Угол наклона кровли $\alpha=5°$. Нагрузка $q=470$ *кг/м*. Пролет $l=6$ *м*.

Данные для расчета:

$$F=33,81\ см^2;\ J_x=2457,9\ см^4;\ J_y=161,5\ см^4;$$

$$J_\omega=11\,819\ см^6;\ W_x=223,4\ см^3;\ W_y^{лев}=79,3\ см^3;$$

$$W_y^{прав}=28,5\ см^3;\ W_\omega^{лев}=495,64\ см^4;\ W_\omega^{прав}=235,68\ см^4;$$

$$z_0=2,03\ см;\ d=0,8\ см;\ t=1,15\ см;$$

$$b=7,7\ см;\ x_a=1,926\ см;\ \sin\alpha=0,08716;$$

$$\cos\alpha=0,9962;\ \operatorname{tg}\alpha=0,08749;$$

$$x_1=x_2=-\left(z_0-\frac{d}{2}\right)=-(2,03-0,4)=-1,63\ см;$$

$$y_1=1\ см;\ y_2=-5\ см.$$

$$\omega_{max}^{лев} = \pm 23{,}846\ см^2;\ \omega_{max}^{прав} = \pm\ 50{,}148\ см^2;$$

$$\omega_1 = \frac{23{,}846 \cdot 1}{10{,}425} = 2{,}287\ см^2;$$

$$\omega_2 = \frac{-23{,}846 \cdot 5}{10{,}425} = -11{,}44\ см^2;$$

$$k = 0{,}02034\ см^{-1};\ kl = 12{,}204;\ \frac{kl}{2} = 6{,}102;$$

$$\operatorname{sh}\frac{kl}{2} = 222{,}928;\ \operatorname{ch}\frac{kl}{2} = 222{,}93;\ \operatorname{th}\frac{kl}{2} = 0{,}99999.$$

$$e = -\left(x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\cos\alpha = -$$

$$-\left(1{,}926 + \frac{7{,}7}{2} - \frac{22}{2} \cdot 0{,}08749\right) 0{,}9962 = -4{,}795\ см$$

(см. формулу (282) § 36).

Продольные перемещения точек *1* и *2* (рис. 133) по формулам (225) и (226) будут равны

$$u_{11} = \frac{l}{E}\left(\frac{1}{33{,}81} + \frac{1^2}{2457{,}9} + \frac{1{,}63^2}{161{,}5} + \frac{2{,}287^2}{11\,819} \cdot \frac{0{,}99999}{6{,}102}\right. = 0{,}04651\ \frac{l}{E};$$

$$u_{12} = \frac{l}{E}\left(\frac{1}{33{,}81} - \frac{1{,}5}{2457{,}9} + \frac{1{,}63^2}{161{,}5} - \frac{2{,}287 \cdot 11{,}44}{11819} \cdot \frac{0{,}99999}{6{,}102}\right) =$$

$$= 0{,}04363\ \frac{l}{E};$$

$$u_{22} = \frac{l}{E}\left(\frac{1}{33{,}81} + \frac{5^2}{2457{,}9} + \frac{1{,}63^2}{161{,}5} + \frac{11{,}44^2}{11\,819} \cdot \frac{0{,}99999}{6{,}102}\right. = 0{,}05801\ \frac{l}{E};$$

$$u_{1p} = -\frac{ql^3}{12\,E}\left(\frac{0{,}9962}{2457{,}9} \cdot 1 - \frac{0{,}08716}{161{,}5}\ 1{,}63 +\right.$$

$$\left. + \frac{3 \cdot 4{,}795}{11\,819}\ 2{,}287 \cdot \frac{6{,}102 - 0{,}99999}{6{,}102^3}\right) = 0{,}0004121\ \frac{ql^3}{12E};$$

$$u_{2p} = -\frac{ql^3}{12E}\left(-\frac{0{,}9962}{2457{,}9}\ 5 - \frac{0{,}08716}{161{,}5}\ 1{,}63 -\right.$$

$$\left. - \frac{3 \cdot 4{,}795}{11\,819}\ 11{,}44 \cdot \frac{6{,}102 - 0{,}99999}{6{,}102^3}\right) = 0{,}003219\ \frac{ql^3}{12E}.$$

Подставив эти значения перемещений в уравнения (224) и решив последние, получим

$$N_1 = \frac{u_{12}u_{2p} - u_{12}u_{1p}}{u_{11}u_{22} - u_{12}^2} = \frac{0{,}04363 \cdot 0{,}03219 - 0{,}05801 \cdot 0{,}0004121}{0{,}04651 \cdot 0{,}05801 - 0{,}04363^2} \cdot \frac{ql^2}{12} =$$

$$= 0{,}14665\ \frac{ql^2}{12};$$

$$N_2 = \frac{u_{12}u_{1p} - u_{11}u_{2p}}{u_{11}u_{22} - u_{12}^2} = \frac{0{,}04363 \cdot 0{,}0004121 - 0{,}04651 \cdot 0{,}003219}{0{,}04651 \cdot 0{,}05801 - 0{,}04363^2} \cdot \frac{ql^2}{12} =$$

$$= -0{,}1658\,\frac{ql^2}{12}.$$

Определим нормальные напряжения в наиболее напряженных точках сечений C и D (см. рис. 133) посредине пролета:

$$y_C = 10{,}425\ см;\ x_C = 5{,}67\ см;\ \omega_C = -50 \cdot 148\ см^2;$$

$$y_D = -10{,}425\ см;\ x_D = -2{,}03\ см;\ \omega_D = -23{,}846\ см^2;$$

$$\sigma_{C(q)} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y^{пр}} + \frac{B_\omega}{W_\omega^{пр}} = \frac{q\cos\alpha l^2}{8} \cdot \frac{1}{223{,}4} - \frac{q\sin\alpha l^2}{8} \cdot \frac{1}{28{,}5} +$$

$$+ qel^2\,\frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - 1}{k^2 l^2 \operatorname{ch}\frac{kl}{2}} \cdot \frac{1}{235{,}68} = -\left(\frac{0{,}9962}{223{,}4} + \frac{0{,}08716}{28{,}5} -\right.$$

$$\left. - 8 \cdot 4{,}795\,\frac{222{,}93 - 1}{12{,}204^2 \cdot 222{,}93} \cdot \frac{1}{235{,}68}\right)\frac{ql^2}{8} = -0{,}006431\,\frac{ql^2}{8};$$

$$\sigma_{D(q)} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y^{лев}} + \frac{B_\omega}{W_\omega^{лев}} = \left(\frac{0{,}9962}{223{,}4} + \frac{0{,}08716}{79{,}3} +\right.$$

$$\left. + 8 \cdot 4{,}795\,\frac{222{,}93 - 1}{12{,}204^2 \cdot 223{,}93} \cdot \frac{1}{495{,}64}\right)\frac{ql^2}{8} = 0{,}006073\,\frac{ql^2}{8};$$

$$\sigma_{C(1)} = \frac{N_1}{F} + \frac{N_1 y_1}{W_x} + \frac{N_1 x_1}{W_y^{прав}} + \frac{N_1 \omega_1}{W_\omega^{прав}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} =$$

$$= 0{,}14665\,\frac{ql^2}{12}\left(\frac{1}{33{,}81} + \frac{1}{223{,}4} - \frac{1{,}63}{28{,}5} - \frac{2{,}287}{235{,}68} \cdot \frac{1}{222{,}93}\right) = -0{,}003405\,\frac{ql^2}{12};$$

$$\sigma_{D(1)} = \frac{N_1}{F} + \frac{N_1 y_1}{W_x} + \frac{N_1 x_1}{W_y^{лев}} + \frac{N_1 \omega_1}{W_\omega^{лев}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} =$$

$$= 0{,}14665\,\frac{ql^2}{12}\left(\frac{1}{33{,}81} - \frac{1}{223{,}4} + \frac{1{,}63}{79{,}3} - \frac{2{,}287}{495{,}64} \cdot \frac{1}{222{,}93}\right) = 0{,}006683\,\frac{ql^2}{12};$$

$$\sigma_{C(2)} = \frac{N_2}{F} + \frac{N_2 y_2}{W_x} + \frac{N_2 x_2}{W_y^{прав}} + \frac{N_2 \omega_2}{W_\omega^{прав}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} =$$

$$= -0{,}1658\,\frac{ql^2}{12}\left(\frac{1}{33{,}81} - \frac{5}{223{,}4} - \frac{1{,}63}{28{,}5} + \frac{11{,}44}{235{,}68} \cdot \frac{1}{222{,}93}\right) = 0{,}0082585\,\frac{ql^2}{12};$$

$$\sigma_{D(2)} = \frac{N_2}{F} + \frac{N_2 y_2}{W_x} + \frac{N_2 x}{W_y^{лев}} + \frac{N_2 \omega_2}{W_\omega^{лев}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} =$$

$$= -0{,}1658\,\frac{ql^2}{12}\left(\frac{1}{33{,}81}+\frac{5}{223{,}4}+\frac{1{,}63}{79{,}3}+\frac{11{,}44}{495{,}64}\cdot\frac{1}{222{,}93}\right)=-0{,}01203\,\frac{ql^2}{12}.$$

Для выявления влияния опорных закреплений на расчетные напряжения вычислим отношения

$$\frac{\sigma_{C(q)}}{\sigma_{C(q)}+\sigma_{C(1)}+\sigma_{C(2)}}=\frac{-0{,}006431\,\frac{ql^2}{8}}{-0{,}006431\,\frac{ql^2}{8}-0{,}003405\,\frac{ql^2}{12}+0{,}0082585\frac{ql^2}{12}}=$$

$$=\frac{-0{,}019293}{-0{,}019293-0{,}006810+0{,}016517}=\frac{-0{,}019293}{-0{,}009586}=2{,}01;$$

$$\frac{\sigma_{D(q)}}{\sigma_{D(q)}+\sigma_{D(1)}+\sigma_{D(2)}}=\frac{0{,}006073\,\frac{ql^2}{8}}{0{,}006073\,\frac{ql^2}{8}+0{,}006683\,\frac{ql^2}{12}-0{,}01203\,\frac{ql^2}{12}}=$$

$$=\frac{0{,}018219}{0{,}018219+0{,}013366-0{,}02406}=\frac{0{,}018219}{0{,}007525}=2{,}42.$$

Полученные отношения показывают, что усилия, возникающие в опорных закреплениях, снижают напряжения в крайних точках среднего сечения прогона приблизительно в два раза. В действительности же это снижение будет значительно меньше вследствие неплотности болтовых сопряжений. Но все же оно настолько велико, что в расчетах его следует учитывать.

ГЛАВА VII

ВЫЯВЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТИПОВ НЕЗАМКНУТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ, РАБОТАЮЩИХ НА СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ И НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА КРУЧЕНИЯ

Выявление рациональных типов профилей, хорошо работающих при совместном действии изгиба и кручения, — задача в достаточной мере сложная. Решение ее зависит от многих факторов: величины, характера и места приложения нагрузки, формы сечения, типа конструкции, в состав которой входят в качестве элементов стержня, о которых идет речь, габаритов и т. п. Если можно назвать сравнительно простой задачу о выборе рационального типа профиля, работающего только на косой изгиб, то исследование еще одновременной работы его на стесненное кручение значительно усложняет эту задачу, потому что указанные выше факторы тесно переплетаются между собой.

Так, например, бимомент, при помощи которого получается составляющая продольных нормальных напряжений от кручения,

сам по себе зависит не только от величины, характера и эксцентрицитета приложения нагрузки, но также и от формы и размеров самого сечения и граничных условий по краям стержня. При этом форма и размеры сечения влияют на величину упругой изгибно-крутильной характеристики $k=\sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$, которая входит в состав аргумента гиперболических функций. Поэтому мы пока поставили перед собой более скромную задачу, а именно: выявить в качестве первого приближения влияние только формы поперечного сечения на величину секториального момента инерции J_ω, а следовательно, и на величину секториальной жесткости депланаций при кручении. С этой целью мы рассмотрели ряд различных типов профилей, имеющих одинаковую толщину $\delta=1$ *см* и одинаковый периметр контура $P=120$ *см**, и установили величину J_ω в зависимости от формы и соотношений между размерами отдельных элементов сечения. Некоторые же более простые применяемые в практике типы профилей исследованы более подробно и в более общем виде: для этих профилей выявлены оптимальные соотношения между размерами элементов их при работе профиля как на стесненное кручение, так и на изгиб. Здесь уместно обратить внимание на следующее положение.

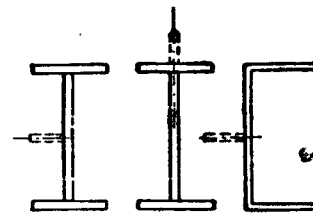


Рис. 134

Если к какому-нибудь профилю присоединим прямоугольный элемент по направлению, проходящему через центр изгиба и одну из секториальных нулевых точек профиля, то секториальный момент инерции и положение центра изгиба этого профиля не изменятся.

Поэтому при указанной выше постановке задачи нет нужды рассматривать отдельно профили, подобные изображенным на рис. 134, полученные из основных профилей путем добавления указанным путем прямолинейных элементов (на рис. 134 добавленные элементы обозначены пунктиром).

Доказательство этого положения вытекает из метода произвольных эпюр при определении центра изгиба и секториального момента инерции профиля (см. § 14).

Как известно, по этому методу эпюра главных секториальных площадей определяется как эпюра секториальных площадей, ортогональная к любой линейной эпюре. Предположим, что для какого-либо профиля мы построили эпюру главных секториальных площадей. Добавим теперь к профилю прямолинейный элемент,

---

* Цифра 120 взята из соображений простоты установления размеров элементов, составляющих профиль, в целых числах.

проходящий через нулевую точку и направленный по линии, соединяющей эту точку с центром изгиба профиля, и примем эпюру главных секториальных площадей основного профиля в качестве вспомогательной эпюры секториальных площадей ω_0 для профиля с добавочным элементом. Остальные три (из четырех) линейные эпюры, вообще говоря, от прибавления элемента изменятся, так как для каждой из них добавится участок эпюры на этом добавленном прямолинейном элементе.

Для построения эпюры главных секториальных площадей всего сечения, как известно, придется найти из решения системы трех уравнений коэффициенты α_x, α_y и β; правыми частями в этой системе будут интегралы

$$\int_F x\omega_0 dF, \quad \int_F y\,\omega_0 dF \quad \text{и} \quad \int_F z\,\omega_0 dF.$$

Но эти интегралы будут равны нулю, так как ω_0 для основного профиля является главной секториальной площадью, а добавочным эпюрам x, y и z на прямолинейном элементе соответствует нуль на эпюре ω_0. Следовательно, $\alpha_z = \alpha_y = \beta = 0$, и ω_0 будет эпюрой главных секториальных площадей и для профиля с добавочным прямолинейным элементом, расположенным, как указано выше.

§ 30. ОПТИМАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РАЗМЕРАМИ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОФИЛЕЙ

1. СИММЕТРИЧНЫЙ ДВУТАВР

Пусть b и $\delta_п$ — соответственно ширина и толщина полок, h и $\delta_{ст}$ — высота и толщина стенки двутаврового профиля.

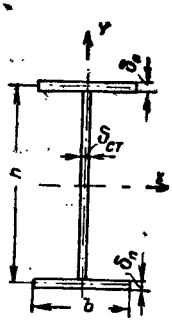


Рис. 135

Размеры эти, как и во всех других случаях рассматриваемых нами профилей, относим к осевым линиям элементов, составляющих профиль (рис. 135). Центр тяжести и центр изгиба двутаврового профиля, как известно, находится в середине стенки его. Найдем выражение секториального момента инерции J_ω.

Пользуясь формулой $J_\omega = \frac{J_y h^2}{4}$ (см. таблицу приложения 5), находим

$$J_\omega = \frac{F_{ст}^2 F_п^3}{24\,\delta_п^2\,\delta_{ст}^2}, \tag{227}$$

где $F_п = b\,\delta_п$ — площадь полки;
$F_{ст} = h\,\delta_{ст}$ — площадь стенки.

Полагаем, что площадь поперечного сечения профиля постоянна, т. е.

$$2F_п + F_{ст} = F = \text{const}. \tag{228}$$

Считая $F_п$ и $F_{ст}$ переменными по величине, но удовлетворяющими условию (228), найдем, при каких соотношениях площадей полки и стенки секториальный момент инерции будет наибольшим. Это задача нахождения maximuma функции двух переменных, связанных условием (228), т. е. так называемого условного максимума.

Выражая $F_{ст}$ при помощи уравнения (228) через $F_п$ и $F=$ $=\text{const}$ и подставляя в формулу (227) $F_{ст}=F-2F_п$, получаем

$$J_ш=\frac{(F-2F_п)^2F_п^3}{24\,\delta_п^2\,\delta_{ст}^2}.$$

Задача таким образом свелась к нахождению значения $F_п$, при котором J_ω будет максимальным. Заметим, что $\delta_п$ и $\delta_{ст}$, при этом, вообще говоря, произвольны, но в каждом частном случае фиксированы.

Продифференцировав J_ω по $F_п$ и приравняв производную нулю, найдем из полученного таким образом уравнения значение $F_п$, при котором J будет иметь экстремальное значение.

Имеем

$$-2\cdot 2(F-2F_п)\,F_п^3+3\,(F-2F_п)^2\,F_п^2=0$$

или

$$F_п^2\,(F-2F_п)\,(3F-10\,F_п)=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют корни

$$F_п=0;\ F_п=\frac{1}{2}F\ \text{ и }\ F_п=0{,}3F.$$

Первые два корня дают минимальное значение J_ω, так как при этом двутавр вырождается в полосу, для которой $J_\omega=0$.

Третий корень, как нетрудно убедиться, дает максимальное значение J_ω; в этом случае из (228) находим

$$F_{ст}=0{,}4\,F.$$

Итак, наибольший секториальный момент инерции будет у двутавра с таким соотношением площадей элементов:

$$\left.\begin{aligned}F_п&=0{,}3\,F\\F_{ст}&=0{,}4\,F\end{aligned}\right\}\qquad(229)$$

или в другом выражении, когда

$$b=0{,}75\,h\,\frac{\delta_{ст}}{\delta_п}.\qquad(230)$$

Найдем, при каком соотношении площади полки и стенки двутавра секториальный момент сопротивления его

$$W_\omega = \frac{J_\omega}{\omega_{max}},$$

вычисленный для крайних точек контура, будет наибольшим.

$$\omega_{max} = \frac{bh}{4} = \frac{F_п F_{ст}}{4\delta_п \delta_{ст}} \text{ (см. таблицу приложения 6).}$$

Для края полки имеем

$$W_\omega = \frac{F_п^2 F_{ст}}{6\delta_п \delta_{ст}}. \tag{231}$$

Способом, указанным выше, находим, что при

$$2F_п + F_{ст} = F = \text{const}$$

и произвольных, но фиксированных $\delta_п$ и $\delta_{ст}$ секториальный момент сопротивления W_ω будет наибольшим при таких соотношениях площадей полки и стенки:

$$\left.\begin{aligned} F_п &= \frac{1}{3} F \\ F_{ст} &= \frac{1}{3} F \end{aligned}\right\} \tag{232}$$

или

$$b = h\frac{\delta_{ст}}{\delta_п}. \tag{233}$$

Экваториальные моменты инерции J_x и J_y для симметричного двутавра максимумов в аналитическом смысле не имеют. Величины их будут возрастать при вырождении двутавра в узкие, длинные полосы соответственно вдоль оси Y и оси X.

То же самое можно сказать и относительно момента сопротивления W_y для краев полки.

Момент же сопротивления W_x для точек, лежащих на оси полки двутавра, $\left(W_x = \frac{2J_x}{h}\right)$, будет иметь наибольшее значение при определенных соотношениях площадей полки и стенки.

Раскроем выражение W_x

$$W_x = \frac{F_{ст}}{6\delta_{ст}}(F_{ст} + 6F_п).$$

При условии

$$2F_п + F_{ст} = F = \text{const}$$

и фиксированных значениях толщин $\delta_п$ и $\delta_{ст}$, W_x будет иметь максимальное значение при

$$\left.\begin{aligned} F_{ст} &= 0{,}75\,F \\ F_п &= 0{,}125\,F \end{aligned}\right\} \tag{234}$$

или при

$$b = 0{,}167\,\frac{\delta_{ст}}{\delta_п}. \qquad (235)$$

2. НЕСИММЕТРИЧНЫЙ ДВУТАВР

Пусть b и δ_1, a и δ_3 — соответственно ширины и толщины верхней и нижней полок, а h и δ_2 — высота и ширина стенки несимметричного двутавра (рис. 136).

Секториальный момент инерции J_ω для этого профиля определяется по формуле (см. таблицу приложения 5)

$$J_\omega = \frac{J_{1y} J_{3y} h^2}{J_y},$$

где J_{1y} и J_{3y} обозначают соответственно моменты инерции верхней и нижней полок относительно оси Y. Представим это выражение в следующем виде:

$$J_\omega = \frac{\delta_1 b^3 \delta_3 a^3 h^2}{12(\delta_1 b^3 + \delta_3 a^3)}, \qquad (236)$$

или в площадях

$$J_\omega = \frac{F_1^3 F_3^2 F_2^2}{12\,\delta_2^2\left(\delta_3^2 F_1^3 + \delta_1^2 F_3^3\right)}, \qquad (237)$$

где F_1 и F_3 — площади сечений верхней и нижней полок,

F_2 — площадь сечения стенки,

причем

$$F_1 + F_2 + F_3 = F = \text{const}. \qquad (238)$$

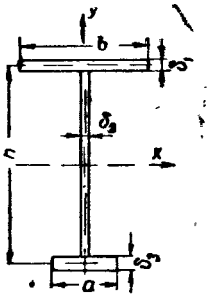


Рис. 136

Фиксируя величины толщин элементов профиля δ_1, δ_2 и δ_3, находим, что при соблюдении неизменяемости общей площади (238) секториальный момент инерции J_ω получает наибольшее значение при таких соотношениях:

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= 0{,}4F \\ F_1 + F_3 &= 0{,}6F. \end{aligned}\right\} \qquad (239)$$

Эти соотношения (239), если положить $F_1 = F_3$, т. е. если перейти к симметричному двутавру, переходят в соотношение (229) для симметричного двутавра.

Из рассмотрения выражений (236) и (237) можно сделать следующие выводы:

а) при фиксированных площадях элементов уменьшение толщины стенки δ_2 в k раз увеличивает секториальный момент инерции в k^2 раз, так как высота и толщина стенки находятся в обратно пропорциональной зависимости, а в числитель формулы (236) h входит в квадрате;

б) при фиксированных площадях элементов уменьшение толщины верхней и нижней полок для обеих полок одновременно, как видно из формулы (237), увеличивает секториальный момент инерции профиля;

в) если толщины верхней и нижней полок одинаковы $\delta_1 = \delta_3$, то наибольший секториальный момент инерции J_ω будет, когда $b = a$, т. е. для симметричного двутавра. Для того чтобы доказать это, преобразуем выражение (236)

$$\delta_1 = \delta_3;$$

положив в нем

$$b = d + c$$

и

$$a = d - c.$$

Тогда

$$J_\omega = \frac{h^2 \delta_1}{12} \cdot \frac{(d+c)^3 (d-c)^3}{(d+c)^3 + (d-c)^3}.$$

Последнее выражение при фиксированных h, δ_1 и d и переменном c достигает максимума при $c = 0$.

Что касается главных моментов инерции J_x и J_y, то для них, очевидно, остаются в силе замечания, сделанные для симметричного двутавра.

3. ШВЕЛЛЕР

Рассмотрим швеллер, изображенный на рис. 137. Размеры его b и $\delta_п$ — ширина и толщина полок; h и $\delta_{ст}$ — высота и толщина стенки.

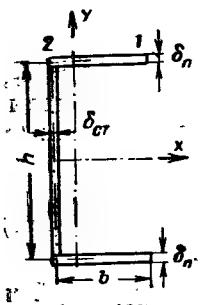


Рис. 137

Для секториального момента инерции швеллера имеем формулу (см. таблицу приложения 5)

$$J_\omega = \frac{2 J_{1x} J_{2x} c^2}{J_x} + \frac{J_{1x} b^2}{6},$$

где применительно к нашему случаю

$$c = \frac{b}{2};$$

J_{1x} и J_{2x} — соответственно моменты инерции полки и стенки относительно оси симметрии швеллера;

J_x — момент инерции всего сечения относительно той же оси.

В раскрытом виде эта формула имеет вид

$$J_\omega = \frac{b^3 h^2 \delta_п (3 b \delta_п + 2 h \delta_{ст})}{12 (6 b \delta_п + h \delta_{ст})} \qquad (240)$$

или

$$J_\omega = \frac{F_п^3 F_{ст}^2 (3F_п + 2F_{ст})}{12\,\delta_п^2\,\delta_{ст}^2 (6F_п - F_{ст})}, \tag{241}$$

где $F_п = b\,\delta_п$ — площадь сечения полки;
$F_{ст} = h\,\delta_{ст}$ — площадь сечения стенки.

Считая, что площадь всего поперечного сечения остается постоянной:

$$2F_п + F_{ст} = F = \text{const}, \tag{242}$$

найдем, при каком соотношении площадей полки и стенки секториальный момент инерции J_ω будет наибольшим.

Толщины полки и стенки $\delta_п$ и $\delta_{ст}$ при этом предполагаются произвольными, но фиксированными.

Произведя вычисления аналогично тому, как это сделано для двутавра, находим, что J_ω будет наибольшим, когда

$$\left.\begin{aligned} F_п &= 0{,}269\,F \\ F_{ст} &= 0{,}462\,F \end{aligned}\right\} \tag{243}$$

или

$$b = 0{,}582\,h\frac{\delta_{ст}}{\delta_п}. \tag{244}$$

Если мы будем менять толщины полок и стенки $\delta_п$ и $\delta_{ст}$ так, чтобы произведение их оставалось постоянным

$$\delta_п\,\delta_{ст} = \text{const},$$

то при соблюдении условия (244) соотношение между шириной полки b и высотой h будет тоже меняться при одном и том же максимальном J_ω, как это легко видеть из формул (241) и (244).

Если же менять величины $\delta_п$ и $\delta_{ст}$ без соблюдения условия $\delta_п\,\delta_{ст} = \text{const}$, то одновременно с изменением ширины полки и высоты стенки будет изменяться и сама величина наибольшего значения секториального момента инерции J_ω [формула (241)].

Секториальные моменты сопротивления для точек *1* и *2* (край полки и место пересечения полки со стенкой — рис. 137) имеют вид

$$W_{1\omega} = \frac{F_п^2 F_{ст} (3F_п + 2F_{ст})}{6\delta_п\,\delta_{ст} (3F_п + F_{ст})}; \tag{245}$$

$$W_{2\omega} = \frac{F_п F_{ст} (3F_п + 2F_{ст})}{18\,\delta_п\,\delta_{ст}}. \tag{246}$$

Заметим попутно, что $W_{2\omega}$ всегда больше, чем $W_{1\omega}$. Это легко усматривается из формул (245) и (246) и является следствием того факта, что в швеллере расстояние центра изгиба от оси стен-

ки всегда меньше половины ширины полки. Действительно, расстояние центра изгиба от оси стенки выражается формулой

$$a_x = \frac{3b^2 \delta_п}{6b\delta_п + h\delta_{ст}}.$$

Переписав ее в таком виде:

$$a_x = b\frac{3b\delta_п}{6b\delta_п + h\delta_{ст}} = b\frac{1}{2+\frac{h\delta_{ст}}{3b\delta_п}},$$

видим, что

$$a_x < \frac{b}{2}.$$

При соблюдении условия постоянства площади всего поперечного сечения (242) и фиксированных значениях толщин $\delta_п$ и $\delta_{ст}$ секториальные моменты сопротивления будут достигать своего наибольшего значения при таких соотношениях площадей полки и стенки:

для точки *1*

$$\max W_{1\omega} \text{ будет при } \left.\begin{aligned} F_п &= 0{,}306\,F; \\ F_{ст} &= 0{,}388\,F; \end{aligned}\right\} \tag{247}$$

для точки *2*

$$\max W_{2\omega} \text{ будет при } \left.\begin{aligned} F_п &= 0{,}232\,F; \\ F_{ст} &= 0{,}535\,F. \end{aligned}\right\} \tag{248}$$

Главный момент инерции J_x и момент сопротивления W_x имеют такие же аналитические выражения, как и для двутавра, и поэтому соответственные выводы, сделанные при рассмотрении двутавра, распространяются и на швеллер.

Главный момент инерции J_y и момент сопротивления W_{1y} относительно точки *1* (свободный край полки) максимумов в аналитическом смысле не имеют; величины их возрастают с уменьшением высоты стенки швеллера.

Что касается момента сопротивления W_{2y} относительно точки *2* (вообще говоря, для точек, лежащих на оси стенки), то он имеет вид

$$W_{2y} = \frac{F_п(2F - 3F_п)}{3\delta_п}. \tag{249}$$

При постоянстве общей площади сечения (242) и фиксировании значений $\delta_п$ момент сопротивления W_{2y} принимает наибольшее значение при

$$F_п = F_{ст} = \frac{1}{3}F. \tag{250}$$

Пусть b и $\delta_п$ — соответственно ширина и толщина полок, h и $\delta_{ст}$ — высота и толщина стенки Z-образного профиля (рис. 138). Как известно, центр тяжести и центр изгиба этого профиля совпадают и находятся посредине оси стенки.

Секториальный момент инерции для этого профиля найдем, пользуясь изложенным выше методом произвольных эпюр (см. § 14). Он будет иметь вид

$$J_\omega = \frac{F_п^2 F_{ст}^2 (F_п + 2F_{ст})}{12\,\delta_п^2\,\delta_{ст}^2\,(2F_п + F_{ст})}. \qquad (251)$$

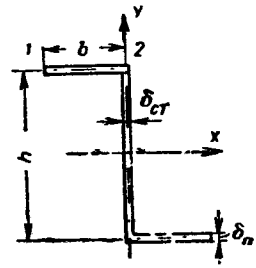


Рис. 138

Как в предыдущих случаях, полагая неизменной площадь всего поперечного сечения стержня

$$2F_п + F_{ст} = F = \text{const}$$

и фиксируя величины толщин $\delta_п$ и $\delta_{ст}$, находим, что максимальное значение J_ω достигается при таких же соотношениях площадей полки и стенки, как и в швеллере, а именно

$$\text{при} \quad \left.\begin{aligned} F_п &= 0{,}269\,F; \\ F_{ст} &= 0{,}462\,F. \end{aligned}\right\} \qquad (252)$$

Секториальные моменты сопротивления для точки *1* (свободный край полки) и точки *2* (пересечение оси полки и стенки) выражаются такими формулами:

$$W_{1\omega} = \frac{F_п^2 F_{ст} (F_п + 2F_{ст})}{6\delta_п\,\delta_{ст}\,(F_п + F_{ст})}; \qquad (253)$$

$$W_{2\omega} = \frac{F_п F_{ст} (F_п + 2F_{ст})}{6\delta_п\,\delta_{ст}}. \qquad (254)$$

При соблюдении постоянства площади всего поперечного сечения и фиксированных величинах толщин эти моменты будут принимать наибольшие значения при таких соотношениях площадей полки и стенки:

$$W_{1\omega} \text{ будет при: } \left.\begin{aligned} F_п &= 0{,}306\,F; \\ F_{ст} &= 0{,}388\,F \end{aligned}\right\} \qquad (255)$$

(такие же соотношения как и для швеллера);

$$W_{2\omega} \text{ будет при: } \left.\begin{aligned} F_п &= 0{,}188\,F; \\ F_{ст} &= 0{,}624\,F. \end{aligned}\right\} \qquad (256)$$

Что касается главных моментов инерции J_x и J_y, то выявление в общем виде оптимальных соотношений, соответствующих

максимуму J_x или J_y, является задачей довольно сложной, так как здесь главные оси не параллельны полкам и стенке профиля, а составляют с ними некоторый угол, зависящий также от соотношения между размерами элементов, составляющих профиль.

Переходим к рассмотрению профилей двутаврового, швеллерного и Z-образного сечений, усложненных на краях полок отгибами, направленными внутрь или наружу контура, и выясним, как при этом изменяется величина секториального момента инерции J_ω.

5. ДВУТАВР С ПОЛКАМИ, УСИЛЕННЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Рассмотрим симметричный двутавр, полки которого усилены продольными ребрами жесткости следующих трех типов:

а) ребра выступают наружу профиля (рис. 139);

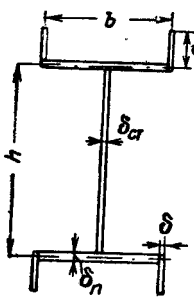


Рис. 139

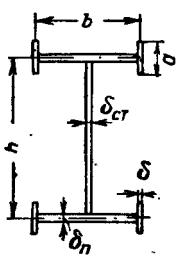


Рис. 140

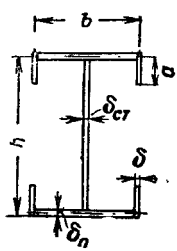


Рис. 141

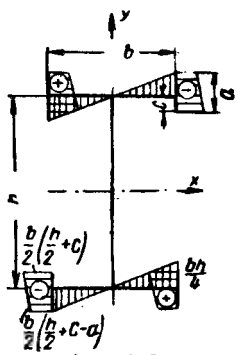


Рис. 142

б) ребра расположены симметрично по отношению к полкам профиля (рис. 140);

в) ребра выступают внутрь профиля (рис. 141).

Выведем формулу секториального момента инерции для случая более общего, когда ребра расположены несимметрично по отношению к полке профиля.

Обозначив расстояние внутреннего края ребра от оси полки через c (рис. 142) и давая ему различные значения, можем получить J_ω для всех трех интересующих нас случаев. Так как сечение это обладает двумя осями симметрии, то не составляет труда сразу построить эпюру главных секториальных площадей (рис. 142). Вычислив интеграл от квадрата этой эпюры по площади всего поперечного сечения, мы получим, как известно, секториальный момент инерции его.

Он будет иметь вид

$$J_\omega = \frac{b^2}{24}\left[h^2 b\delta_п + 2a\delta(3h^2 - 6ah + 4a^2) + 24ac\delta(c + h - a)\right]. \quad (257)$$

Давая в этой формуле величине c значения 0, $\frac{a}{2}$ и a, получим J_ω для трех указанных выше случаев

$$\text{а)}\quad J_\omega = \frac{b^2}{24}\left[h^2 b\delta_п + 2a\delta(3h^2 + a^2) - 6a^2\delta(2h - a)\right]; \qquad (258)$$

$$\text{б)}\quad J_\omega = \frac{b^2}{24}\left[h^2 b\delta_п + 2a\delta(3h^2 + a^2)\right]; \qquad (259)$$

$$\text{в)}\quad J_\omega = \frac{b^2}{24}\left[h^2 b\delta_п + 2a\delta(3h^2 + a^2) + 6a^2\delta(2h + a)\right]. \qquad (260)$$

Поскольку все величины, входящие в состав написанных выше формул, существенно положительны и $2h - a > 0$, из взаимного сопоставления этих формул можно заключить, что наиболее выгодным в смысле величины J_ω будет профиль с ребрами, выступающими внутрь профиля, а наименее выгодным будет профиль с ребрами, выступающими наружу.

Профиль же, изображенный на рис. 141, занимает промежуточное между ними положение.

6. ШВЕЛЛЕР С КОНЦАМИ ПОЛОК, ЗАГНУТЫМИ ВНУТРЬ (рис. 143) ИЛИ НАРУЖУ (рис. 144) ПРОФИЛЯ

Формулы секториальных моментов инерции для этих двух случаев выведены при помощи метода произвольных эпюр, и так как в общем случае (при различных толщинах полки и стенки) они очень громоздки, мы ограничились случаем, когда толщина сечения всюду одинакова, и положили для простоты $\delta = 1$.

В результате вычислений получено:

а) для швеллера с отгибами полок внутрь профиля

$$J_\omega = \frac{h^2 b^2\left[h^2 b(2h + 3b) + 4ab(3h^2 + 12ah + 28a^2) + 6ah^2(h + 2a) + 8a^3(h + 6a)\right]}{12(h^3 + 6h^2 b + 6h^2 a - 12ha^2 + 8a^3)}; \qquad (261)$$

б) для швеллера с концами полок, загнутыми наружу

$$J_\omega = \frac{h^2 b^2\left[h^2 b(2h + 3b) + 4ab(3h^2 - 12ah + 28a^2) + 6ah^2(h - 2a) + 8a^3(h + 6a)\right]}{12(h^3 + 6h^2 b + 6h^2 a + 12ha^2 + 8a^3)}. \qquad (262)$$

Сравнивая формулы (261) и (262), замечаем, что в числителе формулы (261) все величины (сами по себе существенно положительные) входят со знаком плюс, в числителе же формулы (262) некоторые величины имеют знак минус. Следовательно, числитель (261) больше числителя (262).

Про знаменатель же можно сказать обратное: знаменатель (261) на тех же основаниях меньше знаменателя (262). Отсюда можно сделать вывод, что J_ω в первом случае, т. е. для швеллера с концами полок, загнутыми внутрь, всегда больше J_ω для швеллера с концами, загнутыми наружу.

Величина J_ω для простого швеллера (без отгибов), по-видимому, имеет промежуточное значение между этими двумя.

Исследуя J_ω, выражаемый формулой (261) для швеллера с концами, загнутыми внутрь, на условный максимум (при условии постоянства площади всего поперечного сечения), приходим к выводу, что наиболее оптимальным в смысле величины J_ω является

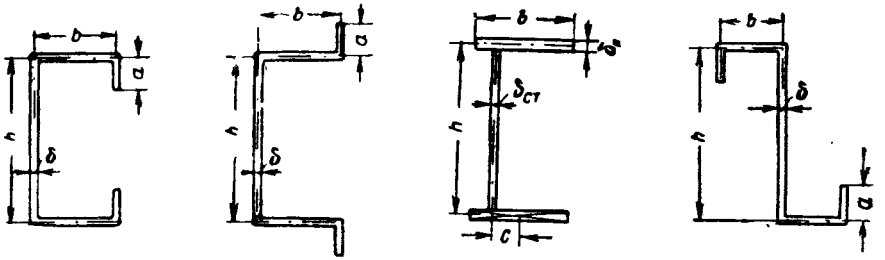


Рис. 143 Рис. 144 Рис. 145 Рис. 146

швеллер с концами полок, загнутыми внутрь, при таком соотношении составляющих его элементов:

$$b = h = 2a,$$

т. е. когда сечение представляет квадрат с разрезом в середине одной стороны.

7. ШВЕЛЛЕР С ВЫСТУПАЮЩИМИ КРАЯМИ ПОЛОК (рис. 145)

Применив для швеллера с выступающими краями полок метод произвольных эпюр, мы получили для секториального момента инерции следующую формулу:

$$J_\omega = \frac{bh^2\delta_п(6b^3\delta_п - b^2h\delta_{ст} + 12hc^2\delta_{ст})}{24(6b\delta_п + h\delta_{ст})}. \qquad (263)$$

Здесь c — расстояние от середины полки до оси стенки.

Из этой формулы можно получить выражение для J_ω двутавра, положив $c=0$, и J_ω для швеллера, положив $c=\frac{b}{2}$. Так как $0 \leqslant c \leqslant \frac{b}{2}$, то из рассмотрения формулы (263) заключаем, что секториальный момент инерции будет у швеллера наибольшим, у двутавра — наименьшим, у профиля, изображенного на рис. 145, он будет иметь промежуточное значение.

8. Z-ОБРАЗНЫЙ ПРОФИЛЬ С ЗАГНУТЫМИ ВНУТРЬ КРАЯМИ ПОЛОК (рис. 146)

Для этого профиля методом произвольных эпюр получено выражение для секториального момента инерции в виде

$$J_\omega = \frac{b^2[h^2b(2h+b) + 2ah(3h^2+6ah+4a^2) + 4abh(h+3a) + 4a^3(4b+a)]}{12(h+2b+2a)}. \qquad (264)$$

Чтобы не усложнять формулу, толщина была принята одинаковой для всего сечения и положена равной единице $\delta = 1$.

Исследование выражения (264) на условный максимум при условии постоянства общей площади поперечного сечения (что в данном случае приводится к условию постоянства периметра сечения) с целью выявления оптимальных соотношений между h, b и a приводит к совместному решению алгебраических систем с тремя неизвестными довольно высокого (четвертого и пятого) порядка, что в общем виде сделать затруднительно. Поэтому вопрос об оптимальном соотношении элементов, составляющих профиль, мы разрешили в числовом виде на значительном количестве примеров (около 25) и пришли к выводу, что с точки зрения кручения наиболее выгодным является Z-образный профиль без загнутых краев; в этом отношении Z-образный профиль ведет себя совершенно обратно профилю швеллерного типа, хотя в других отношениях они очень сходны друг с другом.

§ 31. СРАВНЕНИЕ СЕКТОРИАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРОФИЛЕЙ

Исследование вопроса рациональности различных профилей с точки зрения величины их секториального момента инерции проведено, как уже было указано выше, для различных (числом 31) типов профилей, имеющих одинаковую толщину $\delta = 1$ *см* и одинаковый периметр контура $P = 120$ *см*. Большинство этих профилей встречается на практике (с № 8 до № 31 табл. 30).

В качестве эталонов для сравнения в числе этих профилей рассмотрены 7 незамкнутых профилей (в табл. № 1—7) трубчатого сечения.

Для большинства из этих профилей секториальный момент инерции J_ω был вычислен при помощи выведенных нами общих формул; для сложных профилей общие формулы оказались настолько громоздкими, что более целесообразным оказалось величину J_ω получить непосредственно для соответствующих размеров профиля в числовом виде. Результаты полученных таким образом числовых величин секториальных моментов инерции J_ω рассмотренных типов профилей представлены в виде табл. 30. Сравнительный анализ этих результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Наибольшей секториальной жесткостью обладают открытые профили, полученные путем разреза трубы (№ 1—7).

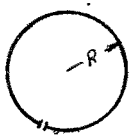
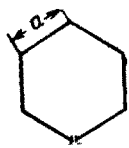
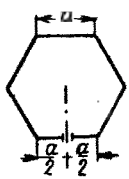
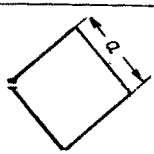
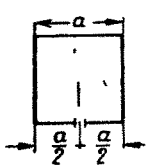
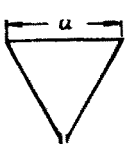
2. С увеличением числа граней трубчатого сечения секториальная жесткость его увеличивается.

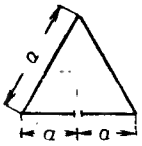
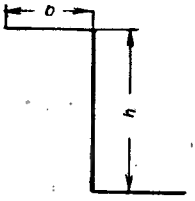
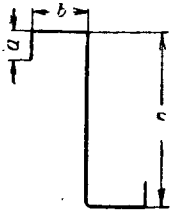
3. Наибольшей жесткостью из этого типа профилей (№ 1—7) и вообще обладает открытый профиль кругового сечения (№ 1).

4. Сравнивая между собой величины J_ω профилей № 2 с № 3, № 4 с № 5 и № 6 с № 7, устанавливаем, что при разрезе трубча-

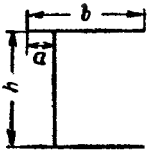
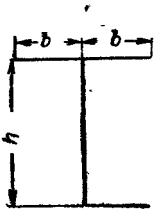
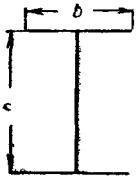
Таблица 30

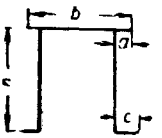
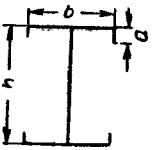
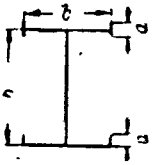
Секториальные моменты инерции различных профилей (периметр — $P = 120$ *см*, толщина — $\delta = 1$ *см*)

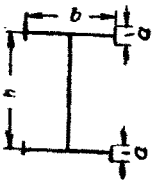
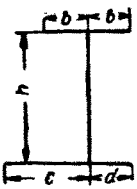
№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	J_ω *см*^{6}
1		$2\pi R = 120$	$20{,}6 \cdot 10^6$
2		$a = 20$	$17{,}3 \cdot 10^6$
3		$a = 20$	$16{,}8 \cdot 10^6$
4		$a = 30$	$14{,}2 \cdot 10^6$
5		$a = 30$	$11{,}9 \cdot 10^6$
6		$a = 40$	$10{,}7 \cdot 10^6$

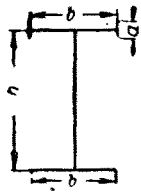
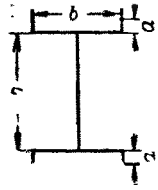
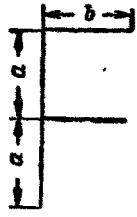
№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	J_ω *см*^{6}
7		$a = 40$	$4{,}26 \cdot 10^6$
8		$b = 32$ $h = 56$	$10{,}3 \cdot 10^6$
		$b = 30$ $h = 60$	$10{,}1 \cdot 10^6$
		$b = 40$ $h = 40$	$8{,}53 \cdot 10^6$
		$b = 20$ $h = 80$	$6{,}4 \cdot 10^6$
9		$a = 3$ $b = 31$ $h = 52$	$10{,}2 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 20$ $h = 40$	$8{,}54 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 30$ $h = 20$	$8{,}33 \cdot 10^6$
		$a = 15$ $b = 15$ $h = 60$	$7 \cdot 10^6$
		$a = 10$ $b = 40$ $h = 20$	$5{,}2 \cdot 10^6$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	J_ω *см*^{6}
10		$a = 10$ $b = 25$ $h = 50$	$8{,}41 \cdot 10^6$
		$a = 7{,}5$ $b = 35$ $h = 35$	$7{,}2 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 70$	$6{,}07 \cdot 10^6$
11		$b = 32$ $h = 56$	$7{,}18 \cdot 10^6$
		$b = 30$ $h = 60$	$7{,}09 \cdot 10^6$
		$b = 40$ $h = 40$	$6{,}1 \cdot 10^6$
		$b = 20$ $h = 80$	$4{,}69 \cdot 10^6$
12		$a = 30$ $b = 30$	$5{,}43 \cdot 10^6$
		$a = 40$ $b = 20$	$4{,}2 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 40$	$4{,}03 \cdot 10^6$
13		$a = 5$ $b = 50$ $h = 35$	$5{,}18 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 70$ $h = 25$	$5{,}07 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 50$	$0{,}85 \cdot 10^6$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	J_ω *см*^{6}
14		$a = 5$ $b = 20$ $h = 70$	$4{,}9 \cdot 10^6$
		$a = 10$ $b = 25$ $h = 50$	$3{,}74 \cdot 10^6$
		$a = 7{,}5$ $b = 35$ $h = 35$	$3{,}63 \cdot 10^6$
15		$a = 7{,}5$ $b = 30$ $h = 60$	$4{,}81 \cdot 10^6$
		$a = 10$ $b = 40$ $h = 40$	$4{,}72 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 80$	$2{,}77 \cdot 10^6$
16		$b = 20$ $h = 60$	$4{,}48 \cdot 10^6$
		$b = 26$ $h = 42$	$4{,}16 \cdot 10^6$
		$b = 30$ $h = 30$	$2{,}88 \cdot 10^6$
		$b = 13$ $h = 81$	$2{,}58 \cdot 10^6$
17		$b = 36$ $h = 48$	$4{,}47 \cdot 10^6$
		$b = 40$ $h = 40$	$4{,}26 \cdot 10^6$
		$b = 30$ $h = 60$	$4{,}05 \cdot 10^6$
		$b = 20$ $h = 80$	$2{,}13 \cdot 10^6$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	J_ω *см*^{6}
18		$a = 5$ $c = 5$ $b = 50$ $h = 30$	$4{,}20 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $c = 5$ $b = 70$ $h = 20$	$3{,}98 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $c = 7{,}5$ $b = 35$ $h = 35$	$2{,}21 \cdot 10^6$
19		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	$4{,}09 \cdot 10^6$
		$a = 7{,}5$ $b = 30$ $h = 30$	$3{,}42 \cdot 10^6$
		$a = 7{,}5$ $b = 20$ $h = 50$	$3{,}33 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	$3{,}32 \cdot 10^6$
		$a = 12$ $b = 24$ $h = 24$	$2{,}65 \cdot 10^6$
20		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	$3{,}84 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	$3{,}16 \cdot 10^6$
		$a = 7{,}5$ $b = 20$ $h = 50$	$3{,}02 \cdot 10^6$
		$a = 7{,}5$ $b = 30$ $h = 30$	$2{,}98 \cdot 10^6$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	J_ω *см*^{6}
21		$a = 30$ $b = 42$ $h = 48$	$3{,}8 \cdot 10^6$
		$a = 30$ $b = 50$ $h = 40$	$2{,}96 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 40$ $h = 60$	$2{,}13 \cdot 10^6$
		$a = 15$ $b = 25$ $h = 80$	$1{,}48 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 52$ $h = 48$	$1{,}45 \cdot 10^6$
22		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	$3{,}61 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	$3 \cdot 10^6$
		$a = 7{,}5$ $b = 20$ $h = 50$	$2{,}72 \cdot 10^6$
		$a = 7{,}5$ $b = 30$ $h = 30$	$2{,}57 \cdot 10^6$
23		$b = 15$ $c = 30$ $h = 45$	$3{,}57 \cdot 10^6$
		$b = 20$ $c = 30$ $h = 30$	$3{,}2 \cdot 10^6$
		$b = 10$ $c = 30$ $h = 60$	$2{,}18 \cdot 10^6$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	J_ω *см*^{6}
24		$a = 6$ $b = 30$ $h = 48$	$3{,}57 \cdot 10^6$
		$a = 10$ $b = 30$ $h = 40$	$2{,}74 \cdot 10^6$
		$a = 10$ $b = 20$ $h = 60$	$1{,}94 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 15$ $h = 80$	$1{,}35 \cdot 10^6$
25		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	$3{,}19 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	$2{,}72 \cdot 10^6$
		$a = 7{,}5$ $b = 20$ $h = 50$	$2{,}2 \cdot 10^6$
		$a = 7{,}5$ $b = 30$ $h = 30$	$1{,}9 \cdot 10^6$
26		$a = 30$ $b = 30$	$2{,}85 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 40$	$2{,}52 \cdot 10^6$
		$a = 40$ $b = 20$	$1{,}72 \cdot 10^6$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	J_ω *см*^{6}
27		$b = 20$ $h = 30$	$2{,}2 \cdot 10^6$
		$b = 24$ $h = 24$	$1{,}87 \cdot 10^6$
		$b = 13{,}3$ $h = 40$	$1{,}51 \cdot 10^6$
28		$b = 15$ $h = 60$	$1{,}93 \cdot 10^6$
		$b = 20$ $h = 40$	$1{,}84 \cdot 10^6$
		$b = 10$ $h = 80$	$1{,}13 \cdot 10^6$
29		$a = 10$ $b = 15$ $h = 70$	$1{,}62 \cdot 10^6$
		$a = 15$ $b = 30$ $h = 30$	$1{,}45 \cdot 10^6$
30		$a = 50$ $b = 10$	$1{,}29 \cdot 10^6$
		$a = 52{,}5$ $b = 7{,}5$	$0{,}626 \cdot 10^6$
		$a = 55$ $b = 5$	$0{,}216 \cdot 10^6$
		$a = 60$ $b = 0$	0
31		$a = 50$ $b = 10$	$1{,}11 \cdot 10^6$
		$a = 52{,}5$ $b = 7{,}5$	$0{,}575 \cdot 10^6$
		$a = 55$ $b = 5$	$0{,}207 \cdot 10^6$
		$a = 60$ $b = 0$	0

того профиля вдоль ребра секториальная жесткость его больше, чем при разрезе такого же профиля вдоль середины грани.

5. Из профилей не трубчатой формы сечения наибольшей секториальной жесткостью обладает профиль Z-образного сечения (№ 8). При одних и тех же размерах высоты стенки и ширины полки он в среднем в 1,4 раза жестче швеллера (№ 11) и в 2—3 раза жестче двутавра (№ 17).

6. Отгиб концов полок Z-образного профиля внутрь (№ 9) (а тем более, по-видимому, наружу) во всяком случае не увеличивает его секториальной жесткости (см. выше выводы по Z-образному профилю).

7. Швеллерный профиль (№ 11) при одних и тех же размерах высоты стенки и ширины полки в среднем в 1,5—2 раза жестче двутавра (№ 17).

8. Отгибы полок швеллера внутрь (№ 10) значительно увеличивают его секториальную жесткость (см. выше выводы по швеллеру), а отгибы наружу (№ 14), наоборот, уменьшают ее. То же самое относится и к аналогичным стержням $П$-образного сечения, помещенным в таблице под № 13 и 18.

9. Сравнительно большой секториальной жесткостью обладает профиль, составленный из двух равнобоких или неравнобоких уголков, по типу, изображенному в таблице под № 12; он примерно в 1,5—2,5 раза жестче аналогичного профиля из двух уголков, изображенного в таблице под № 26, и значительно жестче профилей, составленных из комбинаций уголков и швеллеров по типу изображенных под № 27, 28 и 29.

10. Несимметричный двутавр со смещенной стенкой (№ 15) по секториальной жесткости занимает промежуточное значение между швеллером (№ 11) и симметричным двутавром (№ 17).

11. Несимметричный двутавр (№ 21) с разными ширинами верхней и нижней полок при одной и той же высоте, как и у симметричного двутавра (№ 17), оказывается менее жестким, чем последний; при этом чем больше разница в ширинах верхней и нижней полок, тем менее жесток профиль (21), так как в таком случае он больше приближается по типу к тавровому профилю, для которого, как известно, секториальная жесткость равна нулю.

12. Удлинение одной из полок двутавра в одну сторону за счет уменьшения другой полки (№ 23) значительно снижает его секториальную жесткость.

13. Отгибы полок двутавра как внутрь (№ 19), так и наружу (№ 25) уменьшают его (№ 17) секториальную жесткость, причем при одних и тех же размерах высоты стенки, ширины полки и величины отгиба профиль с отгибами внутрь (№ 19) жестче профиля с отгибами наружу (№ 25) в 1,2—1,8 раза.

Промежуточное положение между этими профилями (№ 19 и 25) занимают профили, представляющие собой соединение одной стенкой двух двутавров (№ 22), двутавра со швеллером (№ 20) и двутавра с полосой (№ 24).

14. Профиль углотаврового типа (№ 16) в отношении секториальной жесткости, как и следовало ожидать, является промежуточным (во всяком случае для практически применяемых соотношений размеров) между соответствующим швеллером (№ 11) и двутавром (№ 17), будучи значительно менее жестким по сравнению с первым и несколько более жестким, чем второй.

15. Очень малой секториальной жесткостью обладают профили, составленные из уголка и швеллера по типу, изображенному в табл. 30 под № 28 и 29.

16. Секториальная жесткость уголковых профилей, как известно, равна нулю. Уголки же с отгибами полок внутрь (№ 30) или наружу (№ 31) обладают секториальной жесткостью, которая по мере увеличения отгибов увеличивается, достигая своего максимума при отгибах внутрь, равных величине полки (№ 4).

Уголок с отгибами концов полок наружу менее жесток, чем уголок с отгибами концов полок внутрь, и при ширине отгибов, равной ширине полки, его жесткость в 4 раза менее жесткости соответствующего уголка с отгибами внутрь (№ 4)*.

§ 32. СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРОФИЛЕЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ ИХ ПРИ ИЗГИБЕ

По существу, работа профилей на изгиб в достаточной мере исследована, не говоря уже о том, что и само исследование в силу сравнительной простоты вычислительного аппарата по сравнению с исследованием работы тех же профилей на кручение (по крайней мере в настоящее время ввиду новизны вопроса) доступно самым широким кругам лиц, нуждающимся в этом. Тем не менее мы позволили себе привести сравнительную табл. 31 величин главных экваториальных моментов инерции J_x и J_y для большинства типов профилей, данных в табл. 30, при тех же соотношениях размеров элементов, составляющих профили, и при том же общем для всех профилей постоянном периметре $P=120$ *см* и толщине $\delta=1$ *см*. Это сделано с той целью, чтобы при совместном рассмот-

---

* Это можно видеть из формул J_ω для обоих типов уголков (полагая в них $b=a$).

Для уголка с отгибами концов полок внутрь имеем

$$J_\omega = \frac{a^4 b^3 (4a+3b)}{6(a^3+3a^2b-3ab^2+b^3)}, \qquad (А)$$

а для уголка с отгибами концов полок наружу

$$J_\omega = \frac{a^4 b^3 (4a+3b)}{6(a+b)^3}. \qquad (Б)$$

Из формулы (Б), кроме того, можно усмотреть, что при $b=a$, J_ω для уголка с отгибами наружу максимальное, так как при $b>a$ J_ω начинает убывать.

рении обеих таблиц можно было бы представить себе, хотя может быть и не так отчетливо и исчерпывающе, как то было бы желательно, но все же более полно, чем при рассмотрении одной табл. 30 (трактующей только о кручении), поведение соответствующих профилей при совместном действии изгиба и кручения.

Сделаем некоторые выводы из данных табл. 31.

Сравнивая между собой сначала главные моменты инерции различных симметричных профилей при одной и той же высоте профиля h, можно установить следующее.

1. Наиболее жестким из рассмотренных симметричных профилей (№ 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 и 18) является швеллер (№ 4). Например, по сравнению с двутавром (№ 10), имея одинаковый с ним по величине J_x, он обладает значительно большей величиной J_y. Несколько особо только нужно отметить профиль, составленный из листа и двух швеллеров с выступающими полками наружу (№ 18), у которого J_x немного больше, чем у швеллера, но зато J_y значительно меньше.

2. Смещение стенки двутавра, не меняя величины J_x, увеличивает J_y, приближая профиль к швеллерному типу (№ 8, 4 и 10).

3. Увеличение одной из полок двутавра за счет укорочения другой уменьшает величину J_x и увеличивает J_y (№ 14 и 10).

4. Замена более широкой полки двутавра (№ 14) элементом двутаврового типа (№ 17), оставляя неизменным J_x, уменьшает J_y.

5. Замена полок обыкновенного двутавра (№ 10) сложными элементами двутаврового (№ 15) или швеллерного типа (№ 12 и 18) или их комбинацией (№ 13) уменьшает величину J_y в одном и том же отношении для всех типов. Что же касается величины J_x, то при замене № 10 на № 15 величина J_x не меняется; при замене на № 18 — увеличивается, а на № 12 — уменьшается по сравнению с обыкновенным двутавром (№ 10) и, наконец, при замене на № 13 (комбинация элементов двутаврового и швеллерного типов) величина J_x имеет промежуточное значение между J_x для № 12 и для № 18, оставаясь в то же время меньшей, чем у обыкновенного двутавра.

6. Отгибы концов полок в швеллере (№ 3 и 7) уменьшают величину J_y, величина же J_x в швеллере с отгибами наружу (№ 7) больше, а в швеллере с отгибами внутрь (№ 3) меньше, чем в обыкновенном швеллере (№ 4).

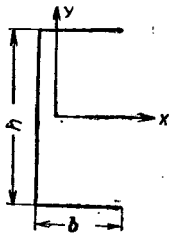
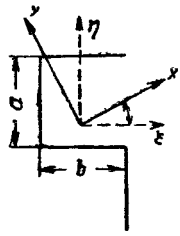
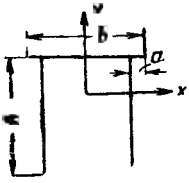
Переходим к сравнению несимметричных профилей как с симметричными профилями, так и между собою при одной и той же высоте профиля h.

Здесь приходится при сравнении величин главных моментов инерции еще учитывать и изменение угла наклона φ главных осей по отношению к вспомогательным осям, направление которых совпадает с направлением элементов профиля. Величина угла φ приводится в этой же табл. 31.

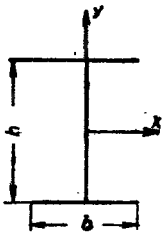
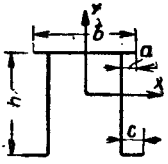
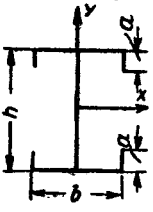
Таблица 31

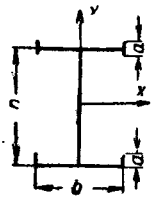
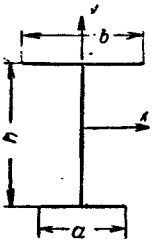
Главные экваториальные моменты инерции (периметр — $P=120$ *см*, толщина — $\delta=1$ *см*)

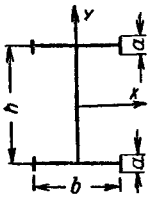
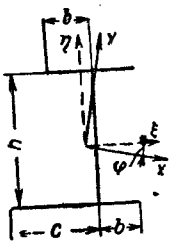
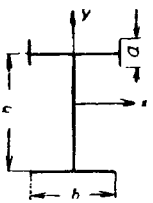
№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	φ	J_x *см*⁴	J_y *см*⁴
1		$b=32$ $h=56$	26°35′	$7{,}92\cdot10^4$	$0{,}723\cdot10^4$
		$b=30$ $h=60$	22°30′	$8{,}28\cdot10^4$	$0{,}724\cdot10^4$
		$b=40$ $h=40$	42°37′	$7{,}22\cdot10^4$	$0{,}775\cdot10^4$
		$b=20$ $h=80$	8°45′	$10{,}9\cdot10^4$	$0{,}297\cdot10^4$
2		$a=3$ $b=31$ $h=52$	37°05′	$7{,}96\cdot10^4$	$1{,}83\cdot10^4$
		$a=20$ $b=20$ $h=40$	31°15′	$7{,}81\cdot10^4$	$0{,}6\cdot10^4$
		$a=20$ $b=30$ $h=20$	—8°24′	$0{,}67\cdot10^4$	$6{,}88\cdot10^4$
		$a=15$ $b=15$ $h=60$	17°00′	$6{,}59\cdot10^4$	$0{,}56\cdot10^4$
		$a=10$ $b=40$ $h=20$	—11°10′	$0{,}54\cdot10^4$	$1{,}11\cdot10^4$
3		$a=10$ $b=25$ $h=50$	0	$4{,}98\cdot10^4$	$1{,}24\cdot10^4$
		$a=7{,}5$ $b=35$ $h=35$	0	$2{,}86\cdot10^4$	$1{,}52\cdot10^4$
		$a=5$ $b=20$ $h=70$	0	$8{,}8\cdot10^4$	$0{,}633\cdot10^4$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	φ	J_x *см*⁴	J_y *см*⁴
4		$b=32$ $h=56$	0	$6{,}47\cdot10^4$	$1{,}31\cdot10^4$
		$b=30$ $h=60$	0	$7{,}2\cdot10^4$	$1{,}12\cdot10^4$
		$b=40$ $h=40$	0	$3{,}75\cdot10^4$	$2{,}13\cdot10^4$
		$b=20$ $h=80$	0	$10{,}7\cdot10^4$	$0{,}4\cdot10^4$
5		$a=30$ $b=30$	26°33′	$4{,}5\cdot10^4$	$1{,}13\cdot10^4$
		$a=40$ $b=20$	14°02′	$7{,}33\cdot10^4$	$0{,}534\cdot10^4$
		$a=20$ $b=40$	—28°10′	$1{,}17\cdot10^4$	$3{,}09\cdot10^4$
6		$a=5$ $b=50$ $h=35$	0	$1{,}61\cdot10^4$	$3{,}84\cdot10^4$
		$a=5$ $b=70$ $h=25$	0	$0{,}716\cdot10^4$	$7{,}36\cdot10^4$
		$a=5$ $b=20$ $h=50$	0	$3{,}13\cdot10^4$	$0{,}317\cdot10^4$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	φ	J_x *см*⁴	J_y *см*⁴
7		$a=5$ $b=20$ $h=70$	0	$9{,}17\cdot10^4$	$0{,}633\cdot10^4$
		$a=10$ $b=25$ $h=50$	0	$5{,}98\cdot10^4$	$1{,}24\cdot10^4$
		$a=7{,}5$ $b=35$ $h=35$	0	$3{,}26\cdot10^4$	$1{,}52\cdot10^4$
8		$a=7{,}5$ $b=30$ $h=60$	0	$7{,}2\cdot10^4$	$0{,}62\cdot10^4$
		$a=10$ $b=40$ $h=40$	0	$3{,}75\cdot10^4$	$1{,}33\cdot10^4$
		$a=5$ $b=20$ $h=80$	0	$10{,}7\cdot10^4$	$0{,}24\cdot10^4$
9		$b=20$ $h=60$	6°26′	$6{,}97\cdot10^4$	$0{,}693\cdot10^4$
		$b=26$ $h=42$	19°24′	$4{,}13\cdot10^4$	$1{,}35\cdot10^4$
		$b=13$ $h=81$	2°05′	$10{,}6\cdot10^4$	$0{,}21\cdot10^4$
		$b=30$ $h=30$	—31°51′	$1{,}17\cdot10^4$	$3{,}06\cdot10^4$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	φ	J_x *см*⁴	J_y *см*⁴
10		$b=36$ $h=48$	0	$5{,}08\cdot10^4$	$0{,}78\cdot10^4$
		$b=40$ $h=40$	0	$3{,}75\cdot10^4$	$1{,}07\cdot10^4$
		$b=30$ $h=60$	0	$7{,}2\cdot10^4$	$0{,}45\cdot10^4$
		$b=20$ $h=80$	0	$10{,}7\cdot10^4$	$0{,}07\cdot10^4$
11		$a=5$ $c=5$ $b=50$ $h=30$	0	$1{,}4\cdot10^4$	$3{,}46\cdot10^4$
		$a=5$ $c=5$ $b=70$ $h=20$	0	$0{,}633\cdot10^4$	$6{,}48\cdot10^4$
		$a=5$ $c=7{,}5$ $b=35$ $h=35$	0	$2{,}14\cdot10^4$	$0{,}871\cdot10^4$
12		$a=5$ $b=30$ $h=40$	0	$3{,}55\cdot10^4$	$0{,}9\cdot10^4$
		$a=7{,}5$ $b=30$ $h=30$	0	$1{,}97\cdot10^4$	$1{,}13\cdot10^4$
		$a=7{,}5$ $b=20$ $h=50$	0	$4{,}91\cdot10^4$	$0{,}433\cdot10^4$
		$a=5$ $b=20$ $h=60$	0	$6{,}78\cdot10^4$	$0{,}333\cdot10^4$
		$a=12$ $b=24$ $h=24$	0	$1{,}04\cdot10^4$	$0{,}921\cdot10^4$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	φ	J_x *см*⁴	J_y *см*⁴
13		$a=5$ $b=30$ $h=40$	0	$3{,}64\cdot10^4$	$0{,}9\cdot10^4$
		$a=5$ $b=20$ $h=60$	0	$7{,}06\cdot10^4$	$0{,}333\cdot10^4$
		$a=7{,}5$ $b=20$ $h=50$	0	$5{,}17\cdot10^4$	$0{,}433\cdot10^4$
		$a=7{,}5$ $b=30$ $h=30$	0	$2{,}11\cdot10^4$	$1{,}13\cdot10^4$
14		$a=30$ $b=42$ $h=48$	0	$5\cdot10^4$	$0{,}842\cdot10^4$
		$a=30$ $b=50$ $h=40$	0	$3{,}6\cdot10^4$	$1{,}27\cdot10^4$
		$a=20$ $b=40$ $h=60$	0	$6{,}91\cdot10^4$	$0{,}6\cdot10^4$
		$a=15$ $b=25$ $h=80$	0	$10{,}5\cdot10^4$	$0{,}158\cdot10^4$
		$a=20$ $b=52$ $h=48$	0	$4{,}58\cdot10^4$	$1{,}24\cdot10^4$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	φ	J_x *см*⁴	J_y *см*⁴
15		$a=5$ $b=30$ $h=40$	0	$3{,}75\cdot10^4$	$0{,}9\cdot10^4$
		$a=5$ $b=20$ $h=60$	0	$7{,}2\cdot10^4$	$0{,}333\cdot10^4$
		$a=7{,}5$ $b=20$ $h=50$	0	$5{,}43\cdot10^4$	$0{,}433\cdot10^4$
		$a=7{,}5$ $b=30$ $h=30$	0	$2{,}26\cdot10^4$	$1{,}13\cdot10^4$
16		$b=15$ $c=30$ $h=45$	11°30′	$4{,}4\cdot10^4$	$1{,}01\cdot10^4$
		$b=20$ $c=30$ $h=30$	24°55′	$2{,}4\cdot10^4$	$1{,}49\cdot10^4$
		$b=10$ $c=30$ $h=60$	9°11′	$7{,}06\cdot10^4$	$0{,}71\cdot10^4$
17		$a=6$ $b=30$ $h=48$	0	$5\cdot10^4$	$0{,}72\cdot10^4$
		$a=10$ $b=30$ $h=40$	0	$3{,}61\cdot10^4$	$0{,}9\cdot10^4$
		$a=10$ $b=20$ $h=60$	0	$6{,}92\cdot10^4$	$0{,}333\cdot10^4$
		$a=5$ $b=15$ $h=80$	0	$10{,}5\cdot10^4$	$0{,}11\cdot10^4$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	φ	J_x *см*⁴	J_y *см*⁴
18		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	0	$3{,}95 \cdot 10^4$	$0{,}9 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	0	$7{,}52 \cdot 10^4$	$0{,}333 \cdot 10^4$
		$a = 7{,}5$ $b = 20$ $h = 50$	0	$6{,}04 \cdot 10^4$	$0{,}433 \cdot 10^4$
		$a = 7{,}5$ $b = 30$ $h = 30$	0	$2{,}64 \cdot 10^4$	$1{,}13 \cdot 10^4$
19		$a = 30$ $b = 30$	13°17′	$3{,}98 \cdot 10^4$	$0{,}967 \cdot 10^4$
		$a = 20$ $b = 40$	—31°45′	$1{,}27 \cdot 10^4$	$2{,}46 \cdot 10^4$
		$a = 40$ $b = 20$	4°41′	$7{,}44 \cdot 10^4$	$0{,}356 \cdot 10^4$
20		$b = 20$ $h = 30$	24°07′	$3{,}18 \cdot 10^4$	$1{,}36 \cdot 10^4$
		$b = 24$ $h = 24$	10°09′	$2{,}75 \cdot 10^4$	$1{,}15 \cdot 10^4$
		$b = 13{,}3$ $h = 40$	38°19′	$4{,}39 \cdot 10^4$	$1{,}58 \cdot 10^4$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в *см*	φ	J_x *см*⁴	J_y *см*⁴
21		$b = 15$ $h = 60$	3°36′	$7{,}17 \cdot 10^4$	$0{,}298 \cdot 10^4$
		$b = 20$ $h = 40$	10°21′	$2{,}99 \cdot 10^4$	$1{,}54 \cdot 10^4$
		$b = 10$ $h = 80$	1°48′	$10{,}5 \cdot 10^4$	$0{,}089 \cdot 10^4$
22		$a = 10$ $b = 15$ $h = 70$	—0°29′	$6{,}57 \cdot 10^4$	$0{,}35 \cdot 10^4$
		$a = 15$ $b = 30$ $h = 30$	27°31′	$1{,}56 \cdot 10^4$	$2{,}1 \cdot 10^4$

7. Конкурирующим со швеллером является профиль *Z*-го типа (№1), который по сравнению с первым, в зависимости от направления силовых факторов, по отношению к главным осям во многих случаях может оказаться значительно более экономичным.

8. Главные моменты инерции как по отношению к оси *X*, так и по отношению к оси *Y* в профилях *Z*-го типа с отгибами полок внутрь (№ 2), при некоторых соотношениях между элементами профиля, могут оказаться больше с профилями простого *Z*-го типа (№ 1) (см. первые строки № 1 и № 2).

9. Профили углотаврового типа (№ 9), вообще говоря, занимают промежуточное положение между соответствующими двутаврами и швеллерами. Так как при практических соотношениях элементов профили этого типа имеют сравнительно небольшой угол наклона главных осей φ, то в зависимости от направления действующих силовых факторов они могут конкурировать как со швеллерами, так и с профилями *Z*-го типа.

10. Одностороннее увеличение полки двутавра за счет уменьшения (не нарушая симметрии относительно стенки) другой полки (№ 16) уменьшает величину J_x и увеличивает J_y, поэтому в некоторых случаях применение этого типа сечения по сравнению с двутаврами (№ 10) может оказаться более целесообразным.

11. Профили, представляющие собой соединение швеллера с уголком (№ 21 и 22), по сравнению со швеллером (№ 4) являются явно нецелесообразными: при сравнительно одинаковых J_x они имеют J_y, значительно меньшие; при некоторых соотношениях сторон они даже менее выгодны, чем соответствующие двутавры (№ 10).

12. Профили, составленные из двух уголков (№ 5 и 19), будем сравнивать со швеллером (№ 4), который можно также рассматривать как профиль, составленный из двух уголков. Профиль № 19 почти при любых соотношениях элементов является явно нерациональным. Профиль же № 5, будучи менее жестким по сравнению со швеллером относительно оси X, при некоторых соотношениях элементов является более жестким относительно оси Y.

13. Профили, состоящие из двух швеллеров по типу № 20, по сравнению с двутавром менее жестки относительно X и несколько жестче относительно главной оси Y. По сравнению же со швеллером (№ 4) эти профили являются невыгодными.

§ 33. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О РАЦИОНАЛЬНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРОФИЛЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ СОВМЕСТНОГО ДЕЙСТВИЯ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Рассматривая совместно табл. 30 и 31 и принимая во внимание выводы, сделанные при рассмотрении каждой таблицы в отдельности, мы можем сделать некоторые выводы относительно рациональности некоторых типов профилей с точки зрения их работы при совместном действии изгиба и кручения. Как уже указывалось и в начале настоящей главы, выводы эти, конечно, нельзя рассматривать как данные инструктивного характера, тем более, что при рассмотрении вопроса мы совершенно не касались ни силовых факторов, ни типа конструкции, в которых будут применяться данные профили, и т. д. Вопрос в данном случае сводился главным образом к исследованию влияния формы сечения на жесткость профилей как при изгибе, так и при кручении. Тем не менее мы считаем, что при отсутствии в литературе, насколько нам известно, подобного рода исследований эта работа может помочь инженеру-проектировщику выбрать тот или иной тип профилей и дать ему возможность подойти к этому отбору более сознательно, кроме того, он может быть избавлен от многих предварительных прикидок и вычислений, в достаточной степени громоздких.

Главное же, по нашему мнению, значение эта работа должна иметь при дальнейших исследованиях в этой области, являясь первым и совершенно необходимым этапом для более глубокого и более всестороннего исследования. Уже сейчас на основе нашего исследования можно наметить те типы сечений, над которыми, безусловно, нужно дальше работать в смысле изучения их работы, а также отвергнуть те из них, которые являются явно нерациональными.

В этом, главным образом, разрезе и будут сделаны ниже выводы относительно работы этих профилей при совместном действии изгиба и кручения.

1. Бесспорно рациональными типами сечений следует признать профили Z-образный и швеллер. Обладая по сравнению с двутавром при одной и той же высоте профиля приблизительно одинаковыми жесткостями на изгиб относительно главной оси X, они значительно жестче при изгибе их в плоскости Y и при стесненном кручении. Поэтому применение этих профилей, например для прогонов под кровли, где влияние изгиба относительно оси Y и влияние кручения являются значительными, явно целесообразно. Что же касается области применения Z-х профилей или швеллеров, то она, очевидно, определится диапазоном изменения углов наклона и положением по отношению к центру изгиба профиля линии действия силы.

2. В профилях швеллерного типа при значительном влиянии кручения отгиб концов полок швеллера внутрь может оказаться очень целесообразным, но при этом следует иметь в виду, что значительное увеличение жесткости профиля на кручение достигается здесь ценой некоторого уменьшения жесткости его на изгиб.

В профилях же Z-го типа отгиб концов полок внутрь профиля подобной эффективности дать не может.

3. Профили углотаврового типа как в отношении жесткости на кручение, так и в отношении жесткости их на изгиб являются промежуточными между соответствующими профилями двутаврового и швеллерного типа. Обладая, кроме того, значительными конструктивными преимуществами в применении их для прогонов под кровли (удобство прикрепления к поясу фермы, значительная ширина верхней полки для укладки плиток кровли) при малых углах наклона последней, они являются безусловно рациональными профилями.

4. Явно нерациональны с точки зрения затраты материала для прогонов под кровли профили, представляющие соединение швеллера с уголком (№ 28 и 29 из табл. 30 и № 21 и 22 из табл. 31). По сравнению с другими рассмотренными типами профилей они значительно менее жестки как в отношении сопротивляемости их стесненному кручению, так и изгибу.

5. Применение несимметричных двутавров с разными полками (№ 21 из табл. 30 и № 14 из табл. 31), со смещенной стенкой (№ 15 из табл. 30 и № 8 из табл. 31) или с одной увеличенной полкой (№ 23 из табл. 30 и № 16 из табл. 31), а также комбинирование этих приемов образования профиля могут в зависимости от соотношения компонентов внешней нагрузки дать довольно рациональное сечение, тем более, что сравнительная простота самой формы этого профиля позволяет самым разнообразным образом комбинировать эти элементы.

6. Довольно целесообразным профилем в условиях работы на совместное действие изгиба и кручения может оказаться профиль,

составленный из двух уголков по типу № 12 из табл. 30 и № 5 из табл. 31. Обладая сравнительно большой секториальной жесткостью, он в то же время является довольно жестким и при работе его на изгиб.

По сравнению с другими подобными из рассмотренных нами типов профилей, составленными из уголков или швеллеров, этот тип профиля является, безусловно, наиболее рациональным.

Замена полок обыкновенного двутавра сложными элементами двутаврового или швеллерного типа при любых комбинациях последних (см. № 12, 13, 14, 15, 17 и 18, табл. 31) уменьшает секториальную жесткость его и жесткость относительно оси Y. Что же касается жесткости таких профилей относительно оси X, то она также меньше, чем у обыкновенного двутавра, за исключением профиля, составленного из листа и двух швеллеров с полками, отогнутыми наружу (№ 18 из табл. 31), для которого величина J_x несколько больше, чем для обыкновенного двутавра.

Заканчивая анализ различных типов профилей в отношении работы их на стесненное кручение и на совместное действие изгиба и кручения, мы, как было сказано выше, ни в коем случае не склонны считать его исчерпывающим. На это исследование следует смотреть лишь как на первую попытку перейти из области только расчета в область проектирования элементов металлических конструкций с учетом кручения.

Нам кажется, что оно будет способствовать более правильному направлению дальнейшей работы в этой области, а также более правильно направит мысли тех проектировщиков, которые будут пользоваться ею при проектировании.

ГЛАВА VIII

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РАСЧЕТА НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ ДВУТАВРОВЫХ И ШВЕЛЛЕРНЫХ ПРОФИЛЕЙ

§ 34. ПРИВЕДЕННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОДБОРА СЕЧЕНИЙ ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК, НАХОДЯЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Нормальные напряжения в балке, находящейся в условиях поперечного изгиба и кручения, определяются по формуле

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_\omega = \frac{M_x}{W_x} + \frac{B_\omega}{W_\omega}. \qquad (265)$$

Представим формулу (265) в следующем виде:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x}\left(1 + \frac{B_\omega}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_\omega}\right)$$

или

$$\sigma = \frac{M_x \eta}{W_x}, \tag{266}$$

где

$$\eta = 1 + \frac{B_\omega}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_\omega}. \tag{267}$$

При пользовании формулой (266) расчет балок, находящихся в условиях сложного сопротивления, сводится к расчету их на простой изгиб, но не по моменту M_x, а по приведенному моменту, равному

$$M_{пр} = M_x \eta, \tag{268}$$

где коэффициент приведения η выражается формулой (267). Входящее в выражение (267) отношение изгибно-крутящего бимомента B_ω к изгибающему моменту M_x зависит от характера опорных закреплений балки, характера нагрузки, эксцентрицитета ее приложения и упругой изгибно-крутильной характеристики сечения балки.

Так, например, для балки, свободно опертой, но закрепленной от углов закручивания по концам и нагруженной эксцентричной равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой, это отношение выразится формулой

$$\frac{B_\omega}{M_x} = \frac{0{,}01 \alpha q e l^2}{0{,}125\, q l^2} = 0{,}08\, \alpha e, \tag{269}$$

где α — отвлеченный коэффициент, зависящий от произведения упругой изгибно-крутильной характеристики на пролет балки:

$$kl = l \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}} \tag{270}$$

может быть определен по графику VI приложения 12.

Отношение входящих в формулу (267) моментов сопротивления $\frac{W_x}{W_\omega}$ зависит только от типа и размеров сечения. Числовые значения отношений моментов сопротивления для прокатных двутавров приведены нами в табл. 32.

Пользуясь табл. 32 и представив формулу (267) в виде

$$\eta = 1 + e\xi, \tag{271}$$

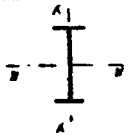
где

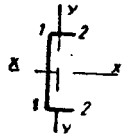
$$\xi = 0{,}08\, \alpha \frac{W_x}{W_\omega}, \tag{272}$$

мы построили для различных номеров двутавров и различных пролетов график для определения этого вспомогательного коэффици-

Таблица 32

Отношения моментов сопротивления





№ профилей		$\frac{W_x}{W_y}$	$\frac{W_x}{W_\omega}$	№ профилей		$\frac{W_x}{W_{y1}}$	$\frac{W_x}{W_{y2}}$	$\frac{W_x}{W_{\omega_1}}$	$\frac{W_x}{W_{\omega_2}}$
10		5,04	1,16	5		1,69	2,93	1,13	1,78
12		5,73	1,08	6,5		1,95	3,7	1,01	1,67
14		6,34	1,02	8		2,18	4,37	0,92	1,56
16		6,65	0,933	10		2,36	5,08	0,805	1,42
18		7,12	0,876	12		2,5	5,7	0,718	1,3
20	a	7,52	0,835	14	a	2,36	6,19	0,64	1,2
	b	7,55	0,85		b	2,38	6,16	0,59	1,21
22	a	7,55	0,756	16	a	2,66	6,65	0,58	1,12
	b	7,61	0,774		b	2,45	6,65	0,528	1,13
24	a	7,87	0,727	18	a	2,7	7,07	0,527	1,05
	b	7,93	0,74		b	2,52	7,07	0,483	1,06
27	a	8,57	0,702	20	a	2,82	7,42	0,482	0,99
	b	8,65	0,715		b	2,58	7,45	0,445	1
30	a	9,41	0,689	22	a	2,81	7,85	0,45	0,947
	b	9,53	0,704		b	2,66	7,9	0,419	0,965
	c	9,6	0,715						
33	a	10,2	0,676	24	a	3,08	8,4	0,453	0,919
	b	10,3	0,693		b	2,89	8,35	0,426	0,92
	c	10,4	0,706		c	2,75	8,42	0,396	0,935
36	a	10,8	0,65	27	a	3,18	9,1	0,443	0,869
	b	10,9	0,665		b	3,02	9,13	0,395	0,889
	c	11,0	0,68		c	2,88	9,25	0,37	0,905
40	a	11,7	0,639	30	a	3,37	9,82	0,406	0,844
	b	11,8	0,652		b	3,19	9,85	0,378	0,859
	c	11,9	0,664		c	3,06	9,98	0,355	0,878
45	a	12,5	0,605	33	a	3,52	10,5	0,388	0,82
	b	12,7	0,622		b	3,32	10,6	0,357	0,839
	c	12,9	0,631		c	3,21	10,8	0,335	0,855
50	a	13,1	0,569	36	a	3,54	10,4	0,354	0,747
	b	13,3	0,58		b	3,35	10,5	0,347	0,797
	c	13,8	0,607		c	3,25	10,7	0,32	0,794

№ профилей		$\frac{W_x}{W_y}$	$\frac{W_x}{W_\omega}$	№ профилей		$\frac{W_x}{W_{y1}}$	$\frac{W_x}{W_{y2}}$	$\frac{W_x}{W_{\omega_1}}$	$\frac{W_x}{W_{\omega_2}}$
55	a	14	0,546	40	a	3,69	11,1	0,331	0,722
	b	14,1	0,559		b	3,55	11,3	0,312	0,732
	c	14,2	0,571		c	3,47	11,4	0,298	0,745
60	a	14,5	0,521						
	b	14,7	0,532						
	c	14,8	0,543						

ента (приложение 17). Значение упругой изгибно-крутильной характеристики k взято нами непосредственно из приложения 1.

Пример 24. Подобрать поперечное сечение вспомогательной балки перекрытия, свободно опертой по концам, но защемленной от углов закручивания. Пролет $l=5$ *м*. Нагрузка равномерно распределенная $q=6$ *т/м*, приложенная с эксцентрицитетом $e=4$ *см*. Материал — Ст. 3.

Задаемся в первом приближении коэффициентом $\eta=1{,}5$.

Тогда приведенный максимальный изгибающий момент будет равен

$$M_{пр}=M_x\,\eta=\frac{ql^2}{8}\,\eta=\frac{6\cdot 5^2}{8}\cdot 1{,}5=18{,}75\cdot 1{,}5=2812500\ кгсм.$$

Требуемый момент сопротивления

$$W_x^{тр}=\frac{M_{пр}}{[\sigma]}=\frac{2\,812\,500}{1\,400}=2\,009\ см^3.$$

Принимаем двутавр № 55а, $W_x=2290$ *см*³.

По графику приложения 17 коэффициент ξ при $l=5$ *м* равен

$$\xi=0{,}194.$$

Отсюда

$$\eta=1+e\xi=1+4\cdot 0{,}194=1{,}776>1{,}5.$$

Задаемся во втором приближении

$$\eta=\frac{1\,500+1{,}776}{2}=1{,}638;$$

$$M_{пр}=18{,}75\cdot 1{,}638=3\,071\,250\ кгсм;$$

$$W_x^{тр}=\frac{3\,071\,250}{6\,400}=2\,194\ см^3\approx 2\,290\ см^3.$$

На основании этого можно остановиться на принятом сечении двутавра № 55а. Производим проверку расчетных напряжений по формуле

$$\sigma=\sigma_x+\sigma_\omega=\frac{M_x}{W_x}+\frac{B_\omega}{W_\omega};$$

$W = 4180{,}8$ *см*^{4} (см. приложение 1),

$$kl = 0{,}008198 \cdot 500 = 4{,}1.$$

По графику VI приложения 12 $\alpha = 4{,}5$:

$$B_\omega = 0{,}01\,\alpha q e l^2 = 4{,}50 \cdot 0{,}01 \cdot 60 \cdot 4 \cdot 500^2 = 2\,700\,000 \text{ кгсм}^2;$$

$$\sigma = \frac{1\,875\,000}{2\,290} + \frac{2\,700\,000}{4180{,}8} = 818 + 646 = 1\,464 \text{ кг/см}^2.$$

§ 35. ВЛИЯНИЕ ЭКСЦЕНТРИЧНОСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ НА СУММАРНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДВУТАВРОВЫХ БАЛКАХ

График приложения 17 позволяет без особых затруднений установить, как велико влияние эксцентричности приложения нагрузки на суммарные нормальные напряжения.

Так, если в формуле (271) коэффициента приведения η для прокатных двутавров мы примем эксцентрицитет $e = 1$ *см*, то вспомогательный коэффициент ξ, определенный по графику приложения 17, сразу покажет процент увеличения напряжений от учета кручения.

Например, для наиболее часто встречающегося в практике пролета $l = 6$ *м* получим:

для двутавра № 16 $\xi = 0{,}031$,
» » № 60а $\xi = 0{,}165$.

Это значит, что при эксцентрицитете приложения нагрузки, равном только 1 *см*, нормальные напряжения получают повышение от 3,1% для двутавра № 16 до 16,5% для № 60а. С увеличением эксцентрицитета этот процент пропорционально увеличивается. Этот вывод лишний раз подчеркивает необходимость учитывать кручение даже при малых эксцентрицитетах приложения нагрузки или принимать конструктивные меры, уменьшающие влияние кручения, о которых мы уже отчасти упоминали в главе II настоящей работы.

§ 36. РАСЧЕТ ШВЕЛЛЕРНЫХ И ДВУТАВРОВЫХ ПРОГОНОВ ПОД КРОВЛИ НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ (РИС. 147)

Прогоны под кровли, опираясь на наклонную плоскость и находясь под действием вертикальных сил, не проходящих через линию центров изгиба, должны рассчитываться на совместное действие косого изгиба и кручения по следующей формуле для нормальных напряжений:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{B_\omega}{W_\omega}, \tag{273}$$

где M_x и M_y — изгибающие моменты от внешних сил в главных плоскостях прогона;
B_ω — изгибно-крутящий бимомент;

W_x, W_y и W_ω — соответствующие им экваториальный и секториальный моменты сопротивления сечения прогона.

Знак плюс перед третьим слагаемым правой части формулы (273) относится к двутавровому профилю рис. 147,*а*, а знак минус — к швеллерным профилям (рис. 147, *б* и *в*).

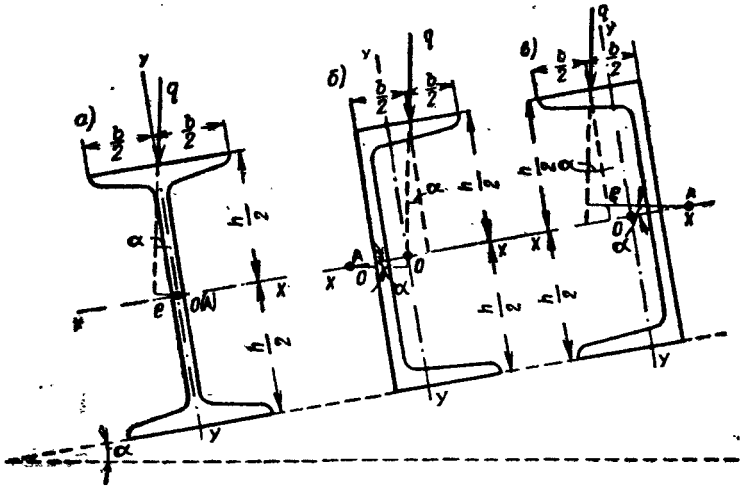


Рис. 147

При таком выборе знаков и при обычных углах наклона кровли напряжения в двутаврах проверяются в правой верхней точке сечения, а в швеллерах: для случая по рис. 147, *б* — в правой верхней точке, а для случая по рис. 147, *в* — в левой нижней точке.

Для подбора сечений формулу (273) целесообразно представить в таком виде:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x}\left(1 + \frac{M_y}{M_x}\cdot\frac{W_x}{W_y} \pm \frac{B_\omega}{M_x}\cdot\frac{W_x}{W_\omega}\right). \qquad (274)$$

Введя обозначения

$$\eta = 1 + \frac{M_y}{M_x}\cdot\frac{W_x}{W_y} \pm \frac{B_\omega}{M_x}\cdot\frac{W_x}{W_\omega} \qquad (275)$$

и

$$M_x\eta = M_{пр}, \qquad (276)$$

мы приведем формулу (274) к обычному простому виду

$$\sigma = \frac{M_{пр}}{W_x}; \qquad (277)$$

где $M_{пр}$ — приведенный момент;
η — коэффициент приведения.

Вычисляем коэффициент приведения η, принимая во внимание, что прогоны под кровли обычно считают как разрезные балки, находящиеся под действием равномерно распределенной по всему пролету нагрузки.

В таком случае

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{ql^2 \cos \alpha l}{8}; \\ M_y &= \frac{ql^2 \sin \alpha l}{8n^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (278)$$

где α — угол наклона кровли;
l — пролет прогона;
q — погонная интенсивность нагрузки;
n — число частей, на которые прогон разделен тяжами в плоскости кровли (при отсутствии тяжей $n=1$).

Отношение

$$\frac{M_y}{M_x} = \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} \alpha. \qquad (279)$$

Расчетный бимомент B_ω для шарнирно опертой по концам и эксцентрично нагруженной равномерно распределенной нагрузкой балки можно определить по VI кривой графика приложения 12, а именно:

$$B_\omega = \alpha \cdot 0{,}01 qel^2, \qquad (280)$$

где α — коэффициент, зависящий от произведения упругой характеристики $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$ на пролет балки l;
e — эксцентрицитет (по отношению к линии центров изгиба) плоскости действия равномерно распределенной нагрузки q.

Для наиболее употребительных в практике профилей № 14—24 среднее значение упругой характеристики как для двутавров, так и для швеллеров равно приблизительно $k=0{,}023$ *см*$^{-1}$. При пролете $l=6$ *м*; $kl=0{,}023 \cdot 600=13{,}8$.

Соответствующий коэффициент по VI кривой приложения 12 равен

$$\alpha = 0{,}5.$$

Величина эксцентрицитета e, очевидно, зависит от угла наклона кровли, типа и номера профиля, а для швеллеров — и от характера расположения его на кровле.

Из рис. 147, *а* видно, что для двутавра

$$e = \frac{h}{2} \sin \alpha; \qquad (281)$$

для швеллера по рис. 147,*б*

$$e = \left(x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\cos\alpha \tag{282}$$

и для швеллера по рис. 147,*в*

$$e = \left(x_a + \frac{b}{2} + \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\cos\alpha. \tag{283}$$

Среднее значение суммы $x_a + \frac{b}{2}$ для указанных выше наиболее употребительных профилей равно 5,2 *см*.

Среднее же значение $\frac{h}{2}$ принимаем равным 10.

При этих данных формулы (281), (282) и (283) будут иметь следующий вид:

для двутавров

$$e = 10\sin\alpha; \tag{281^1}$$

для швеллеров по рис. 147,*б*

$$e = 5{,}2\cos\alpha - 10\sin\alpha, \tag{282^1}$$

для швеллеров по рис. 147,*в*

$$e = 5{,}2\cos\alpha + 10\sin\alpha. \tag{283^1}$$

Тогда отношение B_ω к M_x будет равно:

для двутавров

$$\frac{B_\omega}{M_x} = 0{,}4\operatorname{tg}\alpha; \tag{284}$$

для швеллеров по рис. 147,*б*

$$\frac{B_\omega}{M_x} = 0{,}21 - 0{,}4\operatorname{tg}\alpha \tag{285}$$

для швеллеров по рис. 147, *в*

$$\frac{B_\omega}{M_x} = 0{,}21 + 0{,}4\operatorname{tg}\alpha. \tag{286}$$

Переходим теперь к определению отношений моментов сопротивления $\frac{W_x}{W_y}$ и $\frac{W_x}{W_\omega}$.

Для прокатных профилей они достаточно стабильны и легко могут быть вычислены непосредственно по сортаменту (табл. 32).

Примем:

для двутавров

$$\frac{W_x}{W_y} = 7; \qquad \frac{W_x}{W_\omega} = 0{,}85; \tag{287}$$

для швеллеров

$$\frac{W_x}{W_y} = 7; \qquad \frac{W_x}{W_\omega} = 1. \tag{288}$$

Подставив полученные значения отношений силовых и геометрических факторов в формулу (275), получим средние значения коэффициента приведения η:

для двутавров

$$\eta = 1 + \left(\frac{7}{n^2} + 0{,}34\right) \operatorname{tg} \alpha; \tag{289}$$

для швеллеров по рис. 147,*б*

$$\eta = 0{,}79 + \left(\frac{7}{n^2} + 0{,}4\right) \operatorname{tg} \alpha; \tag{290}$$

для швеллеров, по рис. 147,*в*

$$\eta = 0{,}79 + \left(\frac{7}{n^2} - 0{,}4\right) \operatorname{tg} \alpha. \tag{291}$$

Сравнение формул (289), (280) и (281) показывает, что наиболее выгодными профилями для прогонов являются швеллеры.

Так, например, для наиболее часто применяемых в настоящее время уклонов $i = \operatorname{tg} \alpha = 0{,}1$ и при отсутствии тяжей, т. е. при $n = 1$, получим:

для двутавров

$$\eta = 1{,}734;$$

для швеллеров по рис. 147,*б*

$$\eta = 1{,}53;$$

для швеллеров по рис. 147,*в*

$$\eta = 1{,}45.$$

Пример 25. Подобрать профиль прогона под кровлю, имеющую уклон $\alpha = 5°$. Нагрузка на прогон $q = 470$ *кг/м*. Пролет $l = 6$ *м*. Материал — Ст. 3.

По формуле (277) требуемый момент сопротивления

$$W_x^{\text{тр}} = \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]} = \frac{M_x \eta}{[\sigma]} = \frac{210\,600}{1\,400} \eta = 150{,}4\eta;$$

$$\left(M_x = \frac{q l^2 \cos \alpha}{8} = \frac{4{,}7 \cdot 0{,}996 \cdot 600^2}{8} = 210\,600 \text{ кгсм}\right).$$

Далее коэффициенты для различных типов и номеров принятых профилей представлены в форме табл. 33.

Таблица 33

Коэффициенты приведения и номера принятых профилей (к примеру 25)

Тип профиля	Коэффициенты приведения η	$W_x^{\text{тр}}$ в *см*³	Принятый профиль
Двутавр	$\eta = 1 + 7{,}34 \cdot 0{,}0875 = 1{,}64$	247	I № 20в
Швеллер по рис. 147, *б*	$\eta = 0{,}79 + 7{,}4 \cdot 0{,}0875 = 1{,}44$	217	I № 22а
Швеллер по рис. 147, *в*	$\eta = 0{,}79 + 6{,}6 \cdot 0{,}0875 = 1{,}37$	206	I № 22а

Проверку нормальных напряжений в принятых сечениях производим по формуле (273), где

$$M_x = 210\,600\ кгсм;$$

$$M_y = \frac{ql^2 \sin\alpha}{8} = \frac{4{,}7 \cdot 0{,}0872 \cdot 600^2}{8} = 18\,440\ кгсм;$$

$$B_\omega = \alpha 0{,}01 qel^2.$$

Для определения коэффициента α вычислим предварительно значение kl (приложения 1 и 2):

для двутавра №20 б $\quad kl = 0{,}02215 \cdot 600 = 13{,}3;$

„ швеллера №22 а $\quad kl = 0{,}02034 \cdot 600 = 12{,}2.$

По VI кривой графика приложения 12 имеем:

для двутавра $\quad \alpha = 0{,}55;$

„ швеллера $\quad \alpha = 0{,}7.$

Дальнейшая проверка напряжений проведена в форме табл. 34 и 35.

Наиболее напряженной для всех типов и случаев расположения прогонов, как видно из табл. 35, является крайняя верхняя точка с правой стороны по оси Y.

Таблица 34

Моменты сопротивления и изгибно-крутящие бимоменты (к примеру 25)

Тип профиля	Моменты сопротивления					Коэффициент α	Эксцентрицитет e в *см*	Бимомент B_ω в *кг/см²*
	W_x	$W_y^{лев}$	$W_y^{прав}$	$W_\omega^{лев}$	$W_\omega^{прав}$			
I № 20 в	250	33,1	33,1	294,5	294,5	0,55	$\frac{h}{2}\sin\alpha = 10 \cdot 0{,}0872 = 0{,}872$	8115
[№ 22а по рис. 147, *б*	223	79,3	28,5	495,6	235,7	0,7	$\left(x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\cos\alpha = \left(1{,}926 + \frac{7{,}7}{2} - 11 \cdot 0{,}0875\right) \times 0{,}996 = 4{,}79$	56733
[№ 22а по рис. 147, *в*	223	28,5	79,3	235,7	495,6	0,7	$\left(x_a + \frac{b}{2} + \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha\right) \times \cos\alpha = 6{,}71$	79473

Напряжения в этой точке для всех случаев находятся в пределах допускаемых.

Таблица 35

Нормальные напряжения и крайних точках (к примеру 25)

Тип профиля	Напряжения в крайних точках слева от оси y в *кг/см²*				Напряжение в крайних точках справа от оси y в *кг/см²*			
	$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x}$	$\sigma_y = \frac{M_y}{W_y^{лев}}$	$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{W_\omega^{лев}}$	σ	$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x}$	$\sigma_y = \frac{M_y}{W_y^{прав}}$	$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{W_\omega^{прав}}$	σ
I № 20в	∓842	+557	±28	—257 +137	∓842	—557	∓28	—1427 + 313
[№ 22а по рис. 147, б	∓944	+233	∓114	— 825 +1291	∓944	—647	±241	—1350 +56
[№ 22а по рис. 147, в	∓944	+647	±337	+40 +1254	∓944	—233	∓160	—1137 + 871

Примечание. Верхние знаки относятся к верхним крайним точкам профиля, нижние знаки—к нижним крайним точкам профиля.

Обратим внимание, что для швеллерных прогонов учет кручения дает не увеличение, а уменьшение расчетных нормальных напряжений: для случая расположения прогона по рис. 147,*б* на $\frac{241}{1591}100 = 15{,}2\%$, а для случая расположения прогона по рис. 147, *в* на $\frac{1591-1337}{1591}100 = 15{,}9\ \%$.

§ 37. НАИВЫГОДНЕЙШИЙ УГОЛ НАКЛОНА КРОВЛИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НАИЛУЧШЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕРИАЛА ШВЕЛЛЕРНОГО ПРОГОНА

В предыдущем параграфе мы установили, что швеллер является более выгодным профилем для прогонов под кровли по сравнению с двутавром. Как известно, он является наиболее желательным и в конструктивном отношении с точки зрения удобства прикрепления его к поясу стропильной фермы. Поэтому мы несколько продолжим наши исследования по отношению к этому профилю, а именно: установим, при каком угле наклона кровли использование материала швеллера является наилучшим и какое расположение его выгоднее: по рис. 147, *б* или по рис. 147, *в*.

Рассмотрим сначала случай расположения прогона по рис. 147, *б*. На рис. 148 дана схема распределения знаков нормальных

напряжений в крайних точках этого профиля при обычных углах наклона кровли от изгиба в двух главных плоскостях и от кручения. Как видим, для точки *3* все три компонента напряжений имеют одинаковый знак, но это не значит, что она всегда будет являться опасной точкой профиля.

В некоторых случаях (как, например, в примере 25) более опасной может оказаться точка *2*, потому что напряжения от изгиба в плоскости ската кровли в этой точке, дальше отстоящей от главной оси, значительно больше, чем в точке *3*.

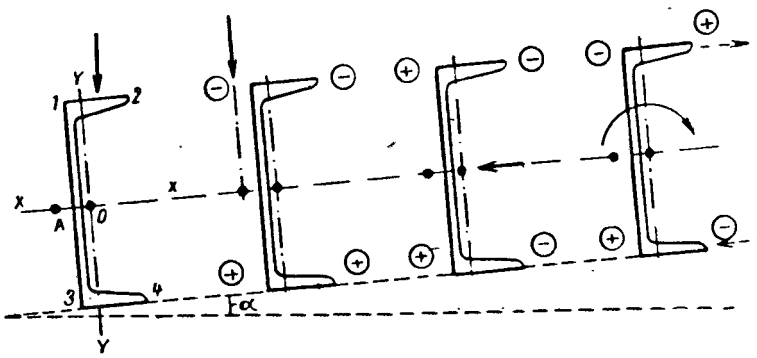


Рис. 148

При изменении угла наклона кровли напряжения в одной из этих опасных точек, очевидно, будут увеличиваться, а в другой уменьшаться, а следовательно, существует такой угол, при котором напряжения в этих точках одинаковы. Этот угол и будет являться искомым наивыгоднейшим углом наклона кровли.

Итак, условие для его определения в общем виде запишется так:

$$|\sigma_3| = |\sigma_2|. \tag{292}$$

(где черточками показано, что речь идет о сравнении абсолютных величин напряжений), или в развернутом виде по формуле (281)

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_{y_1}} + \frac{B_\omega}{W_{\omega_1}} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_{y_2}} - \frac{B_\omega}{W_{\omega_2}}. \tag{293}$$

Сократив левую и правую части выражения (293) на $\frac{M_x}{W_x}$, получим

$$1 + \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_{y_1}} + \frac{B_\omega}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_{\omega_1}} = 1 + \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_{y_2}} - \frac{B_\omega}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_{\omega_2}}. \tag{294}$$

По формуле (279) (при $n=1$)

$$\frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

По формулам (278), (280) и (282)

$$\frac{B_\omega}{M_x} = \frac{\alpha \cdot 0{,}01 ql^2 \cdot 8}{ql^2 \cos\alpha}\left(x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\cos\alpha =$$

$$= 0{,}08\alpha\left(x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Подставив в выражение (294) вместо $\frac{M_y}{M_x}$ и $\frac{B_\omega}{M_x}$ их значения по вышеприведенным формулам, получим

$$\operatorname{tg}\alpha\frac{W_x}{W_{y_1}} + 0{,}08\alpha\left(x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{W_x}{W_{\omega_1}} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\frac{W_x}{W_{y_2}} - 0{,}08\alpha\left(x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{W_x}{W_{\omega_2}}. \qquad (295)$$

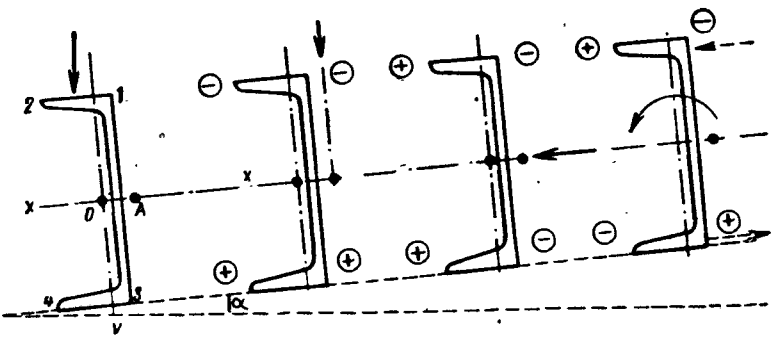


Рис. 149

Решая уравнение (295) относительно $\operatorname{tg}\alpha$, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}08\left(x_a + \frac{b}{2}\right)\left(\frac{W_x}{W_{\omega_1}} + \frac{W_x}{W_{\omega_2}}\right)}{\frac{W_x}{W_{y_2}} - \frac{W_x}{W_{y_1}} + 0{,}04h\alpha\left(\frac{W_x}{W_{\omega_1}} + \frac{W_x}{W_{\omega_2}}\right)}. \qquad (296)$$

Переходим к случаю расположения прогона по рис. 147, *в*. На рис. 149 дана схема распределения знаков трех компонентов нормальных напряжений. Здесь опасными будут, очевидно, точки 1 и 4.

Условие для определения наивыгоднейшего угла α в общем виде напишется так:

$$|\sigma_1| = |\sigma_4|. \qquad (297)$$

Написав это условие в развернутом виде и воспользовавшись формулами (278), (279), (280) и (281), мы, очевидно, получим такую

Таблица 36

Наивыгодиейшие углы наклона кровли в отиошеиии использоваиия материалов швеллериого прогона

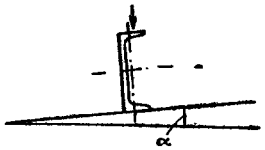


Рис. 1

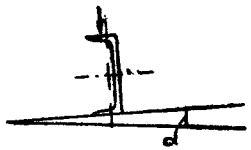


Рис. 2

Примечание. Верхние числа углов наклона кровли относятся к случаю расположения прогона по рис. 1, нижнне — к случаю расположения прогона на рис. 2.

№ швеллеров		Пролет прогона в *м*			
		l=5	*l*=6	*l*=7	*l*=8
16	a	3°55′ 5°04′	2°51′ 3°25′	2°12′ 2°31′	1°57′ 2°12′
	b	3°07′ 3°49′	2°10′ 2°29′	1°52′ 2°06′	1°38′ 1°48′
18	a	5°00′ 7°07′	3°21′ 4°11′	2°38′ 3°08′	2°07′ 2°25′
	b	3°53′ 5°06′	2°40′ 3°11′	2°00′ 2°17′	1°43′ 1°55′
20	a	5°21′ 8°05′	3°53′ 5°10′	3°04′ 3°14′	2°23′ 2°49′
	b	4°05′ 5°32′	3°07′ 3°53′	2°23′ 2°48′	1°52′ 2°08′
22	a	5°43′ 9°52′	4°23′ 6°10′	3°16′ 4°10′	2°33′ 3°04′
	b	4°48′ 7°07′	3°30′ 4°35′	2°41′ 3°17′	2°06′ 2°27′
24	a	6°51′ 12°58′	5°14′ 8°11′	4°02′ 5°37′	3°10′ 4°04′
	b	6°01′ 10°08′	4°31′ 6°36′	3°32′ 4°42′	2°44′ 3°23′
	c	4°57′ 7°39′	3°42′ 5°02′	2°49′ 3°32′	2°12′ 2°37′

№ швеллеров		Пролет прогона в *м*				
		$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$
27	a	9°42′ 32°15′	7°28′ 16°39′	6°49′ 11°17′	4°31′ 6°49′	3°36′ 4°55′
	b	8°32′ 23°33′	6°28′ 12°39′	4°55′ 7°49′	3°48′ 5°21′	3°00′ 3°53′
	c	7°19′ 16°40′	5°19′ 9°02′	4°02′ 5°51′	3°48′ 4°07′	2°25′ 2°59′

же формулу для tg α с той лишь разницей, что знак перед h изменится на обратный, а именно:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}08\left(x_a + \frac{b}{2}\right)\left(\frac{W_x}{W_{\omega_1}} + \frac{W_x}{W_{\omega_2}}\right)}{\frac{W_x}{W_{y_2}} - \frac{W_x}{W_{y_1}} - 0{,}04h\alpha\left(\frac{W_x}{W_{\omega_1}} + \frac{W_x}{W_{\omega_2}}\right)}. \qquad (298)$$

Формулы (296) и (298) определяют искомый угол наклона кровли α, наивыгоднейший с точки зрения наилучшего использования швеллерного прогона.

Воспользовавшись этими формулами, мы составили табл. 36 числовых значений наивыгоднейших углов для швеллеров от № 16 до № 27 и пролетов l от 4 до 8 *м* для обоих рассмотренных случаев расположения прогона по скату кровли.

§ 38. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТИПЫ ПРОФИЛЕЙ ДЛЯ ПРОГОНОВ ПОД КРОВЛИ

Нами исследованы разные формы сечения прогонов под кровли: двутавровая, швеллерная, зетообразная, углотавровая, а также швеллерная и зетообразная с отогнутыми краями.

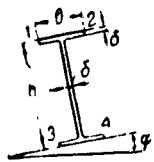
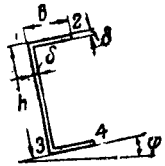
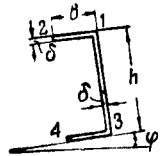
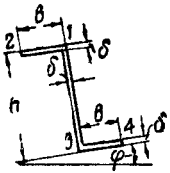
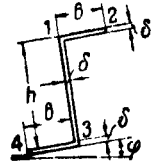
Для возможности сравнения размеры всех сечений приняты одинаковыми, а именно высота $h=24$ *см*, общая ширина верхней полки $b=10$ *см*, ширина нижней полки — для всех профилей $b=10$ *см*, а для углотавра равна $\frac{b}{2}=5$ *см*. У профилей с отогнутыми краями общая ширина как верхних, так и нижних полок, включая отогнутый край, также равна 10 *см*, величина же отогнутых краев $a=2$ *см*.

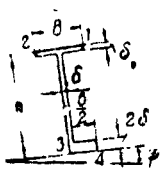
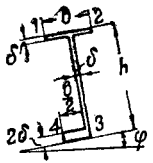
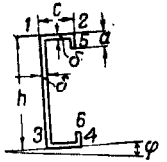
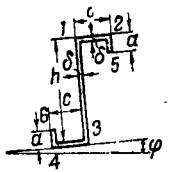
Толщина стенок и полок всех профилей равна $\delta=1$ *см*, за исключением нижней полки углотавра, толщина которой принята равной $2\delta=2$ *см*.

Таким образом, все профили имели одну и ту же площадь поперечного сечения: $F=24\cdot1+2\cdot10\cdot1=44$ *см*^{2}, а следовательно,

Таблица 37

Сравнительная таблица рациональности применения различных типов профилей для прогонов под кровли ($h=24$ *см*; $b=10$ *см*; $c=8$ *см*; $a=2$ *см*; $\delta=1$ *см*; пролет $l=600$ *см*; нагрузка q *кг/см*)

Угол наклона кровли φ	Сечение профиля и схема расположения его на кровле				
					
0°	$\sigma_1=\sigma_2=-133{,}9\,q$ $\sigma_3=\sigma_4=133{,}9\,q$	$\sigma_1=-189{,}1\,q$ $\sigma_3=189{,}1\,q$	$\sigma_1=-189{,}1\,q$ $\sigma_3=189{,}1\,q$	$\sigma_1=-308{,}0\,q$	$\sigma_1=-308{,}0\,q$
5°	$\sigma_2=-260{,}4\,q$	$\sigma_3=201{,}9\,q$	$\sigma_1=-215{,}4\,q$	$\sigma_2=-356{,}3\,q$	$\sigma_1=-257{,}6\,q$
10°	$\sigma_2=-384{,}9\,q$	$\sigma_3=213{,}2\,q$	$\sigma_1=-240{,}1\,q$	$\sigma_1=-401{,}7\,q$	$\sigma_1=-205{,}1\,q$
15°	$\sigma_2=-506{,}4\,q$	$\sigma_2=-274{,}3\,q$	$\sigma_1=-262{,}9\,q$	$\sigma_2=487{,}0\,q$	$\sigma_1=-151{,}0\,q$
20°	$\sigma_2=-623{,}9\,q$	$\sigma_2=-350{,}7\,q$	$\sigma_2=285{,}8\,q$	$\sigma_2=572{,}5\,q$	$\sigma_4=192{,}0\,q$

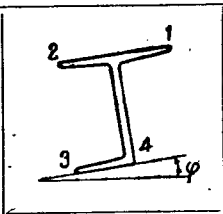
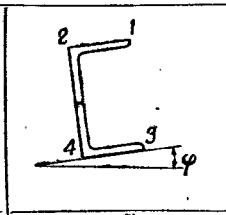
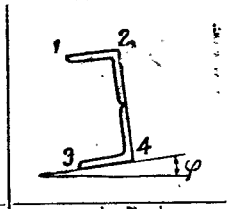
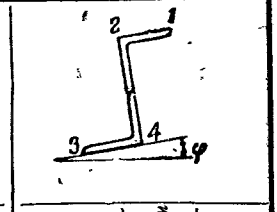
Угол наклона кровли φ	Сечение профиля и схема расположения его на кровле			
				
0°	$\sigma_1=-267{,}2\,q$	$\sigma_1=-267{,}2\,q$	$\sigma_1=-184{,}8\,q$ $\sigma_3=-184{,}8\,q$	$\sigma_1=-316{,}4\,q$
5°	$\sigma_1=-429{,}3\,q$	$\sigma_2=-162{,}8\,q$	$\sigma_3=199{,}5\,q$	$\sigma_1=-263{,}8\,q$
10°	$\sigma_1=-588{,}3\,q$	$\sigma_2=-305{,}6\,q$	$\sigma_3=212{,}6\,q$	$\sigma_1=-209{,}0\,q$
15°	$\sigma=-742{,}7\,q$	$\sigma_2=-446{,}3\,q$	$\sigma_2=-273{,}0\,q$	$\sigma_1=-152{,}8\,q$
20°	$\sigma_1=-891{,}5\,q$	$\sigma_2=-583{,}4\,q$	$\sigma_2=-335{,}5\,q$	$\sigma_2=-177{,}2\,q$

Сравнительная таблица рациональности применения различных типов прокатных допускаемые напряжения

Угол φ наклона кровли	Тип профиля и схема											
	№ профиля	Вес q кг/пог. м	Расчетное напряжение σ кг/см²	№ профиля	q кг/пог. м	σ кг/см²	№ профиля	q кг/пог. м	σ кг/см²	№ профиля	q кг/пог. м	σ кг/см²
0°	20a	27,9	$\sigma_{max}=\pm 1139$	24b	29,78	$\sigma_2=\sigma_4=\mp 1160$	24b	29,78	$\sigma_2=\sigma_4=\mp 1160$	—	—	—
5°	24a	37,4	$\sigma_2=-1234$	27a	29,87	$\sigma_1=-1180$ $\sigma_4=+1248$	27b	34,11	$\sigma_2=-1175$	25	46,33	$\sigma_2=-1141$ $\sigma_4=+1111$
10°	30b	52,7	$\sigma_2=-1214$	36a	47,80	$\sigma_1=-978$	33b	43,88	$\sigma_2=-990$ $\sigma_3=+1015$	25	46,33	$\sigma_2=-873$ $\sigma_4=+853$
15°	36b	65,6	$\sigma_2=-1237$	40a	58,91	$\sigma_1=-1122$	36a	47,80	$\sigma_1=+1177$	20	32,75	$\sigma_2=-1215$ $\sigma_4=+1195$
20°	45a	80,4	$\sigma_2=-1169$	40c	71,47	$\sigma_1=-1330$	40b	65,19	$\sigma_1=+1219$	20	32,75	$\sigma_1=-1253$ $\sigma_3=+1269$

профилей для прогонов под кровлю (пролет $l=600$ *см*; нагрузка $q=600$ *кг/м*; $[\sigma]=1200$ *кг/см*²)

расположения его на кровле

											
№ профиля	q кг/пог. м	σ кг/см²	№ профиля	q кг/пог. м	σ кг/см²	№ профиля	q кг/пог. м	σ кг/см²	№ профиля	q кг/пог. м	σ кг/см²
4, h=27	35,66	$\sigma_2=-1204$	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2, h=22	28,52	$\sigma_4=+1136$	150×100×10 100×100×10	34,2	$\sigma_4=+1241$	150×100×10 150×100×10	38,2	$\sigma_2=-1079$	150×100×10 150×100×10	38,2	$\sigma_2=-1108$
			130×90×10 130×90×10	33,4	$\sigma_4=+1212$						
—	—	—	150×100×10 150×100×10	38,2	$\sigma_4=-1206$	150×100×10 150×100×10	38,2	$\sigma_2=-1231$	130×90×10 130×90×10	33,4	$\sigma_2=-1078$
									150×100×10 100×100×10	34,2	$\sigma_5=-1222$
—	—	—	—	—	—	—	—	—	130×90×10 130×90×10	33,4	$\sigma_4=+1189$
—	—	—	—	—	—	—	—	—	100×100×10 100×100×10	30,2	$\sigma_2=-1127$

один и тот же вес. Расчетный пролет всех прогонов принят равным $l=600$ *см*; нагрузка на 1 *пог. см* равна q *кгсм*. Опирание по концам — шарнирное. Для простоты исследования прогоны приняты без тяжей по скату кровли.

Были рассмотрены уклоны кровли: под углом $\varphi = 0$, 5, 10, 15 и 20°.

Не останавливаясь на методе расчета, мы здесь приводим лишь результаты этих исследований в табл. 37. В этой таблице для каждого из перечисленных профилей указаны величины расчетных напряжений в наиболее опасной точке сечения в функции нагрузки q.

Рассматривая табл. 37, можно сделать следующие выводы.

1. Для плоских кровель наиболее рациональным сечением прогона является двутавровое.

2. Для кровель с углом наклона в 5° рациональным является швеллерное сечение с расположением на кровле стенкою вниз по скату.

Отгиб концов полок швеллера внутрь сечения несколько увеличивает общую жесткость профиля.

Еще более выгодным, чем швеллерное сечение прогона для кровель с углом наклона в 5°, является углотавровое сечение с расположением на кровле стенкой вверх по скату.

3. При углах наклона кровли в 10° и выше наиболее рациональным сечением прогона является зетовое с расположением на кровле верхней полкой вверх по скату, а нижней — вниз. Отгиб полки внутрь профиля не увеличивает общей жесткости этого профиля и может служить лишь для увеличения местной устойчивости полок.

4. Зетовый профиль с расположением на кровле верхней полкой вниз по скату, а нижней — вверх, а также углотавровый профиль с расположением нижней полкой вверх по скату кровли являются явно нецелесообразными при любых углах наклона кровли.

Помимо общего исследования вопроса о рациональной форме сечений для прогонов под кровли, мы для ряда прокатных профилей и профилей, сваренных из двух уголков, задачу эту решили более конкретно, а именно определили, как номера прокатных профилей должны быть применены при заданной величине пролета прогона, нагрузки и угла наклона кровли.

Пролет для расчета был принят равным $l=600$ *см*, нагрузка $q=6$ *кг/см*, допускаемое напряжение на сталь $[\sigma] = 1200$ *кг/см*^{2}. Опирание по концам — шарнирное, без тяжей по скату кровли. Были рассмотрены кровли под углом $\varphi = 0$, 5, 10, 15 и 20°.

Результаты этих исследований мы приводим в табл. 38. В этой таблице для каждого из перечисленных выше углов наклона кровли указаны подходящий номер профиля, вес погонного метра его и расчетное напряжение в наиболее опасной точке сечения.

Рассматривая табл. 38, можно сделать следующие выводы.

1. Для плоских кровель наиболее рациональным сечением является двутавровое.

2. Для кровель с углом наклона в 5° — швеллерное сечение с расположением на кровле стенкой вниз, а также и углотавровое сечение с расположением на кровле стенкой вверх по скату.

3. При углах наклона более 5° становится выгодным швеллерное сечение прогона с расположением на кровле стенкой вверх по скату.

4. При уклоне кровли в 10° очень выгодным с точки зрения затраты основного металла являются профили, сваренные из двух уголков в форме швеллера, а еще лучше — в форме зета.

5. Наконец, при углах наклона в 15° и выше наиболее рациональны зетовые профили.

§ 39. ПОДБОР ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ ШВЕЛЛЕРНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ ДЛЯ ПРОГОНОВ ПОД КРОВЛИ

Пользуемся обозначениями, указанными на рис. 150, *а*. Геометрические характеристики рассматриваемого профиля и расчет-

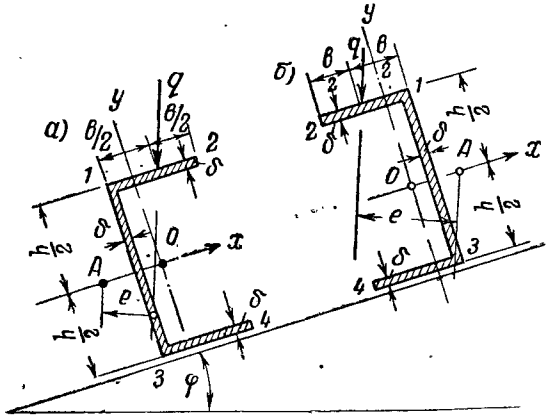


Рис. 150

ные силовые факторы можно выразить следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
&W_x = \frac{\delta h(h+6b)}{6}; \quad W_{y(2)} = W_{y(4)} = \frac{\delta b^2(b+2h)}{3(b+h)};\\
&W_{y(1)} = W_{y(3)} = \frac{\delta b}{3}(b+2h); \quad W_{\omega(2)} = W_{\omega(4)} = \frac{\delta b^2 h(2h+3b)}{6(h+3b)};\\
&W_{\omega(1)} = W_{\omega(3)} = \frac{\delta bh(2h+3b)}{18};\\
&M_x = \frac{ql^2}{8}\cos\varphi; \quad M_y = \frac{ql^2}{8}\sin\varphi;\\
&B_\omega = 0{,}01\alpha q l^2\left[\frac{b(h+12b)}{2(h+6b)}\cos\varphi - \frac{h}{2}\sin\varphi\right].
\end{aligned}\right\} \quad (299)$$

Здесь l — пролет прогона;

α — коэффициент, определяемый по VI кривой графика, данного в приложении 12.

Напряжения в четырех крайних точках сечения посредине пролета в сокращенной записи могут быть выражены в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= A\left(-B+\frac{\lambda}{1+\lambda}C-\frac{3\lambda}{1+3\lambda}D\right);\\
\sigma_2 &= A(-B-C+D);\\
\sigma_3 &= A\left(B+\frac{\lambda}{1+\lambda}C+\frac{3\lambda}{1+3\lambda}D\right);\\
\sigma_4 &= A(B-C-D),
\end{aligned}\right\} \tag{300}$$

где $\lambda=\frac{b}{h}$;

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{ql^2\cos\varphi}{8b^2(1+6\lambda)(2+\lambda)(2+3\lambda)};\\
B &= 0{,}75\lambda^2(\lambda+2)(2+3\lambda);\\
C &= 0{,}375(\lambda+1)(1+6\lambda)(2+3\lambda)\operatorname{tg}\varphi;\\
D &= 0{,}03\alpha(1+3\lambda)(2+\lambda)[\lambda(1+12\lambda)-(1+6\lambda)\operatorname{tg}\varphi].
\end{aligned}\right\} \tag{301}$$

Следует иметь в виду, что знаки последнего члена в формулах (300) приняты в соответствии со знаком эксцентрицитета e, как изображено на рис. 150, *а*. При обычных значениях λ знак e, а в связи с этим и знак D могут изменяться на обратный лишь при больших углах наклона кровли, не имеющих практического значения, а именно:

при

$$\operatorname{tg}\varphi > \frac{\lambda(1+12\lambda)}{1+6\lambda}. \tag{302}$$

Если удовлетворяются условия

$$|\sigma_3| > |\sigma_1|;\quad |\sigma_3| > |\sigma_4| \text{ и } |\sigma_2| > |\sigma_4|, \tag{303}$$

то условие оптимальности профиля будет выражаться формулой

$$|\sigma_3| = |\sigma_2|. \tag{304}$$

Первое из условий (303) удовлетворяется всегда, второе — только при

$$\alpha < \frac{50\lambda^2(2+\lambda)(2+3\lambda)-12{,}5(1+6\lambda)(2+3\lambda)\operatorname{tg}\varphi}{(2+\lambda)[\lambda(1+12\lambda)-(1+6\lambda)\operatorname{tg}\varphi]} \tag{305}$$

и, наконец, третье условие — только при

$$\alpha < \frac{25\lambda^2(2+3\lambda)}{(1+3\lambda)[\lambda(1+12\lambda)-(1+6\lambda)\operatorname{tg}\varphi]}. \tag{306}$$

Условие же оптимальности (304) соблюдается при

$$\alpha = \frac{12{,}5\,(2+3\lambda)\,\mathrm{tg}\,\varphi}{(2+\lambda)\,[\lambda\,(1+12\lambda)-(1+6\lambda)\,\mathrm{tg}\,\varphi]}. \tag{307}$$

Если второе из условий (303) удовлетворяется, а третье не удовлетворяется, то, очевидно, решающим будет значение σ_3. Если же второе условие не удовлетворяется, а третье удовлетворяется, то решающим будет значение σ_2 и, наконец, если оба условия не удовлетворяются, то решающим является значение σ_4.

Таким образом, подбирать оптимальные размеры швеллерного сечения прогона под кровли (при соблюдении указанных выше условий) следует по σ_2 или по σ_3. Проще, конечно, подбирать по σ_3, поскольку все составляющие его компоненты — положительны, а именно:

$$\sigma_3 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_{y(3)}} + \frac{B_\omega}{W_{\omega(3)}} = \frac{M_x}{W_x}\,\eta, \tag{308}$$

где

$$\eta = 1 + \frac{M_y}{M_x}\cdot\frac{W_x}{W_{y(3)}} + \frac{B_\omega}{M_x}\cdot\frac{W_x}{W_{\omega(3)}}. \tag{309}$$

Подставив в формулу (309) значения геометрических характеристик и силовых факторов из формулы (299), а значения α из формулы (307), получим

$$\eta = 1 + \frac{2+3\lambda}{\lambda\,(2+\lambda)}\,\mathrm{tg}\,\varphi. \tag{310}$$

Воспользуемся этой формулой и первой из формул (299) и подставим их в формулу (308).

Решив полученные уравнения относительно h, будем иметь

$$h^2 = \frac{6M_x}{[\sigma]\,\delta}\cdot\frac{\lambda\,(2+\lambda)+(2+3\lambda)\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\lambda\,(2+\lambda)\,(1+6\lambda)}. \tag{311}$$

Задавшись отношением $\lambda = \frac{b}{h}$, можно по известным M_x, $[\sigma]$, δ и φ определить высоту сечения прогона h.

С другой стороны, по формуле (307) по известным φ и λ определяется коэффициент α.

Но этот же коэффициент α, как было сказано выше, можно определить по VI кривой графика приложения 12, в зависимости от изгибно-крутильной характеристики профиля kl, равной

$$kl = l\sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}. \tag{312}$$

Подставив в формулу (312) $\frac{G}{E} = 0{,}381$;

$$J_d = \frac{1}{3}\,\delta^3\,(2b+h)$$

и

$$J_\omega = \frac{\delta b^3 h^3 (2h + 3b)}{12 (h + 6b)},$$

получим

$$kl = 1{,}235\nu \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{(1 + 2\lambda)(1 + 6\lambda)}{\lambda (2 + 3\lambda)}}, \tag{313}$$

где

$$\nu = \frac{\delta l}{h^2}. \tag{314}$$

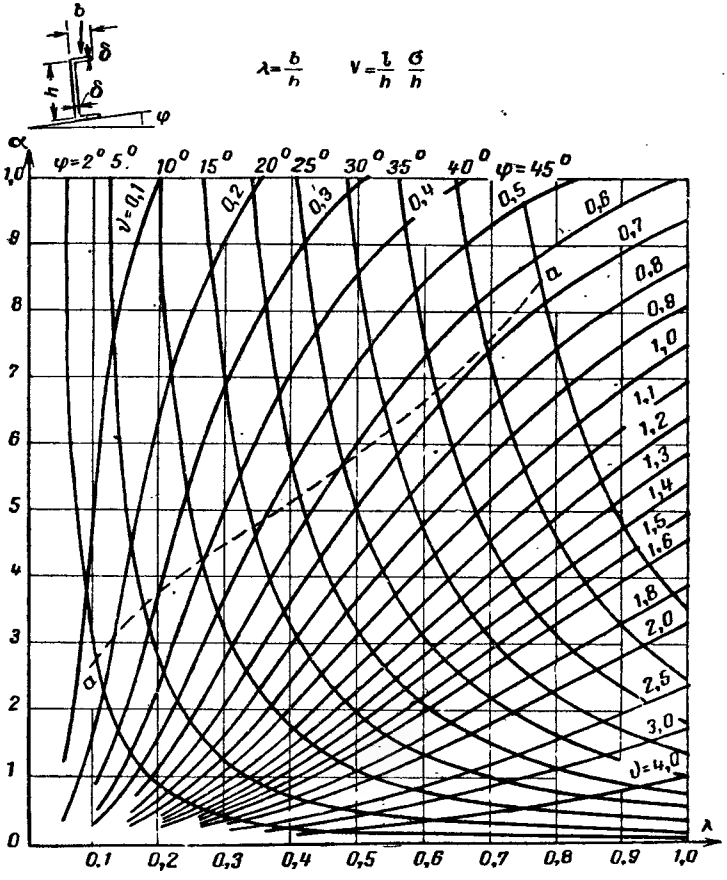


Рис. 151

Для практического пользования выведенными здесь формулами при подборе оптимальных размеров швеллерных прогонов нами построен график (рис. 151). Порядок пользования графиком показан ниже на численном примере.

Пунктирная кривая $a-a$ на этом графике указывает границу, выше которой профиль, удовлетворяющий условию (304), подобрать нельзя. Подбор сечения в этом случае, как было сказано выше, в зависимости от величины α, следует производить по одному из решающих напряжений σ_3, σ_2 или σ_4.

Совершенно аналогичные исследования нами проведены по отношению к профилю, расположенному на кровле, как указано на рис. 150,*б*.

Формулы (299) для этого случая остаются в силе с той лишь разницей, что для B_ω знак перед вторым слагаемым в скобках следует взять положительным.

Напряжения в крайних точках в сокращенной записи выразятся формулами

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= A\left(-B-\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot C-\frac{3}{1+3\lambda}\cdot D_1\right);\\
\sigma_2 &= A(-B+C+D_1);\\
\sigma_3 &= A\left(B-\frac{\lambda}{1+\lambda}C+\frac{3\lambda}{1+3\lambda}D_1\right);\\
\sigma_4 &= A(B+C-D_1),
\end{aligned}\right\} \tag{315}$$

где λ, A, B, и C определяются формулами (301), а

$$D_1 = 0{,}03\alpha(1+3\lambda)(2+\lambda)[\lambda(1+12\lambda)+(1+6\lambda)\operatorname{tg}\varphi]. \tag{316}$$

Знак e, а следовательно и знак D_1, при любом значении φ в этом случае не меняется.

Условие оптимальности выразится формулой

$$|\sigma_1| = |\sigma_4|, \tag{317}$$

если удовлетворяются условия

$$|\sigma_1| > |\sigma_3|; \quad |\sigma_1| > |\sigma_2| \text{ и } |\sigma_4| > |\sigma_2|. \tag{318}$$

Первое из этих условий удовлетворяется всегда, второе — только при

$$\alpha < \frac{50\lambda^2(2+\lambda)(2+3\lambda)-12{,}5(1+6\lambda)(2+3\lambda)\operatorname{tg}\varphi}{(2+\lambda)[\lambda(1+12\lambda)+(1+6\lambda)\operatorname{tg}\varphi]} \tag{319}$$

и, наконец, третье условие — только при

$$\alpha < \frac{25\lambda^2(2+3\lambda)}{(1+3\lambda)[\lambda(1+12\lambda)+(1+6\lambda)\operatorname{tg}\varphi]}. \tag{320}$$

Условие же оптимальности (317) удовлетворяется при

$$\alpha = \frac{12{,}5(2+3\lambda)\operatorname{tg}\varphi}{(2+\lambda)[\lambda(1+12\lambda)+(1+6\lambda)\operatorname{tg}\varphi]}. \tag{321}$$

Если второе или третье из условий (318) или оба вместе не удовлетворяются, то решающим при выборе сечения будет соответственно σ_4, σ_1 и σ_2.

График для подбора оптимальных размеров профиля, расположенного на рис. 150,*б*, представлен на рис. 152. Пунктирная кривая *а — а* так же, как и в предыдущем графике, указывает границу, выше которой профиль, удовлетворяющий условию (317), по-

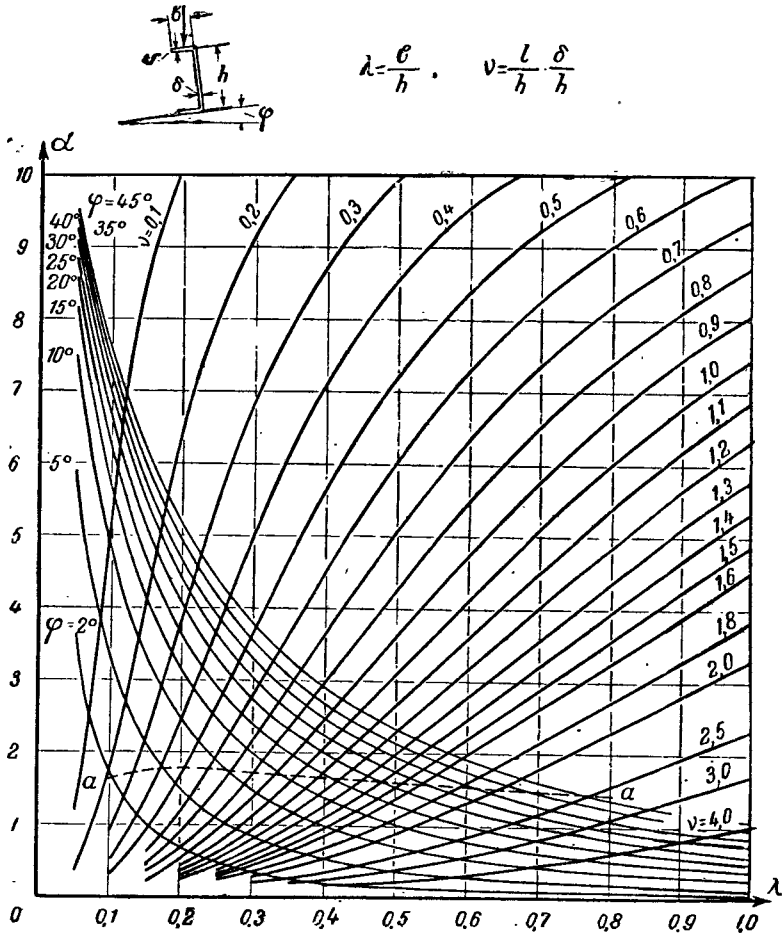


Рис. 152

добрать нельзя. Подбор в этом случае, в зависимости от величины α, следует производить по одному из решающих напряжений σ_4, σ_1 или σ_2.

Пример 26. Подобрать прогон швеллерного профиля из стали толщиной $\delta = 10$ *мм* для кровли с углом наклона $\varphi = 10°$ под нагрузку $q = 600$ *кг/м*, расположенный по рис. 150,*а*. Пролет прогона $l = 6$ *м*.

Допускаемое напряжение для стали $[\sigma] = 1400$ *кг/см²*.

Расчетный изгибающий момент

$$M_x = \frac{ql^2}{8}\cos\varphi = \frac{6\cdot 600^2}{8}\cdot 0{,}985 = 266\,000\ кгсм.$$

Задавшись отношением

$$\lambda_1 = \frac{b}{h} = 0{,}35,$$

находим по формуле (311)

$$h_1^2 = \frac{6\cdot 266\,000}{1\,400\cdot 1}\cdot\frac{0{,}35\cdot 2{,}35 + 3{,}05\cdot 0{,}176}{0{,}35\cdot 2{,}35\cdot 3{,}1} = 1140\cdot\frac{1{,}359}{2{,}55} = 608\ см^2.$$

По формуле (314) ν будет равно

$$\nu_1 = \frac{1600}{608} = 0{,}99.$$

По графику (рис. 151) при $\lambda = \lambda_1 = 0{,}35$ и $\varphi = 10°$ находим $\alpha_1 = 2{,}25$.

По этому же графику при $\nu = 0{,}99$ и $\alpha_1 = 2{,}25$ находим $\lambda_2 = 0{,}415$.

Для $\lambda = \lambda_2 = 0{,}415$ и $\varphi = 10°$ находим $\alpha_2 = 1{,}6$

и

$$h^2 = 1140\,\frac{0{,}415\cdot 2{,}415 + 3{,}245\cdot 0{,}176}{0{,}415\cdot 2{,}415\cdot 3{,}49} = 1140\,\frac{1{,}573}{3{,}5} = 513\ см^2.$$

Тогда

$$\nu_2 = \frac{1\cdot 600}{513} = 1{,}17.$$

Для $\nu = 1{,}17$ и $\alpha_2 = 1{,}6$ находим $\lambda_3 = 0{,}405 \approx \lambda_2$.

Следовательно, окончательно можем принять

$$\lambda = \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2} = \frac{0{,}415 + 0{,}405}{2} = 0{,}41.$$

При этом значении λ будем иметь $\alpha = 1{,}65$. Для проверки находим значение α по кривой VI приложения 12.

По формулам (313) и (314)

$$kl = 1{,}235\,\frac{1\cdot 600}{520}\,\frac{1}{0{,}41}\sqrt{\frac{1{,}82\cdot 3{,}46}{0{,}41\cdot 3{,}23}} = 3{,}47\cdot 2{,}18 = 7{,}57.$$

По кривой VI указанного графика 12

$$\alpha = 1{,}65.$$

Определяем размеры сечения прогона

$$h = \sqrt{1140\,\frac{0{,}41\cdot 2{,}41 + 3{,}3\cdot 0{,}176}{0{,}41\cdot 2{,}41\cdot 3{,}46}} =$$

$$= \sqrt{1140\,\frac{1{,}558}{3{,}46}} = \sqrt{520} = 22{,}8\ см;$$

$$b = \lambda h = 0{,}41\cdot 22{,}8 = 9{,}35\ см.$$

Проверим рабочие напряжения в крайних точках сечения профиля.

Предварительно вычислим значения

$$M_y = \frac{ql^2}{8}\sin\varphi = \frac{6\cdot 600^2}{8}\,0{,}174 = 47000\ кгсм.$$

Подставив значения $\alpha = 1{,}65$ в формулы (299), получаем

$$B_\omega = 0{,}01\cdot 1{,}65\cdot 6\cdot 600^2\left[\frac{9{,}35\,(1+12\cdot 0{,}41)}{2\,(1+6\cdot 0{,}41)}\,0{,}985 - \frac{22{,}8}{2}\,0{,}174\right] =$$

$$= 35\,700\,(7{,}86 - 1{,}98) = 209\,800\ кгсм^2;$$

$$W_x = \frac{1\cdot 22{,}8\,(22{,}8 + 6\cdot 9{,}35)}{6} = 300\ см^3;$$

$$W_{y(2)} = W_{y(4)} = \frac{1\cdot 9{,}35^2\,(9{,}35 + 2\cdot 22{,}8)}{3\,(9{,}35 + 22{,}8)} = 49{,}7\ см^3;$$

$$W_{y(1)} = W_{y(3)} = \frac{1\cdot 9{,}35}{3}\,(9{,}35 + 2\cdot 22{,}8) = 171\ см^3;$$

$$W_{\omega(2)} = W_{\omega(4)} = \frac{1\cdot 9{,}35^2\cdot 22{,}8\,(2\cdot 22{,}8 + 3\cdot 9{,}35)}{6\,(22{,}8 + 3\cdot 9{,}35)} = 481\ см^4;$$

$$W_{\omega(1)} = W_{\omega(3)} = \frac{1\cdot 9{,}35\cdot 22{,}8\,(2\cdot 22{,}8 + 3\cdot 9{,}35)}{18} = 872\ см^4.$$

Тогда

$$\sigma_x = \frac{266\,000}{300} = 888\ кг/см^2;$$

$$\sigma_{y(1)} = \sigma_{y(3)} = \frac{47\,000}{171} = 274\ кг/см^2;$$

$$\sigma_{y(2)} = \sigma_{y(4)} = \frac{47\,000}{49{,}7} = 945\ кг/см^2;$$

$$\sigma_{\omega(1)} = \sigma_{\omega(3)} = \frac{209\,800}{872} = 240\ кг/см^2;$$

$$\sigma_{\omega(3)} = \sigma_{\omega(4)} = \frac{209\,800}{481} = 435\ кг/см^2.$$

Суммарные напряжения в крайних точках профиля будут равны

$$\sigma_1 = -\sigma_x + \sigma_{y(1)} - \sigma_{\omega(1)} = -888 + 274 - 240 = -854\ кг/см^2;$$

$$\sigma_2 = -\sigma_x - \sigma_{y(2)} + \sigma_{\omega(2)} = -888 - 945 + 435 = 1398\ кг/см^2;$$

$$\sigma_3 = \sigma_x + \sigma_{y(3)} + \sigma_{\omega(3)} = 888 + 274 + 240 = 1402\ кг/см^2;$$

$$\sigma_4 = \sigma_x - \sigma_{y(4)} - \sigma_{\omega(4)} = 888 - 945 - 435 = -492\ кг/см^2.$$

§ 40. РАСЧЕТ ОТКРЫТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ, УСИЛЕННЫХ ПЛАНКАМИ ИЛИ РЕШЕТКОЙ

1. СТЕРЖНИ, УСИЛЕННЫЕ ПЛАНКАМИ

В п. 5 § 5 мы описали результаты проведенных испытаний на чистое кручение открытых тонкостенных стержней, усиленных планками или различного типа решетками. Эти испытания, проведенные старшим научным сотрудником ЦНИИПС Н. Г. Добудогло, убедили нас в том, что жесткость стержня при чистом кручении GJ_d по мере заполнения открытой части стержня планками, а тем

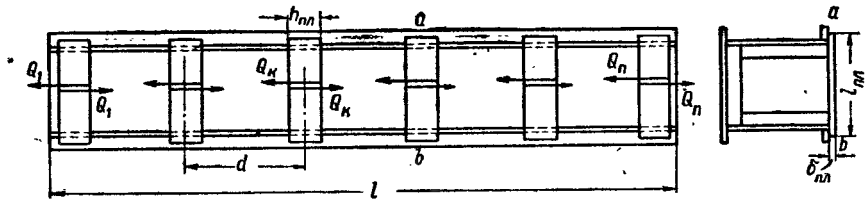


Рис. 153

более различного типа решетками сильно увеличивается, приближая открытый стержень к стержню с замкнутым сечением. Поэтому представляется необходимым рассмотреть способы расчета этих стержней. Этим вопросом довольно подробно занимались кандидаты техн. наук М. И. Длугач[1], Л. М. Шаншиашвили[2] и Г. П. Соболевский[3].

Стержни, усиленные планками, будем рассчитывать по методу сил, разрезая каждую из планок посередине ее длины и заменяя действие удаленных связей поперечными силами Q_k, при этом вследствие обычной симметрии при расстановке планок число лишних неизвестных будет равно числу планок, деленному пополам (рис. 153).

Коэффициенты канонических уравнений и свободные члены будем определять по следующим формулам:

$$\delta_{ki} = \theta'_{ki}(\omega_a - \omega_b) = \frac{\theta_i \Omega (\omega_a - \omega_b)}{kEJ_\omega \operatorname{sh} kl} \cdot \operatorname{ch} k(l - z_i) \operatorname{ch} kz_k; \qquad (322)$$

$$\delta_{kk} = \theta'_{kk}(\omega_a - \omega_b) + \frac{l^3_{пл}}{12EJ_{пл}}\left(1 + 3\frac{h^2_{пл}}{l^2_{пл}}\right); \qquad (323)$$

$$\Delta_{кр} = \theta'_{кр}(\omega_a - \omega_b) = \frac{M(\omega_a - \omega_b)}{k^2 EJ_\omega}, \qquad (324)$$

---

[1] М. И. Длугач. Крутильная жесткость тонкостенного стержня, усиленного решеткой. Сборник трудов Института строительной механики АН УССР, № 11, 1949.

[2] Л. М. Шаншиашвили. Расчет тонкостенных составных стержней на кручение. Сборник «Исследование по вопросам теории и проектирования тонкостенных конструкций», Госстройиздат, 1950.

[3] Г. П. Соболевский. Расчет тонкостенных стержней, усиленных поперечными планками. Киев, изд-во Академии архитектуры УССР, 1953.

где ω_a и ω_b — секториальные координаты точек a и b прикрепления концов планки;

Ω — удвоенная площадь, ограниченная контуром поперечного сечения и осью планки;

$EJ_{пл}=E\dfrac{\delta_{пл}h^3_{пл}}{12}$ — изгибная жесткость планки;

θ'_{kl} и θ'_{kp} — депланации сечения $z=z_k$, вызванные поперечной силой $Q_i=1$ и внешней нагрузкой.

Формулы для определения коэффициентов уравнений метода сил (322), (323) и (324) нами получены из формул (3) и (5) приложения 7.

Определив из канонических уравнений метода сил значения неизвестных поперечных сил в планках Q_k, мы найдем коэффициент увеличения m жесткости стержня, усиленного планками при чистом кручении GJ_d по сравнению с соответствующей жесткостью стержня без планок GJ_d.

Из формулы (4) жесткости стержня с планками и без планок равны

$$\overline{GJ}_d=\frac{M_{кр}}{\overline{\theta}'}; \tag{325}$$

$$GJ_d=\frac{M_{кр}}{\theta'}, \tag{326}$$

откуда, считая, что депланации $\overline{\theta}'$ и θ' стержня с планками и без планок возникли при $M_{кр}=1$, получим

$$\frac{\overline{GJ}_d}{GJ_d}=\frac{\theta'}{\overline{\theta}'}=\frac{\theta}{\overline{\theta}}. \tag{327}$$

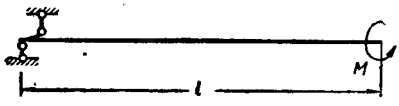


Рис. 154

По формуле (3) приложения 7 угол закручивания свободного конца стержня без планок (рис. 154)

$$\theta=\frac{l}{k^2EJ_\omega}, \tag{328}$$

а соответствующий угол закручивания стержня, усиленного планками, равен

$$\overline{\theta}=\frac{l}{k^2EJ_\omega}+\sum\frac{B_k}{k^2EJ_\omega}\left[\frac{\operatorname{ch}k(l-a)}{\operatorname{sh}kl}\operatorname{sh}kl-\operatorname{ch}k(l-a)+1\right], \tag{329}$$

а так как $B_k=Q_k\Omega$, то будем иметь

$$m=\frac{\overline{GJ}_d}{GJ_d}=\frac{1}{1+\dfrac{\Omega}{l}\sum Q_k}. \tag{330}$$

Для того чтобы лучше освоить указанный метод расчета тонкостенного стержня, усиленного планками, ниже выполнен пример

расчета П-образного стержня, усиленного шестью планками, который был нами подвергнут экспериментальному исследованию.

Выше на стр. 42 нами было указано, что с увеличением числа планок крутильная жесткость стержня пропорционально увеличивается. Это указание подтвердилось исследованиями канд. техн. наук Г. П. Соболевского, который построил соответствующий график (рис. 155), из которого видно, что при числе планок больше четырех можно считать, что жесткость стержня при чистом кручении увеличивается пропорционально числу планок.

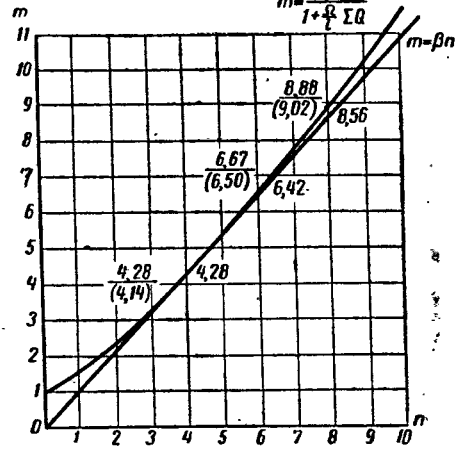


Рис. 155

Пример 27. Рассчитать П-образный стержень, усиленный шестью планками (рис. 156).

Координата центра тяжести, отсчитанная от верхних полок y_0 будет равна (рис. 157,*а*)

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{130,218}{19,05} = 6,84\ см.$$

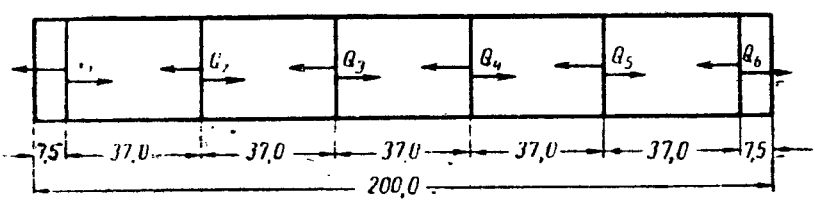


Рис. 156

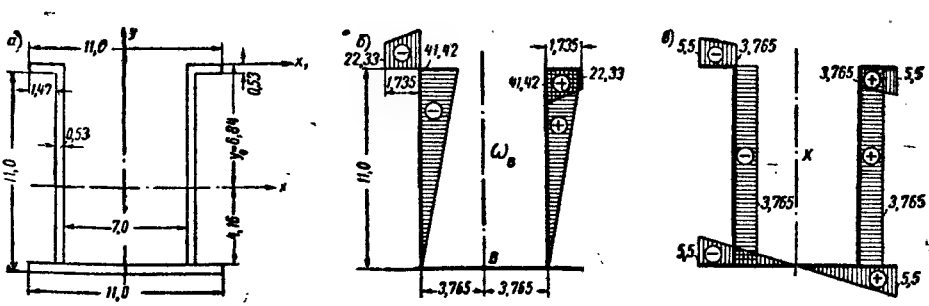


Рис. 157

Момент инерции относительно оси y

$$J_y = \frac{0{,}53\cdot 11^3}{12} + 0{,}53\cdot 11\cdot 37{,}65^2\cdot 2 +$$

$$+ 2\left(\frac{0{,}53\cdot 14{,}7^3}{12} + 0{,}53\cdot 14{,}7\cdot 47{,}65^2\right) = 261\ см^4.$$

Для определения координаты центра изгиба α_y построим эпюры секториальных координат ω_B с полюсом B, принятым в в средней точке нижней полки, и линейных координат x (рис. 157, *б* и *в*).

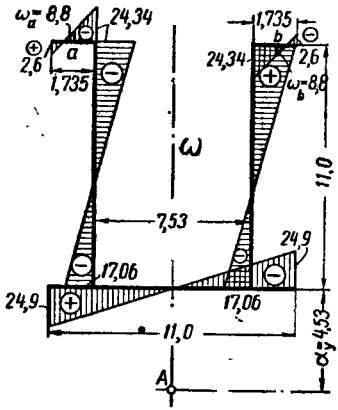


Рис. 158

Тогда координата центра изгиба определится по формуле

$$\alpha_y = \frac{\int\limits_F \omega_B\, x dF}{J_y},$$

где $\int\limits_F \omega_B x dF$ определим путем взаимного интегрирования эпюр, построенных на рис. 157, а именно:

$$\int\limits_F \omega_B x dF = 2\cdot 41{,}42\cdot 11\cdot \frac{1}{2}\, 3{,}765\cdot 0{,}53 +$$

$$+ 2\,\frac{0{,}53\cdot 1{,}735}{6}\cdot [2\cdot 22{,}33\cdot 5{,}5 +$$

$$+ 2\cdot 41{,}42\cdot 3{,}765 + 22{,}33\cdot 3{,}765 +$$

$$+ 41{,}42\cdot 5{,}5] = 1184{,}8\ см^5.$$

Подставив это значение в предыдущую формулу, получим

$$\alpha_y = \frac{1184{,}8}{261} = 4{,}53\ см.$$

На рис. 158 построена эпюра главных секториальных координат с полюсом в центре изгиба A. Интегрируя ее саму с собой, получим секториальный момент инерции J_ω

$$J_\omega = \left[\frac{11}{6}(2\cdot 24{,}9^2 + 2\cdot 24{,}9^2 - 2\cdot 24{,}9^2\right] +$$

$$+ \frac{2\cdot 11}{6}\cdot(2\cdot 24{,}34^2 + 2\cdot 17{,}36^2 - 2\cdot 24{,}34\cdot 17{,}36) +$$

$$+ \frac{2\cdot 1{,}735}{6}(2\cdot 2{,}6^2 + 2\cdot 24{,}34^2 - 2\cdot 24{,}34\cdot 2{,}6)\Big]\, 0{,}53 = 3366\ см^6.$$

Модули продольной и поперечной упругости, полученные при испытании материала стержня, равны

$$E = 2{,}15\cdot 10^6\ кг/см^2 \text{ и } G = 0{,}815\cdot 10^6\ кг/см^2,$$

а жесткость стержня при чистом кручении, не усиленного планками, равна

$$GJ_d = 2{,}151 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2.$$

Секториальная жесткость стержня и упругая изгибно-крутильная характеристика равны

$$EJ_\omega = 2{,}15 \cdot 10^6 \cdot 3366 = 7236 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^4;$$

$$k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}} = \sqrt{\frac{2{,}151 \cdot 10^6}{7236 \cdot 10^6}} = \sqrt{0{,}000298} = 0{,}01726 \text{ см}^{-1};$$

$$kl = 0{,}01726 \cdot 200 = 3{,}452; \quad \operatorname{sh} kl = \operatorname{sh} 3{,}452 = 15{,}754.$$

Удвоенная площадь сечения, ограниченная контуром сечения и осью планки:

$$\Omega = 11 \cdot 7{,}53 \cdot 2 = 165{,}66 \text{ см}^2; \quad \omega_a - \omega_b = 8{,}8 + 8{,}8 = 17{,}6 \text{ см}^2.$$

Принимая размеры планки:

$$l_{пл} = 11 - 1{,}5 = 9{,}5 \text{ см}; \quad h_{пл} = 7 \text{ см} \text{ и } \delta_{пл} = 0{,}53 \text{ см},$$

получим

$$J_{пл} = \frac{\delta_{пл} h_{пл}^3}{12} = \frac{0{,}53 \cdot 7^3}{12} = 15{,}15 \text{ см}^4.$$

Коэффициенты канонических уравнений метода сил для определения поперечных сил в планках, определяемые формулами (322), (323) и (324), будут равны

$$\delta_{kl} = \frac{165{,}66 \cdot 17{,}6}{0{,}01726 \cdot 7236 \cdot 10^6 \cdot 15{,}754} \operatorname{ch} k(l - z_i) \operatorname{ch} kz_k =$$

$$= 1{,}494 \cdot 10^{-6} \operatorname{ch} k(l - z_i) \operatorname{ch} kz_k;$$

$$\delta_{kk} = 1{,}494 \cdot 10^{-6} \cdot \operatorname{ch} k(l - z_k) \operatorname{ch} kz_k + \frac{9{,}5^3}{12 \cdot 2{,}5 \cdot 10^6 \cdot 15{,}15} \left(1 + 3\frac{7^2}{9{,}5^2}\right) =$$

$$= 1{,}494 \cdot 10^{-6} \operatorname{ch} k(l - z_k) \operatorname{ch} kz_k + 5{,}76 \cdot 10^{-6};$$

$$\Delta_{кр} = \frac{M \cdot 17{,}6}{2{,}151 \cdot 10^6} = 8{,}182 \cdot 10^{-6} M.$$

Для определения косинусов, входящих в выражения δ_{kl} и δ_{kk}, составим табл. 39.

Таблица 39

№ п/п	z_k	kz_k	$chkz_k$	$k(l-z_i)$	$chk(l-z_i)$
1	7,5	0,1295	1,008	3,3226	13,902
2	44,5	0,7681	1,310	2,6839	7,361
3	81,5	1,4067	2,162	2,0453	3,942
4	118,5	2,0473	3,942	1,4067	2,162
5	155,5	2,6839	7,361	0,7681	1,310
6	192,5	3,3226	13,902	0,1295	1,008

Тогда коэффициенты канонических уравнений будут иметь следующие численные значения:

$$\delta_{11} = \delta_{66} = 20{,}94 \cdot 10^{-6}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{56} = \delta_{65} = 11{,}09 \cdot 10^{-6};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{46} = \delta_{64} = 5{,}94 \cdot 10^{-6}; \quad \delta_{14} = \delta_{41} = \delta_{36} = \delta_{63} = 3{,}25 \cdot 10^{-6};$$

$$\delta_{15} = \delta_{51} = \delta_{26} = \delta_{62} = 1{,}97 \cdot 10^{-6}; \quad \delta_{16} = \delta_{61} = 1{,}52 \cdot 10^{-6};$$

$$\delta_{22} = \delta_{55} = 14{,}41 \cdot 10^{-6}; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{45} = \delta_{54} = 7{,}72 \cdot 10^{-6};$$

$$\delta_{24} = \delta_{42} = \delta_{35} = \delta_{53} = 4{,}23 \cdot 10^{-6}; \quad \delta_{25} = \delta_{52} = 2{,}56 \cdot 10^{-6};$$

$$\delta_{33} = \delta_{44} = 12{,}73 \cdot 10^{-6}; \quad \delta_{34} = \delta_{43} = 6{,}98 \cdot 10^{-6}.$$

Вследствие симметрии в расстановке планок

$$Q_1 = Q_6; \quad Q_2 = Q_5; \quad Q_3 = Q_4.$$

Тогда уравнения для определения поперечных сил в планках запишутся так:

$$28{,}22Q_1 + 13{,}06Q_2 + 9{,}18Q_3 + 8{,}18M = 0;$$

$$13{,}06Q_1 + 22{,}73Q_2 + 11{,}95Q_3 + 8{,}18M = 0;$$

$$9{,}18Q_1 + 11{,}95Q_2 + 25{,}47Q_3 + 8{,}18M = 0.$$

Решая совместно эту систему уравнений, найдем при $M = 1$ $Q_1 = -0{,}146$, $Q_2 = -0{,}182$, $Q_3 = -0{,}185$ и по формуле (330) коэффициент увеличения крутильной жесткости стержня, усиленного шестью планками

$$m = \frac{1}{1 - \frac{165{,}66}{200} 1{,}026} = 6{,}57;$$

$$\overline{GJ_d} = 2{,}151 \cdot 10^6 \cdot 6{,}57 = 14{,}13 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2.$$

По экспериментальным данным эта жесткость равнялась

$$GJ_d^{\text{эксп}} = 13{,}98 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2.$$

Расхождение составляет всего около 1%.

По исследованиям М. И. Длугача и Г. П. Соболевского это расхождение представлено в табл. 40.

Таблица 40

№ п п	Тип стержня	Жесткость при чистом кручении GJ_d		
		по экспериментальным данным	по исследованиям М. И. Длугача	по исследованиям Г. П. Соболевского
1	Стержень с 4 планками	$8{,}897 \cdot 10^6$	$8{,}67 \cdot 10^6$	$9{,}2 \cdot 10^6$
2	Стержень с 6 планками	$13{,}98 \cdot 10^6$	$14{,}663 \cdot 10^6$	$14{,}33 \cdot 10^6$
3	Стержень с 8 планками	$19{,}79 \cdot 10^6$	$19{,}938 \cdot 10^6$	$19{,}1 \cdot 10^6$

Такое близкое совпадение экспериментальных данных и результатов наших исследований и исследований Длугача и Соболевского указывает на высокое качество экспериментов, проведенных в ЦНИИПС.

Для расчета тонкостенных стержней, усиленных планками на совместное действие изгиба и кручения, надо только заменить жесткость стержня при чистом кручении и изгибно-крутильную характеристику сечения стержня без планок на жесткость стержня при чистом кручении и изгибно-крутильную характеристику для стержня, усиленного планками, и дальнейший расчет стержня производится по обычным формулам расчета тонкостенных стержней.

Так, например, изгибно-крутящий бимомент посредине пролета от действия закручивающего момента, приложенного посредине свободно опертого, но закрепленного от углов закручивания тонкостенного стержня по формуле (7) приложения 8 будет равен:

для стержня без планок ($k=0{,}01726\ см^{-1}$)

$$B_\omega = \frac{M}{2k}\,\mathrm{th}\,\frac{kl}{2} = \frac{M}{0{,}3452}\,\mathrm{th}\,1{,}657 = \frac{0{,}9295}{0{,}3452}M = 2{,}695M;$$

для этого же стержня, усиленного шестью планками,

$$\bar{k} = k\sqrt{\frac{\bar{G}J_d}{GJ_d}} = 0{,}01726\sqrt{\frac{14{,}13\cdot 10^6}{2{,}151\cdot 10^6}} = 0{,}04419\ см^{-1}.$$

$$B_\omega = \frac{M}{2\bar{k}}\,\mathrm{th}\,\frac{\bar{k}l}{2} = \frac{M}{0{,}8838}\,\mathrm{th}\,4{,}242 = \frac{0{,}99958}{0{,}8838}M = 1{,}131M.$$

Действие поперечной силы в планках выразится в виде скачков на эпюре изгибно-крутящих бимоментов в местах прикрепления планок.

Как видим, шесть планок, прикрепленных к стержню, уменьшили наибольший изгибно-крутящий бимомент этого стержня больше чем в два раза.

В п. 3 § 8 мы рассмотрели результаты экспериментальных исследований влияния планок и решеток на величину нормальных напряжений в П-образном стержне при совместиом действии изгиба и кручения.

Вычислим теперь эти напряжения и посмотрим, как они соответствуют экспериментальным. Места установки тензометров указаны на рис. 62, *а*, соответствующая эпюра экспериментальных напряжений — на рис. 63, *а*.

Напряжения измерялись от действия силы $P=230$ *кг* при эксцентрицитете ее приложения $e=3{,}91$ *см* в сечении $z=70$ *см* от опоры.

Изгибающий момент в этом сечении будет равеи

$$M = \frac{P}{2}z = 115\cdot 70 = 8050\ кгсм.$$

Изгибно-крутящий бимомент в этом же сечении

$$B_\omega = \frac{Pe}{2\bar{k}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \bar{k}z}{\operatorname{ch} \frac{\bar{k}l}{2}} = \frac{230 \cdot 3{,}91}{2 \cdot 0{,}04418} \cdot \frac{\operatorname{sh} 3{,}093}{\operatorname{ch} 4{,}242} =$$

$$= 10177 \frac{11 \cdot 0024}{34{,}8232} = 3222 \text{ кгсм}^2.$$

Тогда напряжения в четырех точках, указанных на рис. 62, будут равны

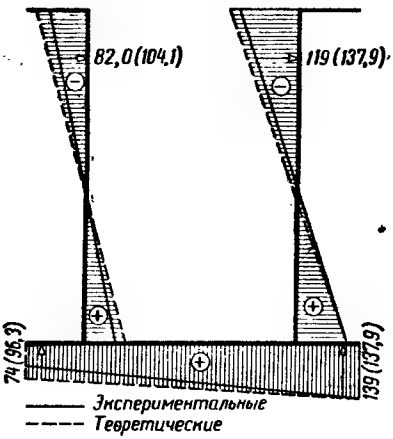


Рис. 159

$$\sigma_1 = -\frac{My}{J_x} + \frac{B_\omega \omega}{J_\omega} =$$

$$= -\frac{8050\,(6{,}84 - 2{,}03)}{320} + \frac{3222 \cdot 17{,}64}{3366} =$$

$$= -25{,}16 \cdot 4{,}81 + 0{,}958 \cdot 17{,}64 =$$

$$= -121 + 16{,}9 = -104{,}1 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_5 = -25{,}16 \cdot 4{,}81 -$$

$$-0{,}958 \cdot 17{,}64 = -121 - 16{,}9 =$$

$$= -137{,}9 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_2 = 25{,}16 \cdot 4{,}69 - 0{,}958 \cdot 22{,}6 =$$

$$= 118 - 21{,}7 = 96{,}3 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_6 = 118 + 21{,}7 = 139{,}7 \text{ кг/см}^2.$$

На рис. 159 мы изобразили экспериментальную эпюру, представленную на рис. 63, *а*, и на ней же пуктиром изобразили напряжения, полученные нами по расчету, считая изгибающий момент и изгибно-крутящий бимомент как в обыкновенном стержне, т. е. без учета скачков от действия поперечных сил в планках.

Как видно, совпадение не плохое, а в наиболее напряженной точке напряжения почти совпадают.

2. СТЕРЖНИ, УСИЛЕННЫЕ РЕШЕТКОЙ

Рассмотрим тонкостенный стержень П-образного сечения, усиленный треугольной решеткой (рис. 160). Так как в местах прикрепления к стержню элементов решетки никаких внешних сил не приложено, то усилия в этих элементах должны быть равны

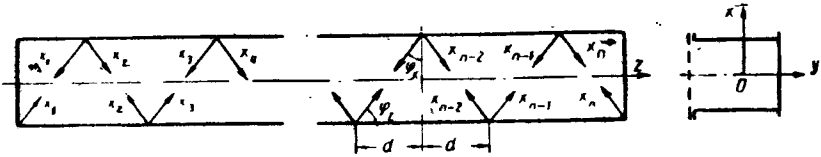


Рис. 160

по величине и противоположны по знаку, т. е., независимо от величины панели и числа элементов треугольной решетки, мы будем иметь только одно неизвестное усилие, равное для всех элементов решетки, отличающееся только чередованием знаков.

Канд. техн. наук М. И. Длугач достаточно подробно исследовал вопрос определения этого усилия и в результате этих исследований он рекомендует пользоваться приближенной формулой расчета, а именно рекомендует принимать жесткость стержня при чистом кручении GJ_d для стержня, усиленного треугольной решеткой, увеличенной на коэффициент $(1+m^2)$ по сравнению с соответствующей жесткостью этого стержня GJ_d, не усиленного ни планками, ни решеткой, т. е.

$$\overline{GJ}_d = (1 + m^2)\, GJ_d$$

и все дальнейшие расчеты вести обычным способом, причем величину коэффициента m^2 рекомендуется принимать равной

$$m^2 = \frac{\beta^2 GJ_d}{\frac{1}{E\overline{F}_p} ad},$$

где

$$\beta = \frac{2\omega \cos\varphi_z - e\cos\varphi_x d}{GJ_d};$$

d — длина панели решетки;

a — длина стержня решетки между точками прикрепления;

$\overline{F}_p$ — приведенная площадь поперечного сечения стержня решетки, которую приближенно рекомендуется принимать равной $\overline{F}_p = 0{,}565 F_p$;

ω — секториальная координата точки прикрепления раскоса;

φ_z и φ_x — углы наклона раскоса (рис. 160);

e — расстояние от центра изгиба до плоскости решетки.

По исследованиям М. И. Длугача при

$$\frac{J_\omega}{\omega^2} \geqslant 9\overline{F}_p \text{ для } \varphi_z = 35^\circ$$

и

$$\frac{J_\omega}{\omega^2} \geqslant 3\overline{F}_p \text{ для } \varphi_z = 55^\circ$$

при пользовании этой формулой ошибка не будет превышать 2% по сравнению с величиной m^2, определенной по более точным формулам.

Рекомендуемые выше формулы справедливы также и для стержня, усиленного перекрестной решеткой. В этом случае приведенную площадь решетки $\overline{F}_p$ следует принимать как для раскосов одного, так и другого направления.

Пример 28. Рассчитать П-образный стержень, усиленный треугольной и перекрестной решетками. Стержень принимаем тот же, что и в примере 27. Панель треугольной решетки $d=8$ *см*, панель перекрестной решетки $d=12$ *см*. Элементы треугольной решетки выполнены из 2-*мм* листовой стали в форме уголков 20×20 *мм*; элементы перекрестной решетки выполнены из полос шириной в 2 *см* и толщиной 2 *мм*.

а) Стержень с треугольной решеткой

Секториальная координата точки прикрепления раскоса

$$\omega = 10{,}9\,см^2.$$

Приведенная площадь раскоса

$$\overline{F}_р = (2 + 1{,}8)\,0{,}2 \cdot 0{,}565 = 0{,}429\,см^2.$$

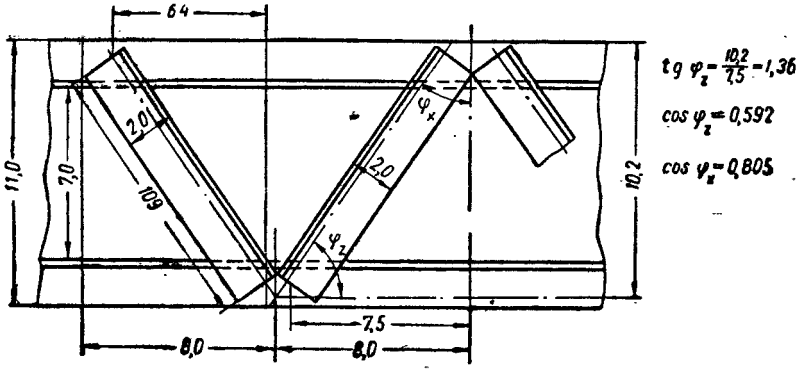


Рис. 161

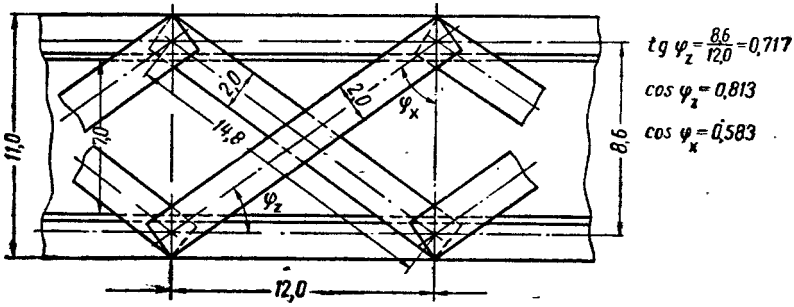


Рис. 162

Значения косинусов φ_z и φ_x см. на рис. 161 и 162. Расстояние от центра изгиба до плоскости решетки

$$e = -(4{,}53 + 11 + 0{,}26) = -15{,}79\,см.$$

Определение действительной величины панели и длины стержня решетки между точками прикрепления произведено на рис. 161.

$$d = 6{,}4\,см; \quad a = 10{,}9\,см.$$

$$\text{Тогда } \beta = \frac{2\omega \cos\varphi_z - de\cos\varphi_x}{GJ_d} =$$

$$= \frac{2\cdot 10{,}9\cdot 0{,}592 + 6{,}4\cdot 15{,}79\cdot 0{,}805}{GJ_d} = \frac{12{,}90 + 81{,}35}{GJ_d} = \frac{94{,}95}{GJ_d}$$

и

$$m^2 = \frac{\beta^2 GJ_d}{\frac{1}{E\overline{F}_p}ad} = \frac{94{,}25^2\cdot 2{,}15\cdot 10^6\cdot 0{,}429}{2{,}151\cdot 10^6\cdot 10{,}9\cdot 8} = 43{,}75.$$

Тогда жесткость при чистом кручении стержня, усиленного треугольной решеткой, будет равна

$$\overline{GJ_d} = (1 + m^2)\,GJ_d = (1 + 43{,}75)\,GJ_d =$$
$$= 2{,}151\cdot 10^6\cdot 44{,}75 = 96{,}26\cdot 10^6\,кгсм^2.$$

Сравнивая полученную величину $\overline{Gl}_d$ с соответствующей величиной жесткости, полученной экспериментально для рассматриваемого стержня $GJ_d^{эксп} = 92{,}09\cdot 10^6$, видим, что расхождение незначительное, составляющее

$$\frac{96{,}26 - 92{,}09}{96{,}26} = 4{,}34\%.$$

Определим теперь напряжения, возникающие в этом стержне при действии на него силы $P = 230$ *кг* при эксцентрицитете ее приложения $e = 3{,}91$ *см*.

В сечении $z = 70$ *см* изгибающий момент будет равен

$$M = 8050\,кгсм.$$

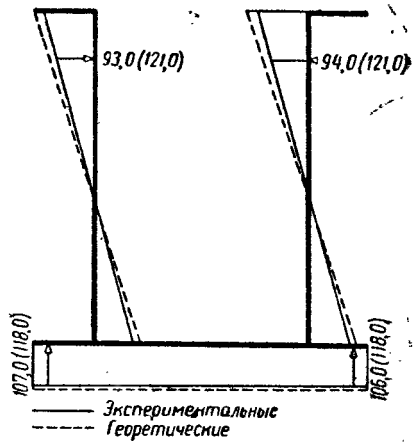


Рис. 163

Изгибно-крутящий момент в этом же сечении

$$B_\omega = \frac{P\cdot e\,\mathrm{sh}\,\overline{kz}}{2k\,\mathrm{ch}\,\frac{\overline{kl}}{2}} = \frac{230\cdot 3{,}91\,\mathrm{sh}\,8{,}05}{2\cdot 0{,}115\,\mathrm{ch}\,11} = 52{,}9\,кгсм^2.$$

Напряжения от изгиба, как и в примере 27, в верхних точках будут равны -121 *кг/см*², а в нижних $+118$ *кг/см*². Что же касается напряжений от кручения, то ввиду незначительной величины изгибно-крутящего бимомента они будут равны менее 1 *кг/см*².

На рис. 163 вычерчены эпюры напряжений — экспериментальная и полученная по расчету.

Несколько меньшие напряжения, полученные экспериментально, по сравнению с расчетными объясняются тем, что при расчете мы не учитываем несколько большую жесткость на изгиб вследствие неучета площади решетки.

б) Стержень с перекрестной решеткой

Приведенная площадь раскоса

$$F_р = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4\ см^2.$$

Значения косинусов φ_z и φ_x см. на рис. 162. Там же определена длина стержня решетки между точками прикрепления $a = 14{,}8$ *см*.

Тогда

$$\beta = \frac{2\omega \cos\varphi_z - de \cos\varphi_x}{GJ_d} = \frac{2 \cdot 10{,}9 \cdot 0{,}813 + 12 \cdot 15{,}79\ 0{,}583}{GJ_d} =$$

$$= \frac{17{,}72 + 110{,}47}{GJ_d} = \frac{128{,}19}{GJ_d}$$

и

$$m^2 = \frac{\beta^2 GJ_d}{\frac{1}{2EF_р} ad} = \frac{128{,}19^2 \cdot 2{,}15 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0{,}4}{2{,}151 \cdot 10^6 \cdot 14{,}8 \cdot 12} = 74{,}03.$$

Тогда жесткость стержня при чистом кручении, усиленного перекрестной решеткой, будет равна

$$\overline{GJ_d} = (1 + m^2)\, GJ_d = (1 + 74{,}03) GJ_d =$$

$$= 75{,}03 \cdot 2{,}151 \cdot 10^2 = 161{,}4 \cdot 10^6\ кгсм^2.$$

Сравнивая полученную величину $\overline{GJ_d}$ с $GJ_d^{эксп} = 149{,}1$ *кг см*^{2}, получили расхождение

$$\frac{161{,}4 - 149{,}1}{161{,}4} = 7{,}6\%.$$

Проделанные примеры показывают, что наличие решеток совершенно препятствует кручению стержня и заставляет его работать только на изгиб в вертикальной плоскости.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СИСТЕМЫ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГИХ СИСТЕМАХ В ПРИМЕНЕНИИ К СИСТЕМАМ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 1. РАБОТА ВНУТРЕННИХ СИЛ

В тонкостенном стержне, находящемся в условиях только стесненного кручения, как известно из предыдущего, возникают секториальные нормальные напряжения σ_ω, секториальные касательные напряжения τ_ω и касательные напряжения, соответствующие чистому кручению, $\tau_{кр}$.

Первые из них приводятся к изгибно-крутящему бимоменту B_ω, вторые — к изгибно-крутящему моменту M_ω и, наконец, третьи — к сен-венановскому крутящему моменту $M_{кр}$. Определим работу, совершаемую перечисленными компонентами внутренних сил, на соответствующих им перемещениях.

С этой целью прежде всего рассмотрим элемент тонкостенного стержня длиной dz, находящийся под действием распределенных по секториальному закону нормальных напряжений σ_ω, вызванных каким-либо внешним воздействием S_k и приводимых к изгибно-крутящему бимоменту B_k (рис. 164).

Пусть под влиянием какого-то нового воздействия S_i сечения, ограничивающие выделенный элемент, депланировали по главному секториальному закону (относительно центра изгиба и главной секториальной точки сечения) одно относительно другого по направлению B_k на величину $d\theta_i'$.

Депланация, как известно, заключается в том, что отдельные пластинки рассматриваемого элемента тонкостенного стержня изгибаются в своей плоскости, т. е. сечения их перестают быть параллельными и поворачиваются одно относительно другого на

некоторый бесконечно малый угол, а так как, следуя закону секториальных площадей, изгиб отдельных пластинок профиля происходит в разные стороны, то сечения не остаются плоскими, а искривляются.

На рис. 164 для элемента двутаврового профиля эта депланация изображена пунктиром.

Напряжения σ_ω, вызванные воздействием S_k, по формуле (53) ч. I будут равны

$$\sigma_{\omega(k)} = \frac{B_k \omega}{J_\omega}, \qquad (1)$$

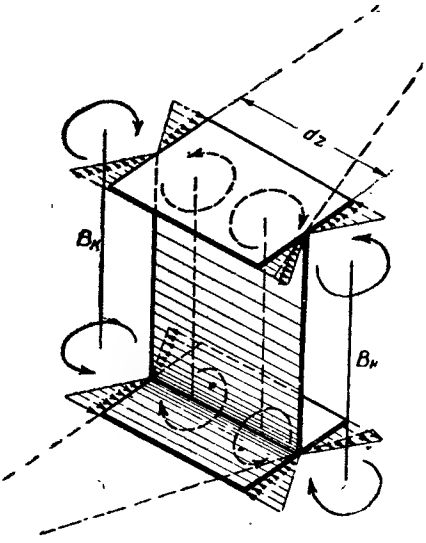


Рис. 164

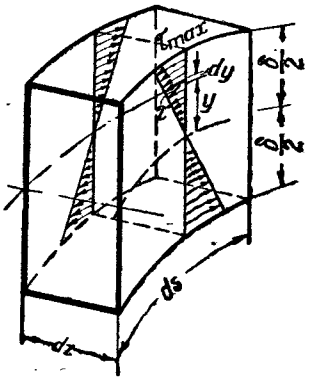


Рис. 165

а соответствующие им перемещения, вызванные воздействием S_i:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_{\omega(i)}}{E} = \frac{B_i \omega}{EJ_\omega}. \qquad (2)$$

Тогда полная работа внутренних сил в пределах элемента dz будет равна

$$dV = -dz \int_F \sigma_{\omega(k)} \varepsilon_i dF = -dz \int_F \frac{B_k \omega}{J_\omega} \cdot \frac{B_i \omega}{EJ_\omega} dF = -\frac{B_k B_i}{EJ_\omega^2} dz \int_F \omega^2 dF$$

или

$$dV = -\frac{B_k B_i}{EJ_\omega} dz. \qquad (3)$$

Переходим к касательным напряжениям.

В основу теории стесненного кручения тонкостенных стержней, как известно, положена гипотеза о том, что деформации сдвига в средней поверхности профиля равны нулю.

Поэтому деформациями от секториальных касательных напряжений, вызванных изгибом отдельных пластинок профиля в своей

плоскости и равномерно распределенных по толщине стенки, мы будем пренебрегать и при вычислении перемещений по формуле Мора будем учитывать только работу касательных напряжений при чистом кручении.

Рассмотрим элемент тонкостенного стержня с размерами dz по длине стержня ds в плоскости его сечения (рис. 165). Пусть этот элемент находится под действием сен-венановских касательных напряжений τ, вызванных каким-либо внешним воздействием S_k, и пусть под влиянием какого-то нового воздействия S_i сечения, ограничивающие этот элемент, повернулись одно относительно другого по направлению действия $M_k^{кр}$ на угол $d\theta_i$.

Напряжения τ_k, вызванные воздействием S_k по формуле (6) ч. I, будут равны

$$\tau_k = \frac{\max \tau_k y}{0{,}5\delta} = \frac{M_k^{кр}\delta}{J_d} \cdot \frac{y}{0{,}5\delta} = \frac{2M_k^{кр}y}{J_d}, \tag{4}$$

а соответствующие им перемещения, вызванные воздействием S_i:

$$\delta(ds)_i = \frac{\tau_i}{G} dz = \frac{2M_i^{кр}y}{GJ_d} dz. \tag{5}$$

Тогда полная работа внутренних сил по всему сечению в пределах элемента dz будет равна

$$dV = -\int_L ds \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_k \delta (ds)_i dy = -\int_L ds \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \frac{2M_k^{кр}y}{J_d} \cdot \frac{2M_i^{кр}y}{GJ_d} dz dy =$$

$$= -\frac{4M_k^{кр}M_i^{кр}}{GJ_d^2} ds \int_L dz \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} y^2 dy = -\frac{4M_k^{кр}M_i^{кр}}{GJ_d^2} dz \int_L ds \left(\frac{\delta^3}{24} + \frac{\delta^3}{24}\right) =$$

$$= -\frac{M_k^{кр} M_i^{кр}}{GJ_d^2} dz \int_L \frac{\delta^3}{3} ds,$$

где значок L под интегралом показывает, что интегрирование должно быть распространено по всему контуру сечения.

А так как

$$\frac{1}{3} \int_L \delta^3 ds = J_d, \tag{6}$$

то окончательно получим

$$dV = -\frac{M_k^{кр} M_i^{кр}}{GJ_d} dz. \tag{7}$$

Для всего тонкостенного стержня, находящегося в условиях только стесненного кручения, работа внутренних сил, вызванных воздействием S_k на перемещениях воздействия S_i, будет равна

$$V = -\left[\int_0^l \frac{B_k B_i}{EJ_\omega}\,dz + \int_0^l \frac{M_k^{кр}\,M_i^{кр}}{GJ_d}\,dz\right]. \tag{8}$$

То же самое выражение работы внутренних сил можно получить и непосредственно из уравнения упругой линии углов закручивания тонкостенного стержня (166) (глава V)

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - m(z) + b'(z) = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9), как известно, получено из условия равенства моментов внешних и внутренних сил, действующих на отсеченную часть тонкостенного стержня, относительно продольной оси, проходящей через центр изгиба контура сечения: поэтому если рассматривать левую часть этого уравнения как обобщенную силу, то в качестве соответствующего ей обобщенного перемещения мы должны принять угол закручивания θ.

Тогда уравнение виртуальных работ напишется так:

$$\int_0^l \left[EJ_\omega \theta_k^{IV} - GJ_d \theta_k'' - m_k(z) + b_k'(z)\right] \theta_i dz = 0 \tag{10}$$

или

$$EJ_\omega \int_0^l \theta_k^{IV} \theta_i dz - GJ_d \int_0^l \theta_k'' \theta_i dz -$$

$$- \int_0^l m_k(z) \theta_i dz + \int_0^l b_k'(z) \theta_i dz = 0. \tag{11}$$

Интегрируя интегралы первого, второго и последнего слагаемых по частям, будем иметь

$$\int_0^l \theta_k^{IV} \theta_i dz = |\theta_i \theta_k'''|_0^l - \int_0^l \theta_k''' \theta_i' dz = |\theta_i \theta_k'''|_0^l - |\theta_i' \theta_k''|_0^l + \int_0^l \theta_k''' \theta_i'' dz,$$

$$\int_0^l \theta_k'' \theta_i dz = |\theta_i \theta_k'|_0^l - \int_0^l \theta_k' \theta_i' dz$$

и

$$\int_0^l b_k'(z) \theta_i dz = |b_k(z) \theta_i|_0^l - \int_0^l b_k(z) \theta_i' dz.$$

Подставляя эти выражения интегралов в уравнение (11), получим

$$\int_0^l m_k(z)\theta_i dz + \int_0^l b_k(z)\theta_i' dz + \Big|\left[-EJ_\omega \theta_k''' + \right.$$

$$\left. + GJ_d \theta_k' - b_k(z)\right]\theta_i\Big|_0^l + \Big|EJ_\omega \theta_k'' \theta_i'\Big|_0^l -$$

$$- EJ_\omega \int_0^l \theta_k'' \theta_i'' dz - GJ_d \int_0^l \theta_k' \theta_i' dz = 0. \qquad (12)$$

Выразим теперь, воспользовавшись формулами (161) и (156) главы V, значения производных θ_k и θ_i через соответствующие крутильные и изгибно-крутильные силовые факторы, а именно:

$$\theta' = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_d}$$

и

$$\theta'' = -\frac{B_\omega}{EJ_\omega}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (12) и, кроме того, имея в виду формулу (55) главы III, получим

$$\int_0^l m_k(z)\theta_i dz + \int_0^l b_k(z)\theta_i' dz + \Big|L_k \theta_i\Big|_0^l + \Big|-B_k \theta_i'\Big|_0^l -$$

$$- \int_0^l \frac{B_k B_i}{EJ_\omega} dz - \int_0^l \frac{M_k^{\text{кр}} M_i^{\text{кр}}}{GJ_d} dz = 0. \qquad (13)$$

Первые четыре слагаемых уравнения (13) выражают работу внешних сил, а два последних члена, повторяющие формулу (8), выражают работу внутренних сил.

§ 2. ТЕОРЕМЫ БЕТТИ И МАКСВЕЛЛА

Из курса строительной механики мы знаем, что в линейно-деформируемом теле виртуальная работа сил первого состояния на соответствующих им перемещениях, вызванных силами второго состояния, равна виртуальной работе сил второго состояния на соответствующих им перемещениях, вызванных силами первого состояния:

$$V_{12} = V_{21}. \qquad (14)$$

Проиллюстрируем эту теорему о взаимности работ, известную в литературе под названием теоремы Бетти, на некоторых примерах тонкостенного стержня, находящегося в условиях стесненного кручения.

Пример 1. Однопролетный тонкостенный стержень, защемленный от закручивания и депланаций на одном конце и свободный на другом, нагружен на свободном конце один раз бимоментов B, а другой раз — закручивающим моментом M (рис. 166).

Перемещение в состоянии I (угол закручивания свободного конца) по формуле (13) приложения 7

$$\theta_B = \frac{B}{k^2 E J_\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} kl - 1}{\operatorname{ch} kl}.$$

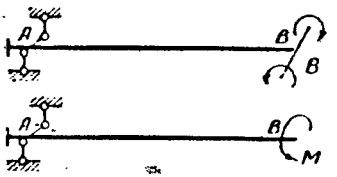


Рис. 166

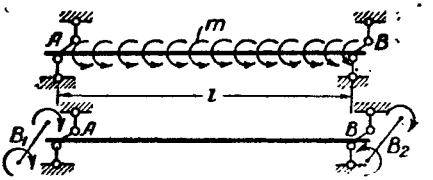


Рис. 167

Перемещение в состоянии II (депланация свободного конца) по формуле (10) приложения 7

$$\theta'_B = \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=l} = \frac{M}{k^2 E J_\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} kl - 1}{\operatorname{ch} kl}.$$

Работа сил состояния I на перемещениях состояния II

$$V_{12} = B\theta'_B = \frac{BM}{k^2 E J_\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} kl - 1}{\operatorname{ch} kl}.$$

Работа сил состояния II на перемещениях состояния I

$$V_{21} = M\theta_B = \frac{BM}{k^2 E J_\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} kl - 1}{\operatorname{ch} kl}.$$

Очевидно, что

$$V_{12} = V_{21}.$$

Пример 2. Однопролетный тонкостенный стержень, закрепленный от закручивания и свободный для депланаций по обоим концам, нагружен один раз равномерно распределенными по всей длине крутящими моментами интенсивности m, а другой раз — бимоментами B_1 и B_2, приложенными к концам (рис. 167).

Перемещение в состоянии I (депланация концов) по формуле (14) приложения 7

$$\theta'_A = \theta'_B = \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{\substack{z=0\\ z=l}} = \pm \frac{m}{k^3 E J_\omega} \left(\frac{kl}{2} - \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{\operatorname{hc} \frac{kl}{2}} \right).$$

Перемещение в состоянии II (интеграл углов закручивания по всей длине стержня) по формулам (19) и (20) приложения 7

$$\int_0^l \theta dz = \int_0^l \frac{B_1}{k^2 EJ_\omega}\left[\frac{l-z}{l} - \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl}\right] dz - \int_0^l \frac{B_2}{k^2 EJ_\omega}\left(\frac{z}{l} - \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}\right) =$$

$$= \frac{B_1}{k^2 EJ_\omega}\left[l - \frac{l}{2} + \frac{1}{k \operatorname{sh} kl}(1 - \operatorname{ch} kl\right] - \frac{B_2}{k^2 EJ_\omega}\left[\frac{l}{2} - \frac{1}{k \operatorname{sh} kl}(\operatorname{ch} kl - 1)\right] =$$

$$= \frac{B_1 - B_2}{k^3 EJ_\omega}\left(\frac{kl}{2} - \frac{\operatorname{ch} kl - 1}{\operatorname{sh} kl}\right).$$

Работа сил состояния I на перемещениях состояния II

$$V_{12} = m\int_0^l \theta dz = \frac{m(B_1 - B_2)}{k^3 EJ_\omega}\left(\frac{kl}{2} - \frac{\operatorname{ch} kl - 1}{\operatorname{sh} kl}\right).$$

Работа сил состояния II на перемещениях состояния I

$$V_{21} = B_1 \theta'_A + B_2 \theta'_B = \frac{(B_1 - B_2)m}{k^3 EJ_\omega}\left(\frac{kl}{2} - \frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right) =$$

$$= \frac{(B_1 - B_2)m}{k^3 EJ_\omega} \cdot \left(\frac{kl}{2} - \frac{\operatorname{ch} kl - 1)}{\operatorname{sh} kl}\right).$$

Очевидно, что

$$V_{12} = V_{21}.$$

Теорема Максвелла о взаимности перемещений, записываемая формулой вида

$$\delta_{12} = \delta_{21} \tag{15}$$

и выражающая ту мысль, что перемещение точки приложения первой силы по ее направлению, вызванное действием второй силы, равной единице, равно перемещению точки приложения второй силы по ее направлению, вызванное действием первой силы, равной единице, является частным случаем теоремы Бетти, а поэтому нет необходимости в специальной иллюстрации ее на примерах перемещений тонкостенных стержней.

§ 3. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РЕАКЦИЙ

Теорема о взаимности реакций записывается формулой вида

$$r_{12} = r_{21} \tag{16}$$

и выражает мысль, что реакция, возникающая в связи *1* от перемещения связи *2* по своему направлению на единицу, равна реакции, которая возникает в связи *2* от перемещения связи *1* по своему направлению на единицу.

Проиллюстрируем эту теорему на примере тонкостенного стержня, находящегося в условиях стесненного кручения.

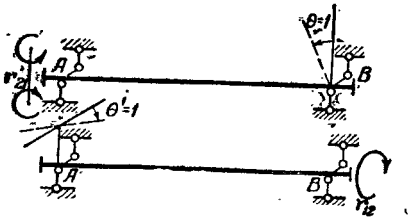


Рис. 168

Пример 3. Однопролетный тонкостенный стержень, защемленный по обоим концам от закручивания и депланаций, подвергнут двум деформациям: единичному углу закручивания правой опоры и единичной депланации левой опоры (рис. 168).

Реакция в состоянии I (бимомент на левой опоре) по формуле (30) приложения 7

$$r_{21} = B_A = (-EJ_\omega \theta'')_{z=0} = -k^2 EJ_\omega \frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch}\frac{kl}{2} - 2\operatorname{sh}\frac{kl}{2}} =$$

$$= -k^2 EJ_\omega \cdot \frac{\operatorname{ch} kl - 1}{kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2}.$$

Реакция в состоянии II (общий крутящий момент на правой опоре) по формуле (35) приложения 7

$$r_{12} = L_B = (-EJ_\omega \theta''' + GJ_d \theta')_{z=0} = -k^2 EJ_\omega \frac{\operatorname{ch} kl - 1}{kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2}.$$

Следовательно:

$$r_{12} = r_{21}.$$

§ 4. ВЗАИМНОСТЬ РЕАКЦИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Пример 4. Для иллюстрации свойства взаимности реакций и перемещений рассмотрим стержень предыдущего примера. Пусть в состоянии I он будет подвержен единичной депланации на правой опоре, а в состоянии II будет находиться под действием закручивающего момента $M=1$, приложенного посредине пролета (рис. 169).

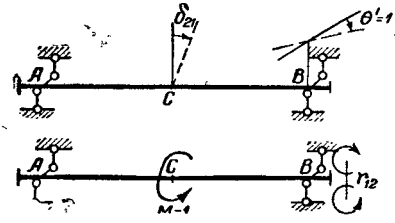


Рис. 169

Перемещение в состояние I (угол закручивания посредине пролета) определим из уравнения (35) приложения 7

$$\delta_{21} = \theta_{z=\frac{l}{2}} = -\frac{(\operatorname{sh} kl - kl)\left(\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - 1\right) - (\operatorname{ch} kl - 1)\left(\operatorname{sh}\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right)}{k(kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2)} =$$

$$= -\frac{\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - kl\right)\left(\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 1\right) - 2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{kl}{2}\left(\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right)}{2k\left(kl\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{kl}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\,\mathrm{ch}^2\,\frac{kl}{2} - kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} + kl - 2\,\mathrm{sh}^3\,\frac{kl}{2} + kl\,\mathrm{sh}^2\,\frac{kl}{2}}{2k\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\left(kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2} - kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} + kl\,\mathrm{ch}^2\,\frac{kl}{2}}{2k\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\left(kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{-2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\left(\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 1\right) + kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2}\left(\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 1\right)}{2k\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\left(kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\right)} = -\frac{\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 1}{2k\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}}.$$

Реакция в состоянии II (бимомент на правой опоре) по формуле (9) приложения 8

$$r_{12} = (B\omega)_{z=0} = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 1}{2k\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}}.$$

Таким образом:

$$\delta_{21} = r_{12}.$$

ГЛАВА II

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 5. ФОРМУЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Общая формула для определения перемещений, известная под названием формулы Мора, для систем из тонкостенных стержней при принятой гипотезе об отсутствии в средней поверхности стержня деформаций сдвига, имеет следующий вид:

$$\Delta_{ki} = \sum\int \frac{N_k N_i}{EF}\,dz + \sum\int \frac{M_k^x M_i^x}{EJ_x}\,dz + \sum\int \frac{M_k^y M_i^y}{EJ_y}\,dz + \\ + \sum\int \frac{M_k^{\text{кр}} M_i^{\text{кр}}}{GJ_d}\,dz + \sum\int \frac{B_k B_i}{EJ_\omega}\,dz. \qquad (17)$$

Подынтегральное выражение первого интеграла представляет элементарную работу продольных сил, подынтегральное выраже-

ние второго и третьего интегралов — элементарную работу изгибающих моментов вокруг осей x и y, четвертый интеграл — элементарную работу сен-венановских закручивающих моментов и, наконец, подынтегральное выражение пятого интеграла — элементарную работу изгибно-крутящих бимоментов.

Что же касается поперечных сил при изгибе Q_y и Q_x и изгибно-крутящих моментов при стесненном кручении $M_{\omega t}$ то влиянием их на перемещения вследствие указанной выше причины пренебрегаем.

В тонкостенном стержне, находящемся в условиях только стесненного кручения, продольные силы и изгибающие моменты будут отсутствовать и формула Мора для определения изгибно-крутильных перемещений будет иметь более простой вид, а именно:

$$\Delta_{ki} = \int_0^l \frac{M_k^{кр} M_i^{кр}}{GJ_d} dz + \int_0^l \frac{B_k B_i}{EJ_\omega} dz. \qquad (18)$$

Проиллюстрируем применение этой формулы на примере.

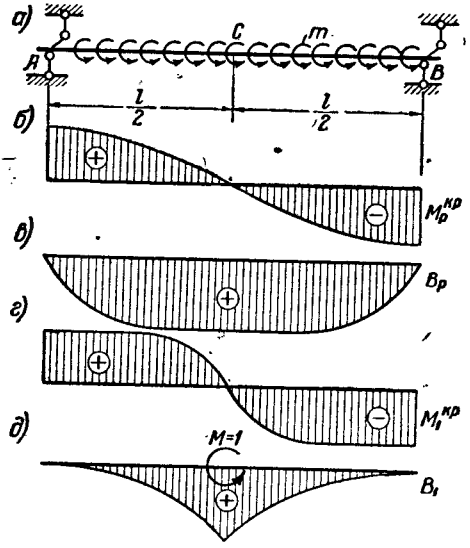


Рис. 170

Пример 5. Найти угол закручивания посредине пролета балки, закрепленной от закручивания и свободной для депланаций по концам, от загружения ее равномерно распределенными по всему пролету закручивающими моментами интенсивности m (рис. 170, *а*).

Для определения искомого угла закручивания $\Delta_{1p} = \theta_C$ прикладываем посредине пролета балки закручивающий момент $M_1 = 1$ и строим эпюры крутящих моментов $M^{кр}$ и изгибно-крутящих бимоментов B от заданной нагрузки и от единичного загружения (рис. 170, *б, в, г, д*).

Уравнения $M^{кр}$ и B, соответствующие построенным эпюрам, имеют следующий вид [из формул (14) и (16) приложения 7]:

$$M_p^{кр} = GJ_d \theta'_p = \frac{GJ_d m}{k^3 EJ_\omega} \left[k\left(\frac{l}{2} - z\right) - \frac{\operatorname{sh} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right] =$$

$$= ml\left[\frac{1}{2} - \frac{z}{l} - \frac{\operatorname{sh} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}\right];$$

$$B_p = -EJ_\omega \theta_p'' = \frac{m}{k^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}\right];$$

$$M_1^{\text{кр}} = GJ_d \theta_1' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}\right);$$

$$B_1 = -EJ_\omega \theta_1'' = \frac{1}{2k} \cdot \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}.$$

Перемножив их друг на друга и проинтегрировав, получим

$$\int_0^l \frac{M_1^{\text{кр}} M_p^{\text{кр}}}{GJ_d} dz = 2\,\frac{ml}{2GJ_d} \int_0^{\frac{l}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{z}{l} - \frac{\operatorname{sh} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}\right]\left(1 - \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}\right) dz =$$

$$= \frac{ml}{GJ_d}\left\{\frac{l}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{k^2 l \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}\left(\operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 1\right) - \frac{1}{2k \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \operatorname{sh} \frac{kl}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{l \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}\left[\frac{l}{2k} \operatorname{sh} \frac{kl}{2} - \frac{1}{k^2}\left(\operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 1\right)\right] + \frac{1}{kl \operatorname{ch}^2 \frac{kl}{2}} \cdot \frac{l}{4} \operatorname{sh} \frac{kl}{2}\right\} =$$

$$= \frac{ml^2}{8GJ_d}\left[1 - \frac{16\left(\operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 1\right)}{k^2 l^2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} + \frac{2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch}^2 \frac{kl}{2}}\right];$$

$$\int_0^l \frac{B_1 B_p}{EJ_\omega} dz = 2\,\frac{m}{2k^3 EJ_\omega \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}} \operatorname{sh} kz \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}\right] dz =$$

$$= \frac{ml}{GJ_d} \cdot \frac{1}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \left[\frac{1}{k} \left(\operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 1 \right) - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \cdot \frac{l}{4} \operatorname{sh} \frac{kl}{2} \right] =$$

$$= \frac{ml^2}{8GJ_d} \left[\frac{8\left(\operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 1 \right)}{k^2 l^2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch}^2 \frac{kl}{2}} \right].$$

Подставив полученные значения интегралов в формулу (18), будем иметь

$$\Delta_{1p} = \theta_C = \frac{ml^2}{8GJ_d} \left[1 - \frac{8\left(\operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 1 \right)}{k^2 l^2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right] =$$

$$= \frac{ml^2}{8GJ_d} \cdot \frac{\left(\frac{kl}{2} \right)^2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2} + 2}{\left(\frac{kl}{2} \right)^2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}.$$

§ 6. УПРОЩЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Определение изгибно-крутильных перемещений в тонкостенных стержнях непосредственно по формуле (18), как показывает приведенный в предыдущем параграфе пример, является чрезвычайно трудоемким, так как приходится интегрировать произведения двух пар криволинейных эпюр, уравнения которых выражаются в гиперболических функциях. Но из курса строительной механики[1] мы знаем, что при определении перемещений в статически неопределимых системах из нетонкостенных элементов в качестве заданной системы мы имеем право считать не только действительную статически неопределимую систему, но и всякую геометрически неизменяемую систему, которая получается из действительной путем удаления из нее тех или иных связей и причисления усилий, заменяющих удаленные связи, к внешней нагрузке. В частности, можно принять и статически определимую систему, для которой эпюры являются наиболее простыми. Это обстоятельство оказывается чрезвычайно полезным распространить и на системы из тонкостенных стержней, которые в отличие от систем из нетонкостенных стержней являются системами континуально статически неопределимыми, т. е. имеющими бесчисленное множество лишних неизвестных. В каждом же сечении тонкостенной системы, кроме неизвестных, связанных с лишними опорными закреплениями и на-

[1] И. М. Рабинович. Курс строительной механики, Стройиздат, 1954, стр. 85.

личием замкнутых контуров, вследствие положенной в основу расчета ее гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения имеется еще одна лишняя неизвестная величина, а именно один из силовых или кинематических факторов, связанных с явлением стесненного кручения стержня.

В самом деле, на каждое сечение тонкостенного стержня, находящегося в условиях пространственной работы, в общем случае действуют семь компонентов внутренних сил: N, Q_y, Q_x, M_x, M_y, L и B_ω, изображенных на рис. 171.

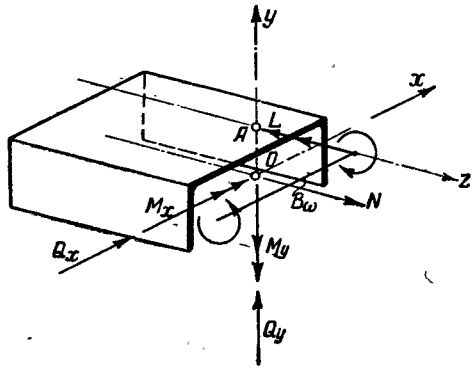


Рис. 171

Моменты на этой фигуре обозначены векторами, направленными вдоль соответствующих осей, и отмечены в отличие от сил двумя стрелками. При этом изгибающие моменты M_x и M_y берутся относительно главных осей сечения x и y, а общий крутящий момент L — относительно продольной оси z, проходящей через центр изгиба сечения. Через B_ω обозначен седьмой компонент внутренних сил, соответствующий седьмой степени свободы сечения тонкостенного стержня, а именно депланации его по секториальному закону; этот компонент мы назвали изгибно-крутящим бимоментом и условились изображать в виде бипары сил.

Первые шесть из этих компонентов в системах внешне статически определимых могут быть определены из условий равновесия. Седьмой же компонент — бимомент B_ω, как было указано выше, является величиной статически неопределимой, зависящей не только от внешних воздействий и условий защемления стержня на опорах, но и от материала, формы и размеров сечения и от длины стержня.

Кроме того, из предыдущего известно, что общий крутящий момент L равен

$$L = M_\omega + M_{кр} = -EJ_\omega\,\theta''' + GJ_d\theta' - n(z)\,\omega.$$

Так как все три крутильных и изгибно-крутильных силовых фактора

$$B = -EJ_\omega\,\theta'', \quad M_\omega \text{ и } M_{кр}$$

связаны между собой дифференциальными зависимостями, то поэтому любой из них мы можем считать лишним неизвестным.

Проще всего в качестве такого принять сен-венановский крутящий момент $M_{кр}$. Удалив связи, соответствующие этому моменту

и способствующие неравномерному распределению касательных напряжений по толщине стенки, мы получим систему внутренне статически определимую.

С этой целью в стенках профиля по плоскостям, перпендикулярным к средней поверхности его, по всему периметру сечения сделаем с обеих сторон стенок надрезы, продолжив их только до средней поверхности стержня, т. е. представим профиль как бы состоящим из продольных пластинок шириной, равной толщине стенки профиля, нанизанных на среднюю поверхность стержня. Часть профиля с подобными надрезами, напоминающими гребешок, изображена на рис. 172.

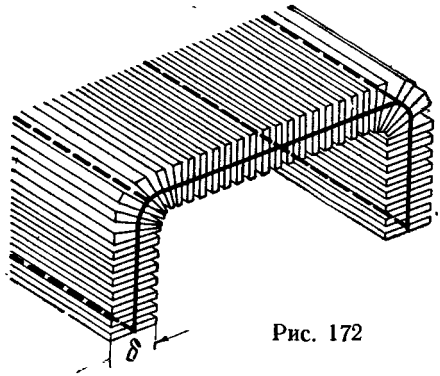


Рис. 172

Стержень с указанными надрезами, находясь в условиях стесненного кручения, не теряет способности передавать от сечения к сечению бимоменты и изгибно-крутящие моменты, но он уже становится неспособным передавать сен-венановские крутящие моменты, т. е. сопротивляемость такого стержня чистому кручению обращается в нуль, что может быть записано в форме

$$GJ_d = 0 \text{ или. } k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}} = 0.$$

Дифференциальное уравнение упругой линии углов закручивания такого стержня [см. формулу (166) ч. 1] при отсутствии продольных сил будет иметь следующий вид

$$EJ_\omega \theta^{IV} - m(z) = 0, \tag{19}$$

т. е. по своей структуре оно ничем не отличается от соответствующего уравнения упругой линии балки при поперечном изгибе.

В таком случае величины B_ω и M_ω в стержнях внешне статически определимых могут быть найдены из условий статики, а эпюры их по длине стержня будут иметь такой же вид (прямолинейный или параболический), как и соответствующие им эпюры изгибающих моментов и поперечных сил при поперечном изгибе.

Таким образом, в дальнейшем при определении изгибно-крутильных перемещений в системах из тонкостенных стержней последние путем указанных выше надрезов мы будем лишать способности сопротивляться чистому кручению, а удаленные связи в заданной системе заменять соответствующими усилиями.

Тогда при построении единичных эпюр изгибно-крутящих бимоментов B_ω и сен-венановских крутящих моментов $M_{кр}$, соответ-

ствующих искомому перемещению, в уравнениях, выражающих эти величины, значение упругой изгибно-крутильной характеристики k следует полагать равным нулю. В таком случае $M_1^{кр}$ при любых нагрузках и любых опираниях стержня по концам будут равны нулю, а эпюры B_1 будут, как правило, иметь прямолинейный вид.

Таким образом, формула (18) для определения изгибно-крутильных перемещений будет иметь более простой вид, а именно:

$$\Delta_{1p} = \int \frac{B_1 B_p}{EJ_\omega} dz. \tag{20}$$

Кроме того, одна из эпюр подынтегрального выражения будет прямолинейная, что сразу раскрывает широкие практические возможности использования ее для расчета балочных и рамных систем из тонкостенных стержней на кручение.

Проиллюстрируем эти выводы на уже выполненном выше примере 5.

Пример 6. Уравнение B_p остается без изменений

$$B_p = \frac{m}{k^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right].$$

Эпюра B_1 будет иметь вид равнобедренного треугольника, так же как эпюра изгибающих моментов в балке, свободно опертой по концам и загруженной сосредоточенной силой $P = 1$ посредине пролета. В таком случае уравнение бимоментов на участке 1 будет иметь вид

$$B_1 = \frac{z}{2}.$$

То же самое получим, если возьмем уравнение B_1 из примера 5 в пределе при $k \to 0$

$$B_1 = \lim_{k\to 0} \frac{1}{2k} \cdot \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}} = \frac{1}{2}\lim_{k\to 0}\frac{\operatorname{sh} kz}{kl \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$$

$$= \frac{l}{2}\lim_{k\to 0}\frac{z \operatorname{ch} kz}{l \operatorname{ch}\frac{kl}{2} + \frac{kl^2}{2}\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = \frac{l}{2}\cdot\frac{z}{l} = \frac{z}{2}.$$

Подставив эти значения бимоментов в формулу (20), получим

$$\Delta_{1p} = \theta_C = \int_0^l \frac{B_p B_1}{EJ_\omega} dz = 2\frac{m}{2k^2 EJ_\omega \operatorname{sh}\frac{kl}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}} \left[\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - \operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)\right] z dz =$$

$$= \frac{m}{GJ_d \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\left[\operatorname{ch}\frac{kl}{2}\cdot\frac{l^2}{8}-\frac{1}{k^2}\left(\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-1\right)\right]=$$

$$= \frac{ml^2}{8GJ_d}\cdot\frac{\left(\frac{kl}{2}\right)^2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}+2}{\left(\frac{kl}{2}\right)^2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}},$$

т. е. то же значение, как в примере 5 § 5.

§ 7. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕПЛАНАЦИЙ И УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ

1. Рассмотрим тонкостенный стержень, закрепленный от закручивания и депланаций на левом конце и свободный на правом (рис. 173,*а*), нагруженный произвольной закручивающей нагрузкой; эпюра бимоментов от заданной нагрузки изображена на рис. 173,*б*.

Для определения депланации в каком-нибудь произвольном сечении *C*, отстоящем на расстоянии *a* от заделки, возьмем такой же стержень, но лишенный способности сопротивляться чистому кручению, и построим для него эпюру изгибно-крутящих бимоментов от бимомента $B=1$, приложенного в сечении *C*. Она будет иметь такой же вид, как эпюра изгибающих моментов от момента $M=1$, приложенного в том же сечении *C* (рис. 173,*в*).

По формуле (20) найдем

$$\theta'_C = \frac{1}{EJ_\omega}\int_0^a B_p B_1 dz = \frac{1}{EJ_\omega}\int_0^a B_p 1 dz.$$

Полученный интеграл, очевидно, изображает площадь эпюры бимоментов от заданной нагрузки на участке от 0 до *a* (на рис. 173,*б* заштрихована наклонными линиями).

Обозначив ее через F_C^B, будем иметь

$$\theta'_C = \frac{F_C^B}{EJ_\omega}, \tag{21}$$

где верхний индекс у *F* указывает на характер площади (бимоментная), а нижний индекс — на сечение стержня, для которого берется указанная площадь.

Для определения угла закручивания θ_C приложим в том же сечении *C* закручивающий момент $M=1$ и, так же, как при определении θ'_C, построим эпюру изгибно-крутящих бимоментов B_1 от этого загружения в стержне, лишенном способности сопротивляться чистому кручению. Она будет иметь такой же вид, как и эпюра

изгибающих моментов в том же стержне от загружения его силой $P=1$ в сечении C (рис. 173, *г*).

Составим уравнение для B_1

$$B_{1(k=0)} = 1\,(a - z).$$

Подставив его в формулу (20), получим

$$\theta_C = \frac{1}{EJ_\omega}\int_0^a B_p B_1 dz = \frac{1}{EJ_\omega}\int_0^a B_p (a - z)\, dz.$$

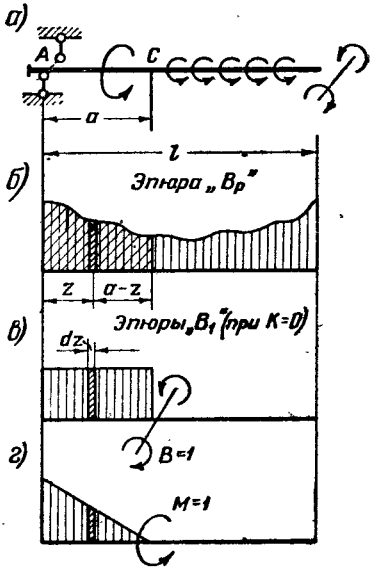


Рис. 173

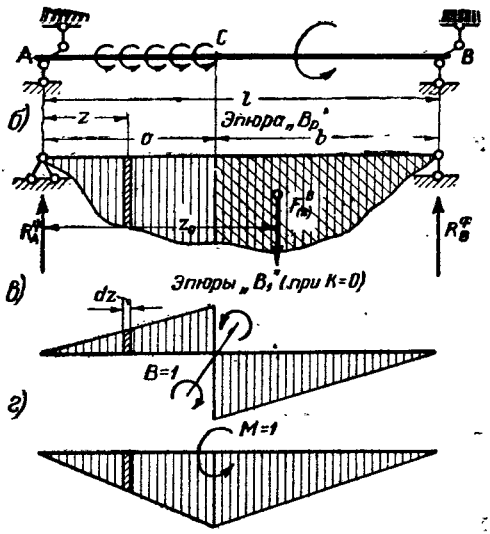


Рис. 174

Полученный интеграл есть не что иное, как статический момент площади эпюры бимоментов от заданной нагрузки на участке от 0 до a относительно сечения C. Обозначив его через S^B, будем иметь

$$\theta_C = \frac{S_C^B}{EJ_\omega}. \tag{22}$$

Формулы (21) и (22) показывают, что в стержне, защемленном от закручивания и депланаций на одном конце и свободном на другом, депланация в любом сечении C равна площади эпюры бимоментов, отсчитанной от заделки до места определения депланации, деленной на секториальную жесткость стержня, а угол закручивания равен моменту от той же бимоментной площади относительно сечения C, деленному на секториальную жесткость стержня.

2. Рассмотрим теперь тонкостенный стержень, закрепленный от закручивания и свободный для депланаций по обоим концам, нагруженный произвольной закручивающей нагрузкой (рис. 174, *а*). Эпюра изгибно-крутящих бимоментов B_p от этой нагрузки изображена на рис. 174, *б*.

Для определения депланации в произвольном сечении этого стержня *C* на расстоянии *a* от левой опоры приложим в этом сечении бимомент, равный единице, для стержня, лишенного способности сопротивляться чистому кручению, и построим для этого единичного загружения эпюру изгибно-крутящих бимоментов B_1 (рис. 174, *в*).

Уравнения B_1 для участков 1 и 2 стержня будут следующие:

$$B_1^{(1)} = \frac{z}{l}$$

и

$$B_1^{(2)} = -\frac{l-z}{l}.$$

Поставив их в формулу (20), получим

$$\theta'_C = \int_0^l \frac{B_p B_1}{EJ_\omega} dz = \frac{1}{lEJ_\omega}\left[\int_0^a B_p z dz - \int_a^l B_p (l-z)\, dz\right] =$$

$$= \frac{1}{lEJ_\omega}\left[\int_0^l B_p z dz - l\int_a^l B_p dz\right] = \frac{1}{EJ_\omega}\left(\frac{S_A^B}{l} - F_2^B\right),$$

где через S_A^B обозначен статический момент площади эпюры бимоментов (бимоментной площади) относительно левого опорного сечения стержня *A*, а через F_2^B — бимоментная площадь участка 2, отсчитанная от опоры *B* до сечения *C* (от *a* до *l*).

Если мы представим себе балку, шарнирно опертую по концам и загруженную нагрузкой, распределенной по длине этой балки по тому же закону, как и бимоменты в заданной балке, то выражение, стоящее в скобках последней формулы, будет представлять собой поперечную силу от этой нагрузки в сечении *C*.

Обозначим ее через Q^Φ, где верхний индекс указывает на то, что эта поперечная сила относится не к действительной, а к фиктивной, загруженной бимоментной площадью балке.

Тогда получим

$$\theta'_C = \frac{Q_C^\Phi}{EJ_\omega}. \qquad (23)$$

Формула (23) показывает, что **депланация в произвольном сечении тонкостенного стержня, закрепленного от закручивания и свободного для депланаций по обоим концам, равна фиктивной поперечной силе** (поперечной силе от бимоментной

нагрузки), деленной на секториальную жесткость балки.

В частном случае депланации в опорных сечениях, очевидно, могут быть выражены следующими формулами:

$$\theta'_A = \frac{R_A^{\Phi}}{EJ_{\omega}} \text{ и } \theta'_B = \frac{R_B^{\Phi}}{EJ_{\omega}}, \tag{24}$$

где через R_A^{Φ} и R_B^{Φ} обозначены фиктивные опорные реакции, так как поперечная сила на опоре равна соответствующей опорной реакции.

Для определения угла закручивания в том же произвольном сечении стержня C приложим в этом сечении закручивающий момент $M=1$ и для стержня, лишенного способности сопротивляться чистому кручению, построим эпюру B_1 (рис. 174,*г*).

Уравнения ее для участков 1 и 2 будут иметь следующий вид:

$$B_1^{(1)} = \frac{b}{l} z \text{ и } B_1^{(2)} = \frac{a}{l}(l-z).$$

Подставив эти выражения в формулу (20), будем иметь

$$\theta_C = \int_0^l \frac{B_p B_1}{EJ_{\omega}} dz = \frac{1}{EJ_{\omega}} \left[\frac{b}{l} \int_0^a B_p z dz + \frac{a}{l} \int_a^l B_p (l-z)\, dz \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_{\omega}} \left[\frac{b}{l} \int_0^a B_p z dz + a \int_a^l B_p dz - \frac{l-b}{l} \int_a^l B_p z dz \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_{\omega}} \left[\frac{b}{l} \int_0^l B_p z dz + a \int_a^l B_p dz - \int_a^l B_p z dz \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_{\omega}} \left[S_A^B \frac{b}{l} + F_{(2)}^B a - F_{(2)}^B z_0 \right] = \frac{1}{EJ_{\omega}} \left[R_B^B b - F_{(2)}^B (z_0 - a) \right].$$

Здесь S_A^B обозначает статический момент бимоментной нагрузки (бимоментной площади) на всем пролете относительно опоры A:

$F_{(2)}^B$ — площадь бимоментной нагрузки на участке 2 (от a до l);

z_0 — расстояние центра тяжести этой площади от опоры A.

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть не что иное, как фиктивный изгибающий момент (изгибающий момент от бимоментной нагрузки) в сечении C.

Обозначив его через M_C^{Φ}, будем иметь

$$\theta_C = \frac{M_C^{\Phi}}{EJ_{\omega}}. \tag{25}$$

Формула (25) показывает, что угол закручивания в произвольном сечении балки, закрепленной от

закручивания и свободной для депланаций по обоим концам, равен изгибающему моменту от бимоментной нагрузки в рассматриваемом сечении, деленному на секториальную жесткость балки.

Как видим, полученные формулы для определения депланаций и углов закручивания в тонкостенных стержнях отличаются от

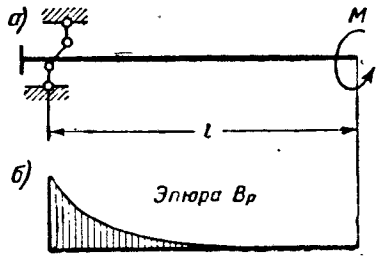


Рис. 175

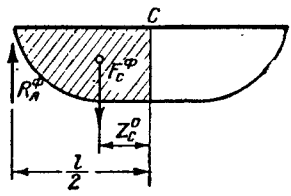


Рис. 176

известных из элементарного курса сопротивления материалов формул графоаналитического метода для определения углов наклона и прогибов балок при изгибе только тем, что здесь роль фиктивной нагрузки играет не моментная, а бимоментная фиктивная площадь.

Проиллюстрируем применение полученных в настоящем параграфе формул на некоторых примерах.

Пример 7. Найти депланацию свободного конца тонкостенного стержня, закрепленного от закручивания и депланаций на другом конце, от загружения этого стержня закручивающим моментом M, приложенным на свободном конце (рис. 175, *а*).

Выпишем из приложения 8 уравнение изгибно-крутящих бимоментов от заданной нагрузки

$$B_p = Ml\frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{kl \operatorname{ch} kl}.$$

Искомая депланация по формуле (21) будет равна

$$\theta'_B = \frac{F_B}{EJ_\omega} = \frac{1}{EJ_\omega}\int_0^l B_p dz = \frac{Ml}{EJ_\omega\, kl \operatorname{ch} kl}\int_0^l \operatorname{sh} k(l-z)dz =$$

$$= \frac{Ml}{EJ_\omega\, kl \operatorname{ch} kl}\,\frac{1}{k}(\operatorname{ch} kl - 1) = \frac{M}{GJ_d}\,\frac{\operatorname{ch} kl - 1}{\operatorname{ch} kl}.$$

Пример 8 (см. примеры 5 и 6). Уравнение изгибно-крутящих бимоментов от заданной нагрузки имеет вид

$$B_p = \frac{m}{k^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right].$$

Искомый угол закручивания посредине пролета по формуле (25):

$$\theta_C = \frac{M_C^{\Phi}}{EJ_\omega} = \frac{1}{EJ_\omega}\left(R_A^{\Phi}\,\frac{l}{2} - F_C^{\Phi} z_C^0\right),$$

где значения R_A^{Φ} и F_C^{Φ} ясны из рис. 176:

$$F_C^{\Phi} = R_A^{\Phi} = \int_0^{\frac{l}{2}} B_p dz;$$

$$F_C^{\Phi} z_c^0 = \int_0^{\frac{l}{2}} B_p\left(\frac{l}{2} - z\right)dz = \frac{l}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} B_p dz - \int_0^{\frac{l}{2}} B_p z dz =$$

$$= \frac{l}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} B_p dz - \frac{m}{k^2}\int_0^{\frac{l}{2}}\left[z - \frac{z\,\mathrm{ch}\,k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2}}\right]dz =$$

$$= \frac{l}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} B_p dz - \frac{m}{k^2}\left[\frac{l^2}{8} - \frac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2}}\cdot\frac{1}{k^2}\left(\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{l}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} B_p dz - \frac{ml^2}{8k^2}\cdot\frac{\left(\frac{kl}{2}\right)^2\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 2\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} + 2}{\left(\frac{kl}{2}\right)^2\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2}}.$$

Подставив эти значения в формулу для θ_C, получим

$$\theta_C = \frac{ml^2}{8GJ_d}\cdot\frac{\left(\frac{kl}{2}\right)^2\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 2\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} + 2}{\left(\frac{kl}{2}\right)^2\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2}}.$$

§ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ОДНА ИЗ ЭПЮР ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ

1. Пусть для некоторого участка (или для всей длины) AB тонкостенного стержня требуется вычислить $\int\limits_A^B \frac{B_k B_l}{EJ_\omega} dz$, где эпюра B_k имеет произвольное очертание, а эпюра B_l — прямолинейная с координатами c и d по концам участка, уравнение которой может быть записано так (рис. 177):

$$B_i = d\,\frac{z}{l} + c\,\frac{l-z}{l}.$$

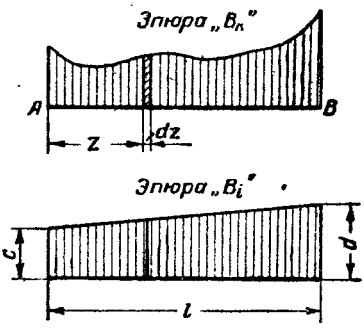


Рис. 177

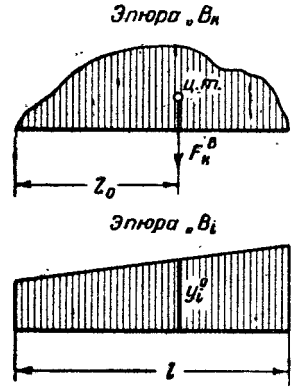


Рис. 178

Считая стержень AB постоянного сечения, будем иметь

$$\int\limits_A^B \frac{B_k B_l}{EJ_\omega} dz = \frac{1}{EJ_\omega}\left[\frac{d}{l}\int\limits_A^B B_k z dz + \frac{c}{l}\int\limits_A^B B_k (l-z)\,dz\right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_\omega}\left(\frac{d}{l} S_A^B + \frac{c}{l} S_B^B\right),$$

где через S_A^B и S_B^B обозначены статические моменты бимоментной площади B_k относительно крайних сечений рассматриваемого участка стержня A и B.

Отношения $\frac{S_A^B}{l}$ и $\frac{S_B^B}{l}$ равны соответственно правой и левой опорным реакциям простой балки пролетом l, нагруженной фиктивной грузовой площадью эпюры бимоментов.

Поэтому можем написать

$$\int\limits_A^B \frac{B_k B_l}{EJ_\omega} = \frac{1}{EJ_\omega}\left(dR_B^\Phi + cR_A^\Phi\right).$$

Подставив в последнюю формулу значения $R_B^{\text{ф}}$ и $R_A^{\text{ф}}$ из формул (24) предыдущего параграфа, окончательно получим

$$\int_A^B \frac{B_k B_i}{EJ_\omega} = c\theta'_A + d\theta'_B. \tag{26}$$

Для вычисления интеграла Мора по формуле (26), как видим, необходимо знать величины депланаций на концах рассматриваемого участка тонкостенного стержня. Таблицы таковых для различных случаев загружения нами составлены[1], а потому пользование этой формулой затруднений не вызывает.

2. Если известны площадь и положение центра криволинейной эпюры бимоментов B_k, то при интегрировании ее совместно с прямолинейной эпюрой B_i можно воспользоваться известным из курса строительной механики способом Верещагина и получить искомый интеграл путем умножения площади криволинейной эпюры бимоментов на ординату прямолинейной эпюры, расположенную под центром тяжести первой, а именно (рис. 178):

$$\int_0^l B_k B_i dz = F_k^B y_i^0. \tag{27}$$

Для упрощения практического пользования формулой (27) нами составлена табл. 41 площадей наиболее часто встречающихся эпюр бимоментов и расстояний до центра тяжести их. Численные значения отвлеченных коэффициентов, входящих в формулы этой таблицы, для различных значений kl от 0 до 15 представлены в приложении 11.

§ 9. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ И ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ

$$\int B_k B_i dz$$

1. Рассмотрим часть или целый тонкостенный стержень AB длиной l, по концам которого действуют бимоменты B_A и B_B (рис. 179, *а*).

По формуле (198) главы V уравнение изгибно-крутящих бимоментов для рассматриваемого случая можно написать в следующем виде:

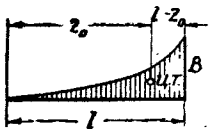
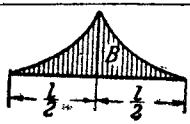
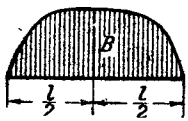
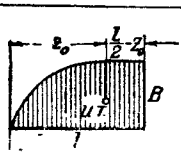
$$B_\omega = \frac{B_A \operatorname{sh} k(l-z) + B_B \operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}. \tag{28}$$

---

[1] См. табл. 31 книги Д. В. Бычкова и А. К. Мрощинского «Кручение металлических балок», Стройиздат, 1944.

Таблица 41

Формулы площадей эпюр бимоментов и координаты центров тяжести их

№ п/п	Вид эпюры	Значение максимальной ординаты B	Площадь эпюры F_B	Расстояние центра тяжести	
				z_0	$l-z_0$
1		B	Blf	$l\xi$	$l\eta$
2		$\frac{Ml}{2}f$	$2Bln$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
3		ml^2p	Bl_0	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
4		ml^2P	$\frac{Bl}{2}\cdot 0$	$\frac{l}{4}\chi$	$\frac{l}{4}\zeta$

M — сосредоточенный закручивающий момент посредине пролета;
m — интенсивность равномерно распределенных закручивающих моментов

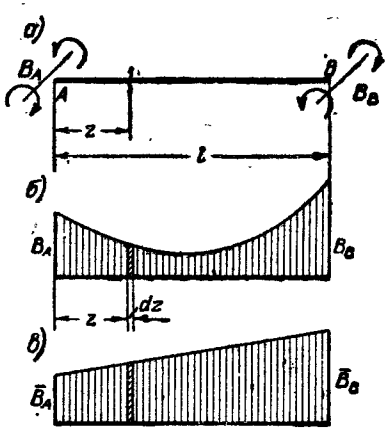


Рис. 179

$$f=\frac{\operatorname{ch} kl-1}{kl\operatorname{sh} kl};\quad n=$$

$$=\frac{\operatorname{sh} kl-2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}{kl(\operatorname{ch} kl-1)};\ p=\frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}-1}{k^2l^2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}};$$

$$o=\frac{\frac{kl}{2}\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-\frac{kl}{2}};$$

$$\xi=\frac{kl\operatorname{ch} kl-\operatorname{sh} kl}{kl\operatorname{ch} kl-kl};\ \eta=\frac{\operatorname{sh} kl-kl}{kl\operatorname{ch} kl-kl};$$

$$\chi=\frac{\left(\frac{kl}{2}\right)^2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}+2}{\frac{kl}{2}\left(\frac{kl}{2}\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-\operatorname{sh}\frac{kl}{2}\right)};$$

$$\xi = \frac{\left(\frac{kl}{2}\right)^2 \operatorname{ch}\frac{kl}{2} + 2\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - 2 - kl\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}\left(\frac{kl}{2}\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - \operatorname{sh}\frac{kl}{2}\right)}.$$

Численные значения этих коэффициентов см. в приложении 11.

Если рассматриваемый стержень лишить способности сопротивляться чистому кручению (удалить лишние связи, сделав указанные выше надрезы), т. е. принять для него $k=0$, то уравнение изгибно-крутящих бимоментов будет иметь следующий вид:

$$B_{\omega(k\to 0)} = \lim_{k\to 0}\frac{B_A \operatorname{sh} k(l-z) + B_B \operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl} =$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{(l-z)B_A \operatorname{ch} k(l-z) + zB_B \operatorname{ch} kz}{l\operatorname{ch} kl}$$

или

$$B_{\omega(k\to 0)} = B_A\frac{l-z}{l} + B_B\frac{z}{l}. \tag{29}$$

Выведем теперь общую формулу интеграла криволинейной эпюры, выражаемой уравнением (28), и прямолинейной эпюры, выражаемой уравнением (29), обозначив при этом крайние ординаты последней через те же буквы B_A и B_B, но с черточками сверху (рис. 179, *б*, *в*).

$$\int_0^l B\bar{B}dz = \frac{1}{l\operatorname{sh} kl}\int_0^l [B_A \operatorname{sh} k(l-z) + B_B \operatorname{sh} kz]\cdot[\bar{B}_A(l-z) + \bar{B}_B z]\,dz =$$

$$= \frac{1}{l\operatorname{sh} kl}\Big[B_A\bar{B}_A\int_0^l (l-z)\operatorname{sh} k(l-z)\,dz + B_B\bar{B}_B\int_0^l z\operatorname{sh} kz\,dz +$$

$$+ B_A\bar{B}_B\int_0^l z\operatorname{sh} k(l-z)\,dz + B_B\bar{B}_A\int_0^l (l-z)\operatorname{sh} kz\,dz\Big] =$$

$$= \frac{1}{l\operatorname{sh} kl}\Big[B_A\bar{B}_A l\int_0^l \operatorname{sh} k(l-z)\,dz + (B_A\bar{B}_B - B_A\bar{B}_A)\int_0^l z\operatorname{sh} k(l-z)\,dz +$$

$$+ B_B\bar{B}_A l\int_0^l \operatorname{sh} kz\,dz + (B_B\bar{B}_B - B_B\bar{B}_A)\int_0^l z\operatorname{sh} kz\,dz\Big] =$$

$$= \frac{1}{l\operatorname{sh} kl}\Big[B_A\bar{B}_A\frac{l}{k}(\operatorname{ch} kl - 1) + (B_A\bar{B}_B - B_A\bar{B}_A)\frac{1}{k^2}(\operatorname{sh} kl - kl) +$$

$$+ B_B\bar{B}_A\frac{l}{k}(\operatorname{ch} kl - 1) + B_B\bar{B}_B - B_B\bar{B}_A)\frac{1}{k^2}(kl\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl) =$$

$$= \frac{1}{k^2 l \operatorname{sh} kl} \left[(B_A \bar{B}_A + B_B \bar{B}_B)(kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl) + \right.$$

$$\left. + (B_A \bar{B}_B + B_B \bar{B}_A)(\operatorname{sh} kl - kl) \right]$$

или

$$\int_0^l B\bar{B} dz = l \left[(B_A \bar{B}_A + B_B \bar{B}_B) r + (B_A \bar{B}_B + B_B \bar{B}_A) s \right], \tag{30}$$

где

$$r = \frac{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl} \tag{31}$$

и

$$s = \frac{\operatorname{sh} kl - kl}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl}. \tag{32}$$

Предельные значения коэффициентов r и s при $k \to 0$ будут равны

$$\lim_{k \to 0} r = \lim_{k \to 0} \frac{l \operatorname{ch} kl + kl^2 \operatorname{sh} kl - l \operatorname{ch} kl}{2kl^2 \operatorname{sh} kl + k^2 l^3 \operatorname{ch} kl} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{l^2 \operatorname{sh} kl + kl^3 \operatorname{ch} kl}{2l^2 \operatorname{sh} kl + 4kl^3 \operatorname{ch} kl + k^2 l^4 \operatorname{sh} kl} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{2l^3 \operatorname{ch} kl + kl^4 \operatorname{sh} kl}{6l^3 \operatorname{ch} kl + 6kl^4 \operatorname{sh} kl + k^2 l^5 \operatorname{ch} kl} = \frac{2l^3}{6l^3} = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{k \to 0} s = \lim_{k \to 0} \frac{l \operatorname{ch} kl - l}{2kl^2 \operatorname{sh} kl + k^2 l^3 \operatorname{ch} kl} = \lim_{k \to 0} \frac{l^2 \operatorname{sh} kl}{2l^2 \operatorname{sh} kl + 4kl^3 \operatorname{ch} kl + k^2 l^4 \operatorname{sh} kl} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{l^3 \operatorname{ch} kl}{6l^3 \operatorname{ch} kl + 6kl^4 \operatorname{sh} kl + k^2 l^5 \operatorname{ch} kl} = \frac{l^3}{6l^3} = \frac{1}{6}.$$

Подставив эти предельные значения r и s в формулу (30), получим известную из курса строительной механики формулу интеграла двух трапеций[1]

$$\lim_{k \to 0} \int B\bar{B} dz = \frac{l}{6} (2B_A \bar{B}_A + 2B_B \bar{B}_B + B_A \bar{B}_B + B_B \bar{B}_A). \tag{33}$$

2. Пусть теперь стержень AB, кроме бимоментов по концам B_A и B_B, загружен еще по всей своей длине равномерно распределенными закручивающими моментами интенсивности m (рис. 180, *а*).

Соответствующие этой нагрузке эпюры бимоментов действительная и предельная (при $k \to 0$) изображены на рис. 180, *б* и *в*, где наклонными линиями на действительной эпюре заштрихована часть ее, относящаяся только к распределенной нагрузке. Так как

[1] И. М. Рабинович. Курс строительной механики, ч. 2, 1954, стр. 79.

эта часть эпюры симметрична относительно середины пролета, то, по правилу Верещагина, интеграл ее с прямолинейной трапецией будет равен

$$F_B \frac{\overline{B}_A + \overline{B}_B}{2},$$

где через F_B обозначена площадь заштрихованной наклонными линиями части эпюры.

Найдем эту площадь.

По формуле (6) приложения 8 уравнение бимоментов от равномерно распределенных по всей длине стержня крутящих моментов имеет следующий вид:

$$B_{\omega(m)} = \frac{m}{k^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right].$$

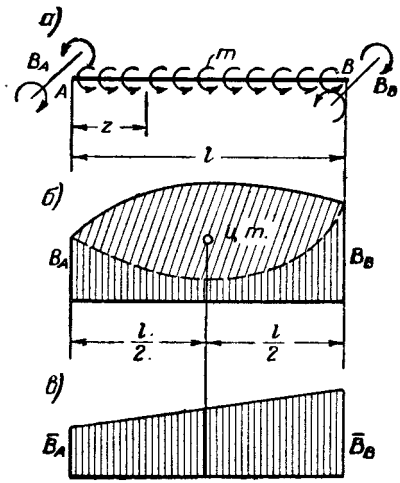


Рис. 180

В таком случае искомая площадь F_B будет равна

$$F_B = \frac{m}{k^2 \operatorname{ch}\frac{kl}{2}} \int_0^l \left[\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - \operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)\right] dz =$$

$$= \frac{m}{k^2 \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\left[l \operatorname{ch}\frac{kl}{2} - \frac{2}{k}\operatorname{sh}\frac{kl}{2}\right] = ml^3 \frac{kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2}{k^3 l^3 \operatorname{sh} kl}$$

или

$$F_B = ml^3 t, \tag{34}$$

где

$$t = \frac{kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2}{k^3 l^3 \operatorname{sh} kl}. \tag{35}$$

В пределе при $k \to 0$

$$\lim_{k\to 0} t = \lim_{k\to 0} \frac{kl^2 \operatorname{ch} kl - l \operatorname{sh} kl}{3k^2 l^3 \operatorname{sh} kl + k^3 l^4 \operatorname{ch} kl} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{kl^3 \operatorname{sh} kl}{6kl^3 \operatorname{sh} kl + 6k^2 l^4 \operatorname{ch} kl + k^3 l^5 \operatorname{sh} kl} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{l^3 \operatorname{sh} kl + kl^4 \operatorname{ch} kl}{6l^3 \operatorname{sh} kl + 18kl^4 \operatorname{ch} kl + 9k^2 l^5 \operatorname{sh} kl + k^3 l^6 \operatorname{ch} kl} =$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{2l^4\operatorname{ch}kl+kl^5\operatorname{sh}kl}{24l^4\operatorname{sh}kl+36kl^5\operatorname{sh}kl+12k^2l^6\operatorname{ch}kl+k^3l^7\operatorname{ch}kl}=\frac{2l^4}{24l^4}=\frac{1}{12}.$$

Подставив это предельное значение t в формулу (34), получим

$$\lim_{k\to 0}F_B=\frac{ml^3}{12}, \tag{36}$$

что, как и следовало ожидать, соответствует площади квадратной параболы.

Таким образом, интеграл криволинейной и прямолинейной эпюр, изображенных на рис. 180, *б* и *в*, будет равен

$$\int_0^l B\bar{B}dz=l\left[(B_A\bar{B}_A+B_B\bar{B}_B)r+(B_A\bar{B}_B+B_B\bar{B}_A)s+\right.$$

$$\left.=ml^2\cdot\frac{\bar{B}_A+\bar{B}_B}{2}t\right], \tag{37}$$

где первые два слагаемых правой части, взятые из формулы (30), учитывают влияние концевых бимоментов B_A и B_B, а третье слагаемое — влияние распределенных по всему пролету (или участку) закручивающих моментов m. Для простоты практического пользования формулой (37) рекомендуется запомнить следующее правило: интеграл криволинейной и прямолинейной эпюр, при наличии распределенных по всему пролету (или участку) закручивающих моментов m, равен пролету (или длине участка) стержня, умноженному на выражение в скобках, состоящее из следующих слагаемых: увеличенная в r раз сумма попарных произведений крайних ординат криволинейной и прямолинейной эпюр, взаимно расположенных одна под другой, плюс увеличенная в s раз сумма попарных произведений накрест расположенных тех же ординат и, наконец, плюс увеличенное в t раз произведение ml^2 на среднюю ординату прямолинейной эпюры.

3. Если на стержень AB, кроме концевых бимоментов B_A и B_B, действует сосредоточенный посредине пролета закручивающий момент M (рис. 181, *а*), то, по аналогии с предыдущим, величина площади эпюры бимоментов, соответствующая только этому закручивающему моменту (на рис. 181, *б* заштрихована наклонными линиями), будет равна [по формуле (7) из приложения 8]

$$F_B = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{2k}\,\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\,dz = \frac{Ml}{kl\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\cdot\frac{1}{k}\left(\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-1\right) = Ml^2\,\frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-1}{k^2l^2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$$

или, пользуясь обозначениями, приведенными в табл. 41:

$$F_B = Ml^2 p. \tag{38}$$

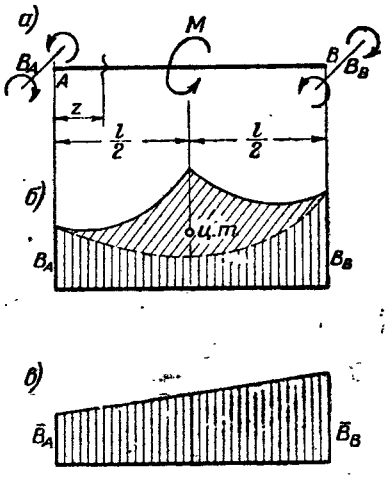


Рис. 81

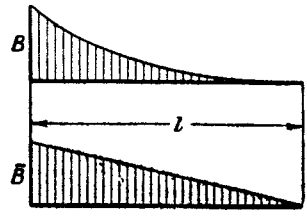


Рис. 182

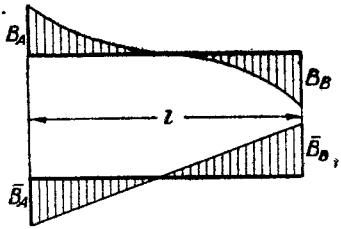


Рис. 183

Тогда интеграл криволинейной и прямолинейной эпюр, изображенных на рис. 181,*б* и *в*, будет равен

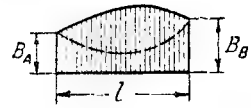
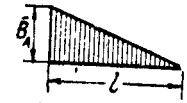
$$\int_0^l B\bar{B}dz = l\Big[(B_A\bar{B}_A + B_B\bar{B}_B)\,r + (B_A\bar{B}_B + B_B\bar{B}_A)\,s + $$
$$+ Ml\,\frac{\bar{B}_A + \bar{B}_B}{2}\,p\Big]. \tag{39}$$

Формула (39) отличается от формулы (37) только третьим членом в скобках, представляющим увеличение в p раз произведение Ml на среднюю ординату прямолинейной эпюры.

4. Пользуясь общими формулами (30), (37) и (39), нетрудно составить формулы интегралов и для других более простых видов эпюр.

Таблица 42

Формулы для интегралов $\int B_k B_i \, dz$

B_i \ B_k			
	$l[(B_A\overline{B}_A+B_B\overline{B}_B)+$ $+B_A\overline{B}_B+B_B\overline{B}_A)\,s]$	$l\left[(B_A\overline{B}_A+\overline{B}_B)r+(B_A\overline{B}_B+\right.$ $\left.+B_B\overline{B}_A)\,s+ml^2\dfrac{\overline{B}_A+\overline{B}_B}{2}t\right]$	$l\left[(B_A\overline{B}_A+B_B\overline{B}_B)r+(B_A\overline{B}_B+\right.$ $\left.+B_B\overline{B}_A)\,s+Ml\dfrac{B_A+\overline{B}_B}{2}p\right]$
	$l\,[(B_A+B_B)(r+s)]\,\overline{B}$	$l\,[(B_A+B_B)(r+s)+ml^2t]\,\overline{B}$	$l\,[(B_A+B_B)(r+s)+Mlp]\,\overline{B}$
	$l\,(B_A r+B_B s)\,\overline{B}_A$	$l\left(B_A r+B_B s+\dfrac{ml^2}{2}t\right)\overline{B}_A$	$l\left(B_A r+B_B s+\dfrac{Ml}{2}p\right)\overline{B}_A$
	$l\,(B_B r+B_A s)\,\overline{B}_B$	$l\left(B_B r+B_A s+\dfrac{ml^2}{2}t\right)\overline{B}_B$	$l\left(B_B r+B_A s+\dfrac{Ml}{2}p\right)\overline{B}_B$

m — интенсивность равномерно распределенных закручивающих моментов; M — сосредоточенный закручивающий момент посредине пролета.

$$r = \frac{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl}; \quad s = \frac{\operatorname{sh} kl - kl}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl}; \quad t = \frac{kl \operatorname{sh} kl - 2 \operatorname{ch} kl + 2}{k^3 l^3 \operatorname{sh} kl};$$

$$p = \frac{\operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 1}{k^2 l^2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}.$$

Численные значения этих коэффициентов для различных значений kl смотри в приложении 11.

Так, например, формула интеграла эпюр, изображенная на рис. 182, криволинейного и прямолинейного треугольников без нагрузки в пролете будет иметь следующий вид:

$$\int_0^l B\bar{B}dz = lB\bar{B}r; \tag{40}$$

для интеграла эпюр, изображенных на рис. 183:

$$\int_0^l B\bar{B}dz = l\left[-\left(B_A\bar{B}_A + B_B\bar{B}_B\right) r + \left(B_A\bar{B}_B + B_B\bar{B}_A\right) s\right]. \tag{41}$$

Для облегчения пользования выведенными в настоящем параграфе формулами при определении перемещений в практических задачах нами составлена табл. 42 для интегралов $\int B_k B_i dz$, при этом числовые значения коэффициентов r, s, t и p, входящих в формулы этой таблицы, даны в приложении 11.

ГЛАВА III

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОК НА КРУЧЕНИЕ

§ 10. УРАВНЕНИЕ ТРЕХ БИМОМЕНТОВ

Жесткие опоры неразрезных тонкостенных балок, находящихся в условиях только кручения, должны быть устроены так, чтобы балка при закручивании не могла отделяться от своих опор, т. е. конструкция опор должна быть такова, чтобы углы закручивания балки на опорах равнялись нулю. По концам неразрезная балка может иметь опоры такие же, как и промежуточные, т. е. закрепленные только от закручивания; но одна или обе концевые опоры могут быть полностью защемленными, т. е. закрепленными от изгибно-крутильных деформаций как от закручивания, так и от депланаций. Наконец, один или оба конца балки могут свешиваться в виде свободных консолей.

В действительных конструкциях неразрезные балки, находящиеся в условиях кручения, одновременно, как правило, подвергаются и действию изгиба. Поэтому в таких балках, кроме указан-

ных опорных закреплений от кручения, должны иметься соответствующие закрепления, препятствующие отрыву балки от опор и при изгибе. В настоящем разделе мы будем рассматривать только явление кручения, выделяя его, как было сказано выше, из общего случая сопротивления, считая, что расчет неразрезных балок на изгиб читателю хорошо известен.

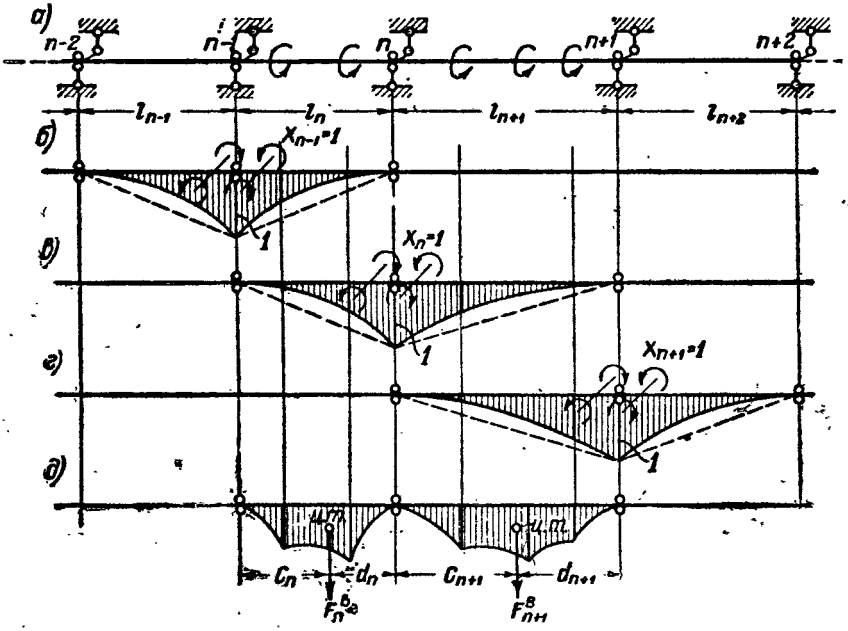


Рис. 184

Примером неразрезной тонкостенной балки на жестких опорах при расчете ее на кручение может служить неразрезной ригель металлического фахверка промышленного здания. При этом жесткими опорами будут являться не только основные мощные колонны промышленного здания, но и промежуточные стойки фахверка, к которым ригель прикрепляется, так как при кручении ригеля опорные стойки будут работать на изгиб в направлении наибольшей своей жесткости, а жесткость металлического стержня на изгиб, как мы видели выше, в сотни раз больше жесткости его на кручение.

Если балка имеет m пролетов и не имеет по концам полных заделок от кручения или свободных консолей, то при расчете ее по методу сил количество лишних неизвестных будет равно $m-1$, при заделке или при наличии консоли на одном конце оно равно m, а при заделке или при наличии консолей на обоих концах $m+1$.

В качестве основной системы мы будем принимать совокупность однопролетных балок с опорами, допускающими деплана-

цию опорных сечений. Это достигается путем включения шарниров для депланаций на всех промежуточных опорах, считая при этом заделки и крайние опоры при наличии свешивающейся консоли как промежуточные опоры (рис. 184,*а*).

Неизвестными при этом будут опорные изгибно-крутящие бимоменты, которые обозначим через $X_1, X_2 \ldots, X_{m-1}$, считая их положительными.

При таком выборе основной системы, как и при расчете неразрезных балок на изгиб, канонические уравнения будут иметь трехчленную структуру, т. е. в каждом из канонических уравнений, кроме первого и последнего, будут фигурировать только три неизвестных, а в первом и последнем только по два.

Например, для n-й опоры каноническое уравнение будет иметь следующий вид:

$$\delta_{n\,n-1} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n,n+1} X_{n+1} + \Delta_{np} = 0. \qquad (42)$$

Уравнение это выражает ту мысль, что суммарная взаимная депланация сечений на рассматриваемой опоре, вызванная всеми лишними неизвестными и заданной внешней нагрузкой, равна нулю, или что все равно, выражает мысль об отсутствии угла перелома упругой линии углов закручивания на опоре n.

Для вычисления коэффициентов $\delta_{n,n-1}$, δ_{nn} и $\delta_{n,n+1}$ нагрузим основную систему последовательно обобщенными силами (в данном случае совокупностью двух равных и противоположных по знаку бипар) $X_{n-1}=1$, $X_n=1$ и $X_{n+1}=1$. Соответствующие этим загружениям эпюры бимоментов представлены на рис. 184, *б*, *в*, *г*.

Так как на всех опорах в основной системе имеются шарниры для депланаций, то каждая из этих эпюр простирается только на два пролета и имеет вид криволинейного треугольника с вершиной, равной единице. При интегрировании любой из этих эпюр с двумя смежными получим значение, отличное от нуля, а при интегрировании со всеми остальными эпюрами интеграл будет равен нулю. Кроме того, при интегрировании эпюр, как было установлено в предыдущей главе, одну из эпюр будем считать прямолинейной (соответствующей условию $k=0$), что на рис. 184, *б*, *в*, *г* изображено пунктиром.

Секториальный момент инерции J_ω по длине каждого пролета будем считать постоянным, в разных же пролетах они могут быть различны. Разницу эту будем обозначать индексом номера пролета.

Для упрощения дальнейших арифметических вычислений будем вычислять не δ_{ik}, а $EJ_{\omega(0)}\delta_{ik}$, где $J_{\omega(0)}$ — совершенно произвольный секториальный момент инерции.

Пользуясь табл. 42 интегралов, находим

$$EJ_{\omega\,(0)}\delta_{n,n-1} = \sum \int B_n B_{n-1} \frac{EJ_{\omega\,(0)}}{EJ_{\omega\,(n)}} dz = \frac{J_{\omega\,(0)}}{J_{\omega\,(n)}} l_n s_n = l'_n s_n;$$

$$EJ_{\omega(0)}\,\delta_{nn} = \sum\int B_n^2 \frac{EJ_{\omega(0)}}{EJ_\omega}\,dz = \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n)}}\,l_n r_n +$$

$$+ \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n+1)}}\,l_{n+1} r_{n+1} = l'_n r_n + l'_{n+1} r_{n+1};$$

$$EJ_{\omega(0)}\,\delta_{n,n+1} = \sum\int B_n B_{n+1} \frac{EJ_{\omega(0)}}{EJ_{\omega(n+1)}}\,dz =$$

$$= \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n+1)}}\,l_{n+1} s_{n+1} = l'_{n+1} s_{n+1},$$

где

$$l'_n = \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n)}}\,l_n \text{ и } l'_{n+1} = \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n+1)}}\,l_{n+1}. \qquad (43)$$

Величины l'_n и l'_{n+1} будем называть **приведенными пролетами**.

Вычислим теперь свободный член уравнения (42) Δ_{np}. Очевидно, что он зависит только от загружения n-го и $n+1$-го пролетов балки и выражается формулой

$$EJ_{\omega(0)}\,\Delta_{np} = \sum\int B_n B_p \frac{J_{\omega(0)}}{J_\omega}\,dz.$$

Так как эпюра B_n при вычислении интеграла, выражающего Δ_{np}, может быть принята прямолинейной (на рис. 184, *в* изображена пунктиром), то в пределах каждого пролета интеграл будет равен площади эпюры B_p, умноженной на ординату эпюры B_n, расположенную под центром тяжести первой.

Обозначив эти площади через F_n^B и F_{n+1}^B, а расстояния их центров тяжести до левой и правой опор пролета соответственно через c_n, d_n, c_{n+1} и d_{n+1}, получим (рис. 184, *д*)

$$EJ_{\omega(0)}\,\Delta_{np} = \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n)}}\,F_n^B \frac{c_n}{l_n} + \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n+1)}}\,F_{n+1}^B \frac{d_{n+1}}{l_{n+1}}$$

или

$$EJ_{\omega(0)}\,\Delta_{np} = \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n)}}\,R_n^{\text{ф.прав}} + \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n+1)}}\,R_{n+1}^{\text{ф.лев}}, \qquad (44)$$

где через $R_n^{\text{ф.прав}}$ обозначена фиктивная правая опорная реакция в n-м пролете, а через $R_{n+1}^{\text{ф.лев}}$ — фиктивная левая опорная реакция в $n+1$-м пролете.

Подставив найденные значения перемещений в уравнение (42), получим

$$l'_n s_n X_{n-1} + (l'_n r_n + l'_{n+1} r_{n+1}) X_n + l'_{n+1} s_{n+1} X_{n+1} + \\ + \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n)}} R_n^{\text{ф.прав}} + \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n+1)}} R_{n+1}^{\text{ф.лев}} = 0.$$

Заменив обозначения неизвестных X_{n-1}, X_n и X_{n+1}, соответственно через B_{n-1}, B_n и B_{n+1}, получим:

$$B_{n-1} l'_n s_n + B_n (l'_n r_n + l'_{n+1} r_{n+1}) + B_{n+1} l'_{n+1} s_{n+1} = \\ = -\frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n)}} R_n^{\text{ф.прав}} - \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n+1)}} R_{n+1}^{\text{ф.лев}}. \qquad (45)$$

Уравнение (45) и есть уравнение трех бимоментов.

Произвольный множитель $J_{\omega(0)}$ входит как в левую, так и в правую часть уравнения (45), поэтому на величину неизвестных не повлияет.

Если рассматриваемая неразрезная балка по всей длине будет иметь постоянное сечение, секториальный момент инерции которого равен J_ω, то, приняв $J_{\omega(0)} = J_\omega$, получим

$$B_{n-1} l_n s_n + B_n (l_n r_n + l_{n+1} r_{n+1}) + B_{n+1} l_{n+1} s_{n+1} = \\ = -R_n^{\text{ф.прав}} - R_{n+1}^{\text{ф.лев}}. \qquad (45')$$

Значения отвлеченных коэффициентов r и s в зависимости от величины kl даны в приложении 11.

При $kl=0$ эти коэффициенты соответственно равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$. После подстановки этих предельных значений в уравнение (45) оно примет такой же вид, как и уравнение трех моментов при расчете неразрезных балок на изгиб[1].

Формулы фиктивных операций опорных реакций $R^{\text{ф.прав}}$ и $R^{\text{ф.лев}}$ для некоторых наиболее часто встречающихся закручивающих нагрузок даны в табл. 43.

После того как по уравнениям (45) или (45′) все опорные бимоменты будут определены, можно, пользуясь указаниями § 23, части первой, построить окончательную эпюру B, а если потребуется, то и эпюры L, M_ω и $M_{\text{кр}}$ и определить реактивные крутящие моменты на всех опорах.

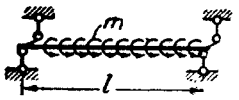
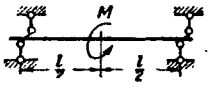
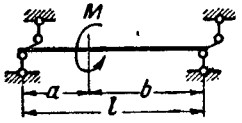
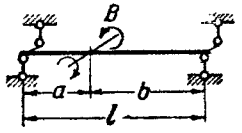
Опорный реактивный крутящий момент на любой опоре можно определить как разность между величинами общих крутящих моментов на бесконечно малых расстояниях справа и слева от этой опоры.

---

[1] И. М. Рабинович. Курс строительной механики, ч. 2, 1954, стр 118.

Таблица 43

Формулы фиктивных опорных реакций

№ п/п	Схема нагрузки	$R^{ф.лев}$	$R^{ф.прав}$
1		$\frac{ml^3}{2}t$	$\frac{ml^3}{2}t$
2		$\frac{Ml^2}{2}p$	$\frac{Ml^2}{2}p$
3		$Ml^2\frac{\frac{b}{l}\operatorname{sh}kl-\operatorname{sh}kb}{k^2l^2\operatorname{sh}kl}$	$Ml^2\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}kl-\operatorname{sh}ka}{k^2l^2\operatorname{sh}kl}$
4		$-Bl\frac{\operatorname{sh}kl-kl\operatorname{ch}kb}{k^2l^2\operatorname{sh}kl}$	$Bl\frac{\operatorname{sh}kl-kl\operatorname{ch}ka}{k^2l^2\operatorname{sh}kl}$

Формулы коэффициентов t и p см. в таблице приложения 10, а численные значения их в приложении 11.

Обозначив его буквой K со значком, указывающим номер опоры, будем иметь

$$K_n = L_{n+1} - L_n. \tag{46}$$

Воспользовавшись формулой (200) ч. I, можно написать

$$K_n = K_n^0 + \frac{B_{n+1} - B_n}{l_{n+1}} + \frac{B_{n-1} - B_n}{l_n}, \tag{47}$$

где через K_n^0 обозначен реактивный крутящий момент на n-й опоре, получающийся в основной системе от заданной внешней закручивающей нагрузки, расположенной на n-м и $n+1$-м пролетах.

§ 11. УРАВНЕНИЕ ТРЕХ БИМОМЕНТОВ ПРИ НАЛИЧИИ НА КОНЦЕ БАЛКИ СВЕШИВАЮЩЕЙСЯ КОНСОЛИ ИЛИ ЗАЩЕМЛЕНИЯ ОТ ДЕПЛАНАЦИЙ

1. При наличии на конце балки свешивающейся консоли в основной системе будет иметься стержень, закрепленный от углов закручивания и свободный для депланаций на одном конце и совершенно свободный на другом конце.

При определении изгибно-крутильных перемещений в таком стержне мы уже не имеем права пользоваться способом, изложенным в § 6, т. е. в качестве заданной системы не имеем права принимать стержень, лишенный способности сопротивляться чистому кручению, ибо при отсутствии защемления от депланаций такой консольный стержень будет системой геометрически изменяемой, каковую принимать в качестве основной системы, как известно, недопустимо.

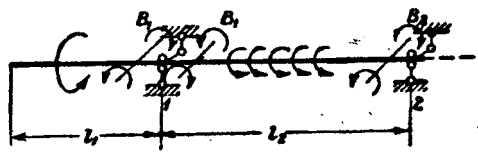


Рис. 185

В самом деле, пусть, например, нам требуется определить угол закручивания свободного конца такой консоли от действия бимомента B, приложенного на этом же конце. Если воспользоваться формулой (20) § 6, то мы получим, что искомый угол закручивания будет равен нулю, так как в подынтегральном выражении правой части этой формулы $B_1=0$, потому что, как видно из строки 14 приложения 8, от загружения рассматриваемой консоли сосредоточенным закручивающим моментом бимоменты по всей длине стержня отсутствуют. На самом же деле этот угол закручивания по формуле (6) приложения 7 равен

$$\theta_B = \frac{B}{k^2EJ_\omega} \cdot \frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{sh} kl} = \frac{B}{k^2EJ_\omega}. \tag{48}$$

То же самое мы получим, если для определения перемещений воспользуемся более общей формулой (18). Подставляя в правую часть ее

$$M_1^{кр} = GJ_d\theta_1' = k^2EJ_\omega \frac{1}{k^2EJ_\omega} = 1$$

и

$$M_p^{кр} = k^2EJ_\omega\theta_p' = k^2EJ_\omega \frac{B}{kEJ_\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kl} = Bk\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kl}$$

(см. приложение 7), получим

$$\Delta_{1p} = \theta_B = \frac{1}{GJ_d}\int_0^l 1 \cdot Bk\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kl}\,dz = \frac{Bk}{k^2EJ_\omega \operatorname{sh} kl}\int_0^l \operatorname{ch} kz\,dz = \frac{B}{k^2EJ_\omega}.$$

Поэтому уравнение трех бимоментов для крайней левой опоры неразрезной балки со свешивающейся консолью (рис. 185) мы составим непосредственно из условия неразрывности депланаций балки на этой опоре, т. е. из условия

$$\theta'_{\text{лев}} = \theta'_{\text{прав}}. \tag{49}$$

Определив θ' из соответствующих формул приложения 7 напишем уравнение (49) в развернутом виде

$$\frac{B_1 l_1}{EJ_{\omega(1)}} \cdot \frac{\operatorname{ch} k_1 l_1}{k_1 l_1 \operatorname{sh} k_1 l_1} + \theta'_{B(1)} = -\frac{B_1 l_2}{EJ_{\omega(2)}} \cdot \frac{k_2 l_2 \operatorname{ch} k_2 l_2 - \operatorname{sh} k_2 l_2}{k_2^2 l_2^2 \operatorname{sh} k_2 l_2} -$$

$$-\frac{B_2 l_2}{EJ_{\omega(2)}} \cdot \frac{\operatorname{sh} k_2 l_2 - k_2 l_2}{k_2^2 l_2^2 \operatorname{sh} k_2 l_2} - \theta'_{A(2)}.$$

Принимая во внимание обозначения, данные в формулах (31), (32) и (43), и вводя новое обозначение

$$e = \frac{\operatorname{ch} kl}{kl \operatorname{sh} kl} = \frac{1}{kl \operatorname{th} kl}, \tag{50}$$

получим

$$B_1 (l'_1 e_1 + l'_2 r_2) + B_2 l'_2 s_2 = -EJ_{\omega(0)} (\theta'_{B(1)} + \theta'_{A(2)}).$$

Для пролета l_2 мы при определении перемещений имеем право пользоваться формулами (24), поэтому уравнение трех бимоментов для крайней левой опоры со свешивающейся консолью (рис. 185) будет иметь следующий вид

$$B_1 (l'_1 e_1 + l'_2 r_2) + B_2 l'_2 s_2 = -EJ_{\omega(0)} \theta'_{B(1)} - \frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(2)}} R_2^{\text{ф.лев}}, \tag{51}$$

где депланацию $\theta'_{B(1)}$ следует определять по приложению 7, а численные значения коэффициентов e, r и s — по приложению 11.

$J_{\omega(0)}$, так же как и в уравнении (45), — совершенно произвольный секториальный момент инерции, входящий как в левую, так и в правую часть уравнения.

2. Если какой-нибудь конец балки защемлен от депланаций, то такое защемление, так же как и защемление от поворота, при расчете неразрезных балок на изгиб можно считать эквивалентным наличию дополнительного нулевого пролета $l=0$, имеющего шарнирно опертый и свободный в смысле депланаций конец.

Так как на новой крайней опоре (будем считать ее левой) бимомент равен нулю, то уравнение (45) трех бимоментов для защемленного от депланаций конца балки примет следующий вид

$$B_0 (l'_0 r_0 + l'_1 r_1) + B_1 l'_1 s_1 = -\frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(1)}} R_1^{\text{ф.лев}}$$

или после подстановки $l_0' = 0$

$$B_0 l_1' r_1 + B_1 l_1' s_1' = -\frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(1)}} R_1^{\text{ф.лев}}, \tag{52}$$

где $J_{\omega(0)}$ — по-прежнему совершенно произвольный секториальный момент инерции.

§ 12. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННОЙ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ НА КРУЧЕНИЕ

Пример 9. Построить эпюры изгибно-крутящих бимоментов B_ω и общих крутящих моментов L для неразрезной тонкостенной балки, представленной на рис. 186, *а*.

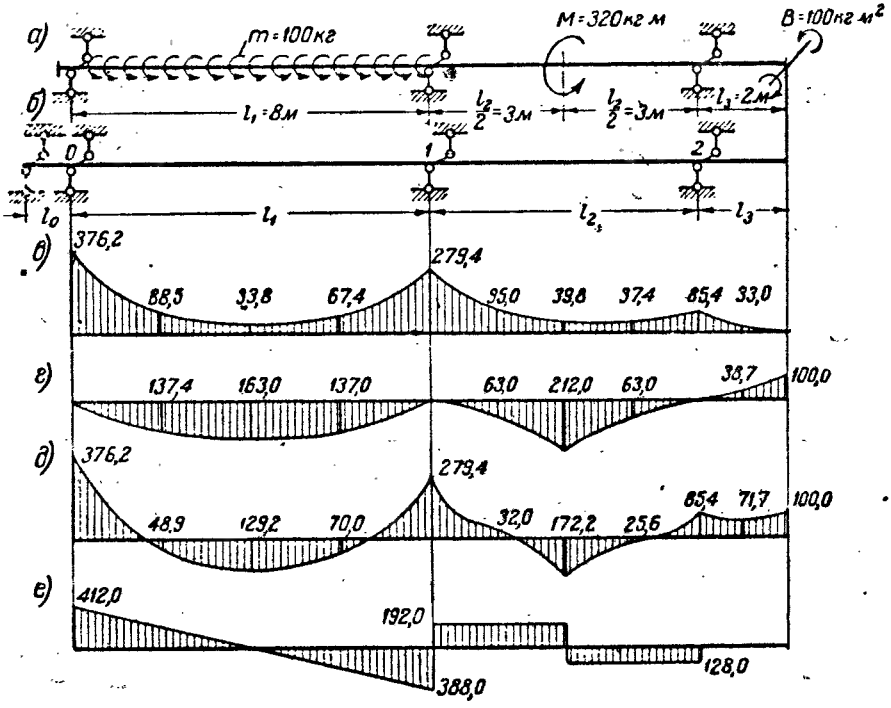


Рис. 186

Дано: $l_1 = 8$ *м*, $l_2 = 6$ *м*, $l_{\text{конс}} = l_3 = 2$ *м*.

Сечение балки — по всей длине двутавр № 60а.

Нагрузки: $m = 100$ *кг*, $M = 320$ *кгм*, $B = 100$ *кгм*^{2}.

Упругие изгибно-крутильные характеристики (см. приложение 1) и необходимые для дальнейшего коэффициента (по приложению 11)

$$k = 0{,}007427\ см^{-1};\ kl_1 = 0{,}007427 \cdot 800 = 5{,}94;$$

$$kl_2 = 0{,}007427 \cdot 600 = 4{,}46;\ kl_3 = 0{,}007427 \cdot 200 = 1{,}49;$$
$$r_1 = 0{,}140;\ s_1 = 0{,}0276;\ p_1 = 0{,}0255;\ t_1 = 0{,}0189;$$
$$r_2 = 0{,}175;\ s_2 = 0{,}0460;\ p_2 = 0{,}0402;\ f_2 = 0{,}221;$$
$$e_3 = 0{,}749.$$

Заделку левого конца балки представляем в виде дополнительного бесконечно малого пролета l_0, имеющего на левом конце шарнирную опору, допускающую депланацию опорного сечения (рис. 186, *б*), и составим уравнения трех бимоментов: для первой промежуточной опоры номера 0 — по типу (52) для балки постоянного по всей длине сечения; для опоры 1 — по типу (45′) и, наконец, для опоры 2 — по типу (51):

$$B_0\, l_1 r_1 + B_1\, l_1 s_1 = -R_1^{\text{ф.лев}}$$
$$B_0\, l_1 s_1 + B_1 (l_1 r_1 + l_2 r_2) + B_2\, l_2 s_2 = -R_1^{\text{ф.прав}} - R_2^{\text{ф.лев}}$$
$$B_1\, l_2 s_2 + B_2 (l_2 r_2 + l_3 e_3) = -R_2^{\text{ф.прав}} - EJ_\omega\, \theta'_{B\,(3)}.$$

По формулам табл. 43 и приложения 7

$$R_1^{\text{ф.лев}} = R_1^{\text{ф.прав}} = \frac{ml_1^3}{2} t_1 = \frac{100 \cdot 8^3}{2} 0{,}0189 = 483\ \textit{кгм}^3;$$

$$R_2^{\text{ф.лев}} = R_2^{\text{ф.прав}} = \frac{Ml_2^2}{2} p^2 = \frac{320 \cdot 6^2}{2} \cdot 0{,}0402 = 231\ \textit{кгм}^3;$$

$$EJ_\omega\, \theta'_{B\,(3)} = EJ_\omega \frac{B}{kEJ_\omega} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} kl_3} = Bl_3 \frac{1}{kl_3 \operatorname{sh} kl_3} =$$
$$= 100 \cdot 2 \frac{1}{1{,}49 \cdot 2{,}106} = 63{,}7\ \textit{кгм}^3.$$

После замены буквенных коэффициентов их численными значениями уравнения трех бимоментов примут следующий вид:

$$B_0 \cdot 8 \cdot 0{,}14 + B_1 \cdot 8 \cdot 0{,}0276 = -483;$$
$$B_0 \cdot 8 \cdot 0{,}0276 + B_1 (8 \cdot 0{,}140 + 6 \cdot 0{,}175) + B_2 \cdot 6 \cdot 0{,}0460 = -483 - 231;$$
$$B_1 \cdot 6 \cdot 0{,}046 + B_2 (6 \cdot 0{,}175 + 2 \cdot 0{,}749) = -231 - 63{,}7.$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$B_0 = -376{,}2\ \textit{кгм}^2;\quad B_1 = -279{,}4\ \textit{кгм}^2;$$
$$B_2 = -85{,}4\ \textit{кгм}^2.$$

Для построения эпюры опорных бимоментов выпишем из табл. 28 коэффициенты $\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}$ в четвертях каждого пролета

	$z = 0{,}25\, l$	$z = 0{,}5\, l$	$z = 0{,}75\, l$
1-й пролет	0,0112	0,0516	0,227
2-й „	0,0329	0,109	0,33
3-й „	0,181	0,387	0,647

Тогда промежуточные ординаты эпюры опорных бимоментов, вычисленные по формуле (193), будут следующие:

	$z=0{,}25\,l$	$z=0{,}5\,l$	$z=0{,}75\,l$
1-й пролет	—88,5	—33,8	—67,4
2-й „	—95	—39,8	—37,4
3-й „	—55,3	—33	—15,5

Соответствующая эпюра построена на рис. 186,*в*.

Для построения эпюры бимоментов в основной системе вычислим по формулам табл. 41 максимальные ординаты этой эпюры, а по табл. 29 и 28 — промежуточные значения ординат в четвертях полупролетов:

$$\max B_1 = ml_1^2 p_1 = 100 \cdot 8^2 \cdot 0{,}0255 = 163 \text{ кгм}^2;$$

$$\max B_2 = \frac{Ml_2}{2} f_2 = \frac{320 \cdot 6}{2} \cdot 0{,}221 = 212 \text{ кгм}^2.$$

Промежуточные ординаты по формулам (197) и (193) части 1

	$z=0{,}25\,l$	$z=0{,}50\,l$	$z=0{,}75\,l$
1-й пролет	137,4	163	137,4
2-й „	63	212	63
3-й „	—18,1	—38,7	—64,7

(kl_1 и kl_2 приняты вдвое меньше, так как при выводе формулы (197) пролет принимался равным $2l$).

По этим данным эпюра бимоментов в основной системе построена на рис. 186,*г*.

Окончательно эпюра B изображена на рис. 186,*д*.

Общие крутящие моменты L в каждом пролете вычисляем по формулам (200), (201), (202) и (203) части 1

$$L_1 = L_{p(1)} + \frac{B_1 - B_0}{l_1} = m\left(\frac{l_1}{2} - z\right) + \frac{B_1 - B_0}{l_1} =$$

$$= 100\left(\frac{8}{2} - z\right) + \frac{-279{,}4 + 376}{8} = 412 - 100\,z;$$

$$\text{при } z = 0 \;\; L_1^{\text{лев}} = 412 \text{ кгм};$$

$$\text{при } z = l_1 = 8 \text{ м} \;\; L_1^{\text{прав}} = 412 - 800 = -388 \text{ кгм};$$

$$L_2 = L_{p(2)} + \frac{B_2 - B_1}{l_2} = \pm\frac{M}{2} + \frac{B_2 - B_1}{l_2} = \pm\frac{320}{2} +$$

$$+ \frac{-85{,}4 + 279{,}4}{6} = \pm 160 + 32;$$

$$L_2^{лев} = 160 + 32 = 192 \text{ кгм};$$

$$L_2^{прав} = -160 + 32 = -128 \text{ кгм};$$

$L_3=0$, так как в заданной балке (со свободным правым концом) на консоли закручивающие моменты отсутствуют.

Соответствующая эпюра L построена на рис. 186, *е*.

Опорные реактивные крутящие моменты определим по формуле (46)

$$K_0 = L_1 - L_0 = 412 - 0 = 412 \text{ кгм};$$

$$K_1 = L_2 - L_1 = 192 + 388 = 580 \text{ кгм};$$

$$K_2 = L_3 - L_2 = 0 + 128 = 128 \text{ кгм}.$$

§ 13. БИМОМЕНТНЫЕ ФОКУСНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И БИМОМЕНТНЫЕ ФОКУСЫ

Известная теория моментных фокусных отношений, имеющая большое практическое и теоретическое значение для расчета неразрезных балок на изгиб, может быть с успехом распространена и на расчет тонкостенных неразрезных балок на кручение.

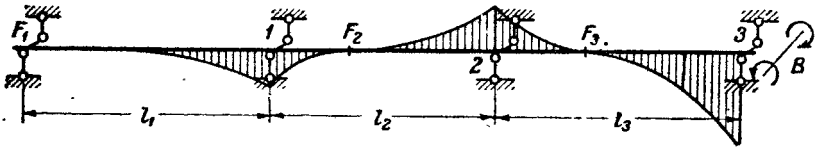


Рис. 187

С этой целью рассмотрим многопролетную неразрезную балку, не загруженную на первых нескольких пролетах, считая слева.

Ту часть балки, которая находится справа, отбросим, а действие ее на оставшуюся часть заменим моментом M и поперечной силой Q, действующими в плоскости, проходящей через линию центров изгиба, продольной силой N, действующей по линии, проходящей через одну из секториальных нулевых точек профиля, бимоментом B и общим крутящим моментом L.

Первые три из перечисленных силовых факторов, как было установлено выше, на эпюру изгибно-крутящих бимоментов не влияют. Общий крутящий момент L как приложенный на опоре уничтожается сопротивлением этой опоры и дальше не передается. Следовательно, изгибно-крутящий бимомент возбуждается только бимоментом B. На рис. 187 изображена рассматриваемая часть балки, на которой построена соответствующая эпюра бимоментов. Нулевые точки этой эпюры F_1, F_2, F_3, ... будем называть **левыми** (поскольку нагрузка расположена справа) **бимоментными фокусами**. При нагрузке слева будем иметь правые нулевые

точки эпюры, которые будем обозначать через F' с соответствующим значком снизу и называть **правыми бимоментными фокусами**.

Бимоментные фокусы, так же как и моментные, обладают свойством инвариантности, заключающимся в том, что на заданной неразрезной балке они занимают совершенно определенные, не зависящие от внешней нагрузки положения.

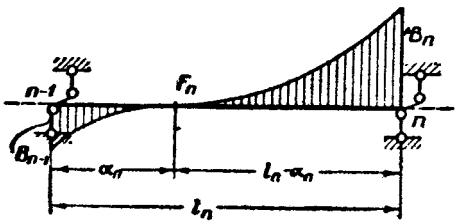


Рис. 188

Абсолютную величину отношения между изгибно-крутящими бимоментами на концах какого-нибудь пролета будем называть **бимоментным фокусным отношением**, левым или правым, в зависимости от того, каким фокусом оно определяется.

Например, для пролета l_n (рис. 188) левым бимоментным фокусным отношением называется отношение

$$\varkappa_n = -\frac{B_n}{B_{n-1}}. \tag{53}$$

Положение фокуса F_n определим из уравнения (193), если подставим в него вместо z расстояние от левой опоры до фокуса a и правую часть его приравняем нулю.

В наших обозначениях будем иметь

$$B_{n-1}\frac{\operatorname{sh} k_n(l-\alpha_n)}{\operatorname{sh} k_n l_n} - B_n\frac{\operatorname{sh} k_n \alpha_n}{\operatorname{sh} k_n l_n} = 0,$$

откуда

$$\frac{B_n}{B_{n-1}} = \frac{\operatorname{sh} k_n(l_n-\alpha_n)}{\operatorname{sh} k_n \alpha_n} = \frac{\operatorname{sh} k_n l_n \operatorname{ch} k_n \alpha_n - \operatorname{ch} k_n l_n \operatorname{sh} k_n \alpha_n}{\operatorname{sh} k_n \alpha_n} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} k_n l_n}{\operatorname{th} k_n \alpha_n} - \operatorname{ch} k_n l_n.$$

Подставив это выражение в формулу (53), получим

$$\operatorname{th} k_n \alpha_n = \frac{\operatorname{sh} k_n l_n}{\operatorname{ch} k_n l_n + \varkappa_n}. \tag{54}$$

По формуле (54) можно определить левое фокусное расстояние, т. е. расстояние левого бимоментного фокуса от ближайшей левой опоры (рис. 188).

Аналогично для правого фокусного расстояния получим:

$$\operatorname{th} k_n \alpha_n' = \frac{\operatorname{sh} k_n l_n}{\operatorname{ch} k_n l_n + \varkappa_n'}, \tag{55}$$

где α_n' — правое фокусное расстояние, а

$$\varkappa_n' = -\frac{B_{n-1}}{B_n} \tag{56}$$

— правое бимоментное фокусное отношение в n-м пролете балки.

Составим теперь для n-й опоры балки (рис. 189) уравнение трех бимоментов

$$B_{n-1} l'_n s_n + B_n (l'_n r_n - l'_{n+1} r_{n+1}) + B_{n+1} l'_{n+1} s_{n+1} = 0. \qquad (57)$$

Разделим обе части его на B_n

$$\frac{B_{n-1}}{B_n} l'_n s_n + l'_n r_n + l'_{n+1} r_{n+1} + \frac{B_{n+1}}{B_n} l'_{n+1} s_{n+1} = 0.$$

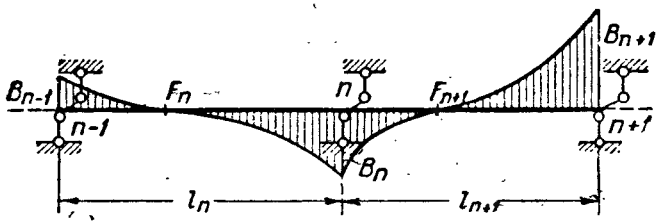


Рис. 189

Подставив вместо $\frac{B_n}{B_{n-1}} = -\varkappa_n$ и $\frac{B_{n+1}}{B_n} = -\varkappa_{n+1}$, согласно формуле (53) получим

$$l'_n s_n \frac{1}{\varkappa_n} + l'_n r_n + l'_{n+1} r_{n+1} - l'_{n+1} s_{n+1} \varkappa_{n+1} = 0,$$

откуда

$$\varkappa_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{l'_n}{l'_{n+1}} \left(\frac{r_n}{s_{n+1}} - \frac{s_n}{s_{n+1}} \frac{1}{\varkappa_n} \right). \qquad (58)$$

По формуле (58) определяется левое бимоментное фокусное отношение. Для пользования этой формулой необходимо знать фокус крайнего левого пролета.

В балке с шарнирно опертым и допускающим депланацию левым концом левый фокус первого пролета совпадает с левой опорой, так как бимомент на конце $B_0 = 0$, поэтому

$$\varkappa_1 = -\frac{B_1}{B_0} = -\frac{B_1}{0} = \infty. \qquad (59)$$

Если левый конец балки защемлен от депланаций, то такое защемление, как было указано в § 11, можно считать эквивалентным наличию дополнительного нулевого пролета $l_0 = 0$, имеющего шарнирно опертый левый конец. Так как для этого дополнительного пролета $k_0 = \infty$, то по формуле (58) будем иметь:

при $l_0=0$ и $l_0'=0$; поэтому в этом случае

$$\varkappa_1 = \frac{r_1}{s_1}. \tag{60}$$

Формулу (60) можно было бы получить и непосредственно из соответствующей формулы приложения 7.

Если левый конец балки имеет консоль (рис. 190), то левый бимоментный фокус первого (не считая консоль) пролета в отличие от левого моментного фокуса не совпадает с левой опорой.

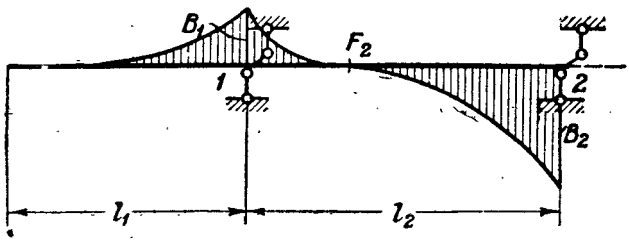


Рис. 190

Для нахождения его воспользуемся уравнением (51), приравняв правую часть этого уравнения нулю:

$$B_1 (l_1' e_1 + l_2' r_2) + B_2 l_2' s_2 = 0.$$

Разделив это уравнение на B_1 и сделав подстановку по формуле (53), получим

$$\varkappa_2 = \frac{r_2}{s_2} + \frac{l_1'}{l_2'} \cdot \frac{e_1}{s_2}. \tag{61}$$

Таким образом, левый фокус крайнего левого пролета балки в зависимости от условий закрепления левой опоры определяется по формулам (59), (60) или (61), а левые фокусы всех последующих пролетов — по формуле (58).

Для правых фокусных отношений формула (58) имеет следующий вид:

$$\varkappa_n' = \frac{r_n}{s_n} + \frac{l_{n+1}'}{l_n'} \left(\frac{r_{n+1}}{s_n} - \frac{s_{n+1}}{s_n} \cdot \frac{1}{\varkappa_{n+1}'} \right). \tag{58'}$$

Формулы (58) и (58′) показывают, что левый (правый) бимоментный фокус любого пролета, так же как и моментный фокус, зависит только от приведенной длины l' и изгибно-крутильной характеристики kl рассматриваемого пролета и всех расположенных слева (справа) от него, и совершенно не зависит от величин, характеризующих остальные пролеты балки.

Найдем теперь значения фокусных отношений и фокусных расстояний при предельных значениях упругой изгибно-крутильной характеристики k, а именно при $k=0$ и $k=\infty$.

По известному правилу

$$\lim_{k_{n+1}\to 0}\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}=\lim_{k\to 0}\frac{r}{s}=\lim_{k\to 0}\frac{kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl}{\mathrm{sh}\,kl-kl}=\lim_{k\to 0}\frac{kl^2\,\mathrm{sh}\,kl}{l\,\mathrm{ch}\,kl-l}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{l^2\,\mathrm{sh}\,kl+kl^3\,\mathrm{ch}\,kl}{l^2\,\mathrm{sh}\,kl}=\lim_{k\to 0}\frac{2l^3\,\mathrm{ch}\,kl+kl^4\,\mathrm{sh}\,kl}{l^3\,\mathrm{ch}\,kl}=\frac{2l^3}{l^3}=2.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\mathrm{ch}kl$, найдем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{r}{s}=\lim_{k\to\infty}\frac{kl-\mathrm{th}\,kl}{\mathrm{th}\,kl-\dfrac{kl}{\mathrm{ch}kl}}=\frac{\infty-1}{1-0}=\infty,$$

так как предел последнего слагаемого знаменателя

$$\lim_{k\to\infty}\frac{kl}{\mathrm{ch}kl}=\lim_{k\to\infty}\frac{l}{l\,\mathrm{sh}\,kl}=\frac{l}{\infty}=0.$$

Выражения в скобках формулы (58) представляют отношения величин, относящихся не к одному, а к двум смежным пролетам балки. Будем предполагать, что при стремлении к пределу $k\to 0$ или $k_n\to\infty$ отношение между значениями k в смежных пролетах балки остается постоянным, т. е. положим

$$k_{n+1}=\alpha k_n.$$

Тогда аналогично предыдущему будем иметь

$$\lim_{k_n\to 0}\frac{r_n}{s_{n+1}}=\lim_{k_n\to 0}\frac{(k_n l_n\,\mathrm{ch}\,k_n l_n-\mathrm{sh}\,k_n l_n)\,\alpha^2 l_{n+1}^2\,\mathrm{sh}\,\alpha k_n l_{n+1}}{(\mathrm{sh}\,\alpha k_n l_{n+1}-\alpha k_n l_{n+1})\,l_n^2\,\mathrm{sh}\,k_n l_n}=$$

$$=\lim_{k_n\to 0}\frac{k_n l_n\,\mathrm{ch}\,k_n l_n-\mathrm{sh}\,k_n l_n}{\mathrm{sh}\,\alpha k_n l_{n+1}-\alpha k_n l_{n+1}}\lim_{k_n\to 0}\frac{\alpha^2 l_{n+1}^2\,\mathrm{sh}\,\alpha k_n l_{n+1}}{l_n^2\,\mathrm{sh}\,k_n l_n}=$$

$$=\frac{2l_n^3}{\alpha^2 l_{n+1}^3}\cdot\frac{\alpha^3 l_{n+1}^3}{l_n^3}=2;$$

$$\lim_{k_n\to\infty}\frac{r_n}{s_{n+1}}=\lim_{k_n\to\infty}\frac{(k_n l_n\,\mathrm{ch}\,k_n l_n-\mathrm{sh}\,k_n l_n)\,\alpha^2 l_{n+1}^2\,\mathrm{sh}\,\alpha k_n l_{n+1}}{l_n^2\,\mathrm{sh}\,k_n l_n(\mathrm{sh}\,\alpha k_n l_{n+1}-\alpha k_n l_{n+1})}=$$

$$=\lim_{k_n\to\infty}\frac{(k_n l_n\,\mathrm{cth}\,k_n l_n-1)\,\alpha^2 l_{n+1}^2}{l_n^2\left(1-\dfrac{\alpha k_n l_{n+1}}{\mathrm{sh}\,\alpha k_n l_{n+1}}\right)}=\frac{(\infty-1)\,\alpha^2 l_{n+1}^2}{l_n^2(1-0)}=\infty$$

и, наконец:

$$\lim_{k_n\to 0}\frac{s_n}{s_{n+1}}=\lim_{k_n\to 0}\frac{(\operatorname{sh}k_n\,l_n-k_n\,l_n)\,\alpha^2 l_{n+1}^2\operatorname{sh}\alpha\,k_n\,l_{n+1}}{(\operatorname{sh}\alpha k_n\,l_{n+1}-\alpha k_n\,l_{n+1})\,l_n^2\operatorname{sh}k_n\,l_n}=$$

$$=\lim_{k_n\to 0}\frac{\operatorname{sh}k_n\,l_n-k_n\,l_n}{\operatorname{sh}\alpha\,k_n\,l_{n+1}-\alpha k_n\,l_{n+1}}\;\lim_{k_n\to 0}\frac{\alpha^2 l_{n+1}^2\operatorname{sh}\alpha\,k_n\,l_{n+1}}{l_n^2\operatorname{sh}k_n\,l_n}=$$

$$=\frac{l_n^3}{\alpha^3 l_{n+1}^3}\cdot\frac{\alpha^3 l_{n+1}^3}{l_n^3}=1;$$

$$\lim_{k_n\to\infty}\frac{s_n}{s_{n+1}}=\lim_{k_n\to\infty}\frac{(\operatorname{sh}k_n\,l_n-k_n\,l_n)\,\alpha^2 l_{n+1}^2\operatorname{sh}\alpha\,k_n\,l_{n+1}}{(\operatorname{sh}\alpha k_n\,l_{n+1}-\alpha k_n\,l_{n+1})\,l_n^2\operatorname{sh}k_n\,l_n}=$$

$$=\lim_{k_n\to\infty}\frac{\left(\operatorname{th}k_n\,l_n-\dfrac{k_n\,l_n}{\operatorname{ch}k_n\,l_n}\right)\alpha^2 l_{n+1}^2\operatorname{th}\alpha k_n\,l_{n+1}}{\left(\operatorname{th}\alpha k_n\,l_{n+1}-\dfrac{\alpha k_n\,l_{n+1}}{\operatorname{ch}\alpha k_n\,l_{n+1}}\right)l_n^2\operatorname{th}k_n\,l_n}=$$

$$=\frac{(1-0)\,\alpha^2 l_{n+1}^2\cdot 1}{(1-0)\,l_n^2\cdot 1}=\frac{\alpha^2 l_{n+1}^2}{l_n^2}.$$

Подставив найденные предельные значения отдельных слагаемых в формулу (58), получим

$$\lim_{k_n\to 0}\varkappa_{n+1}=2+\frac{l_n'}{l_{n+1}'}\left(2-\frac{1}{\varkappa_n}\right)\tag{62}$$

и

$$\lim_{k_n\to\infty}\varkappa_{n+1}=\infty+\frac{l_n'}{l_{n+1}'}\left(\infty-\frac{\alpha^2 l_{n+1}^2}{l_n^2}\cdot\frac{1}{\varkappa_n}\right)=\infty.\tag{63}$$

Формула (62) имеет совершенно такой же вид, как и соответствующая формула для левых фокусных отношений в теории расчета неразрезных балок на изгиб[1].

Это значит, что в неразрезных тонкостенных балках, для которых жесткость при чистом кручении GJ_d можно принять равной нулю, бимоментные и моментные фокусные точки совпадают.

Найдем теперь предельные значения фокусных расстояний, определяемых формулами (54) и (55).

Отношение фокусного расстояния a_n к пролету l_n (рис. 188) можно представить в следующем виде:

---

[1] И. М. Рабинович. Курс строительной механики, ч. 2, 1954, стр. 127.

$$\frac{\alpha_n}{l_n} = \frac{k_n \alpha_n}{k_n l_n} = \frac{k_n \alpha_n}{\operatorname{th} k_n \alpha_n} \cdot \frac{\operatorname{th} k_n l_n}{k_n l_n} \cdot \frac{\operatorname{th} k_n \alpha_n}{\operatorname{th} k_n l_n},$$

при $k_n \to 0$

$$\lim_{k_n \to 0} \frac{\alpha_n}{l_n} = \lim_{k_n \to 0} \frac{k_n \alpha_n}{k_n l_n} = \lim_{k_n \to 0} \frac{k_n \alpha_n}{\operatorname{th} k_n \alpha_n} \lim_{k_n \to 0} \frac{\operatorname{th} k_n l_n}{k_n l_n} \times$$

$$\times \lim_{k_n \to 0} \frac{\operatorname{th} k_n \alpha_n}{\operatorname{th} k_n l_n} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{k_n \to 0} \frac{\operatorname{th} k_n \alpha_n}{\operatorname{th} k_n l_n}.$$

Подставив в последнее выражение значение $\operatorname{th} k_n \alpha_n$ из формулы (54), получим

$$\lim_{k_n \to 0} \frac{\alpha_n}{l_n} = \lim_{k_n \to 0} \frac{\operatorname{ch} k_n l_n}{\operatorname{ch} k_n l_n + \varkappa_n} = \frac{1}{1 + \varkappa_n},$$

откуда при $k_n \to \infty$

$$\alpha_n = \frac{l_n}{1 + \varkappa_n}. \tag{64}$$

Формула (64) имеет такой же вид, как и соответствующая формула для левого фокусного расстояния в теории моментных фокусов[1].

Если левый конец балки защемлен против депланаций, то по формуле (60)

$$\varkappa_n = \frac{r_n}{s_n},$$

что в пределе при $k_n \to 0$ равно 2.

Тогда

$$\alpha_n = \frac{l_n}{1+2} = \frac{1}{3} l_n.$$

Если же левый конец балки закреплен против закручивания, но свободен для депланаций, то по формуле (59)

$$\varkappa_n = \infty,$$

а тогда

$$\alpha_n = \frac{l_n}{1 + \infty} = 0.$$

Предельное значение левого фокусного расстояния при $k_n \to \infty$ найдем только для случая, когда левый конец балки защемлен против депланаций, так как для балки с левой шарнирной опорой, допускающей депланацию, $\alpha = 0$ при любом k.

Подставив в формулу (54) значение $\varkappa$ из формулы (60), а значения r и s из приложения 10, получим

$$\operatorname{th} k\alpha = \frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl + \varkappa} = \frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl + \dfrac{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}{\operatorname{sh} kl - kl}} = \frac{\operatorname{sh} kl - kl}{\operatorname{ch} kl - 1}.$$

---

[1] И. М. Рабинович. Курс строительной механики, ч. 2, 1954, стр. 128.

Тогда искомый предел будет равен

$$\lim_{k\to\infty}\frac{ka}{kl}=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{Ar\,th}\dfrac{\operatorname{sh}kl-kl}{\operatorname{ch}kl-1}}{kl}=\lim_{k\to\infty}\frac{l(\operatorname{ch}kl-1)^2-l\operatorname{sh}kl(\operatorname{sh}kl-kl)}{\left[1-\left(\dfrac{\operatorname{sh}kl-kl}{\operatorname{ch}kl-1}\right)^2\right](\operatorname{ch}kl-1)^2 l}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{kl\operatorname{sh}kl-2\operatorname{ch}kl+2}{2kl\operatorname{sh}kl-2\operatorname{ch}kl+2-k^2l^2}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{kl\operatorname{ch}kl-\operatorname{sh}kl}{2kl\operatorname{ch}kl-2kl}=\lim_{k\to\infty}\frac{kl\operatorname{sh}kl}{2kl\operatorname{sh}kl+2\operatorname{ch}kl-2}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{th}kl+kl}{4\operatorname{th}kl+2kl}=\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2kl}+1}{\dfrac{4}{\operatorname{ch}^2kl}+2}=\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, левая бимоментная фокусная точка в зависимости от степени защемления левой опоры и величины упругой изгибно-крутильной характеристики балки k может находиться в пределах первой половины пролета, причем по мере увеличения величины k от 0 до ∞ область колебания фокусной точки расширяется: от трети (при $k=0$) до половины пролета балки (при $k=\infty$).

§ 14. ПРИМЕНЕНИЕ БИМОМЕНТНЫХ ФОКУСНЫХ ОТНОШЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БИОМОМЕНТОВ НА КОНЦАХ ЗАГРУЖЕННОГО ПРОЛЕТА

Если закручивающей нагрузкой загружен только один пролет неразрезной балки, то опорные бимоменты ее сравнительно просто и быстро можно определить при помощи бимоментных фокусных отношений.

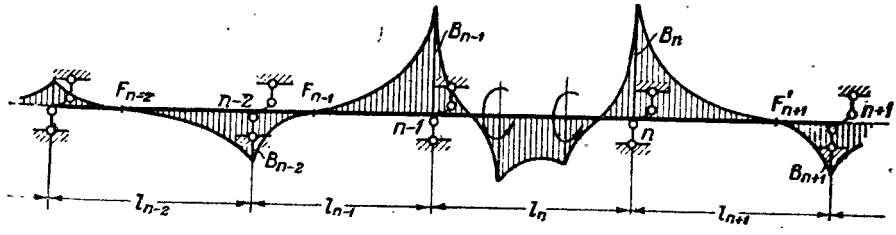


Рис. 191

С этой целью рассмотрим неразрезную балку, загруженную в пролете l_n (рис. 191). Для определения опорных бимоментов загруженного пролета составим два уравнения

$$B_{n-2}\,l'_{n-1}s_{n-1}+B_{n-1}(l'_{n-1}r_{n-1}+l'_n r_n)+B_n\,l'_n s_n=-\frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega(n)}}R_n^{\text{ф.лев.}};$$

$$B_{n-1}\, l'_n s_n + B_n\,(\, l'_n r_n + l'_{n+1} r_{n+1}) + B_{n+1}\, l'_{n+1} s_{n+1} = -\frac{J_{\omega\,(0)}}{J_{\omega\,(n)}} R_n^{\text{ф.прав}}.$$

Подставив в эти уравнения:
получим:

$$B_{n-2} = -\frac{B_{n-1}}{\varkappa_{n-1}} \quad \text{и} \quad B_{n+1} = -\frac{B_n}{\varkappa'_{n+1}},$$

$$\left[\frac{r_n}{s_n} + \frac{l'_{n-1}}{l'_n}\left(\frac{r_{n-1}}{s_n} - \frac{s_{n-1}}{s_n}\,\frac{1}{\varkappa_{n-1}}\right)\right] B_{n-1}\, l'_n s_n + B_n\, l'_n s_n = -$$
$$-\frac{J_{\omega\,(0)}}{J_{\omega\,(n)}} R_n^{\text{ф.лев}};$$

$$B_{n-1}\, l'_n s_n + \left[\frac{r_n}{s_n} + \frac{l'_{n+1}}{l'_n}\left(\frac{r_{n+1}}{s_n} - \frac{s_{n+1}}{s_n}\,\frac{1}{\varkappa'_{n+1}}\right)\right] B_n\, l'_n s_n = -$$
$$-\frac{J_{\omega(0)}}{J_{\omega\,[n)}} R_n^{\text{ф.прав}}.$$

Выражения в квадратных скобках, согласно формулам (58) и (58[1]), соответственно равны $\varkappa_n$ и $\varkappa'_n$.

Сделав эту подстановку и принимая во внимание формулы (43), будем иметь

$$B_{n-1}\varkappa_n + B_n = -\frac{R_n^{\text{ф.лев}}}{l_n s_n}; \tag{65}$$

$$B_{n-1} + B_n \varkappa'_n = -\frac{R_n^{\text{ф.прав}}}{l_n s_n}.$$

Введя обозначения

$$\frac{R_n^{\text{ф.лев}}}{l_n s_n} = S_n^{\text{прав}} \quad \text{и} \quad \frac{R_n^{\text{ф.прав}}}{l_n s_n} = S_n^{\text{лев}} \tag{66}$$

и решив систему уравнений (65), получим формулы для определения опорных бимоментов B_{n-1} и B_n

$$B_{n-1} = -\frac{S_n^{\text{прав}}\varkappa'_n - S_n^{\text{лев}}}{\varkappa_n \varkappa'_n - 1} \quad \text{и} \quad B_n = -\frac{S_n^{\text{лев}}\varkappa_n - S_n^{\text{прав}}}{\varkappa_n \varkappa'_n - 1}. \tag{67}$$

Формулы (67) по виду совершенно аналогичны известным из курса строительной механики формулам для определения опорных изгибающих моментов[1]. Обратим внимание, что в обозначениях (66), которые в курсе строительной механики называются пере-

---

[1] И. М. Рабинович. Курс строительной механики, ч. 2, 1954, стр. 132.

крестными отрезками, $S_n^{\text{прав}}$ выражается через $R_n^{\text{ф.лев}}$, а $S_n^{\text{лев}}$ — через $R_n^{\text{ф. прав}}$.

Получив по формулам (67) опорные бимоменты загруженного пролета, остальные опорные бимоменты следует определять по формуле (53) или (56).

Если левый конец неразрезной балки имеет консоль и закручивающей нагрузкой загружена только эта консоль, то опорный бимомент на крайней левой опоре определим из уравнения (51), полагая второе слагаемое правой части его равным нулю, т. е. из уравнения

$$B_1 (l_1' e_1 + l_2' r_2) + B_2 l_2' s_2 = -EJ_{\omega(0)} \theta'_{B(1)}.$$

Подставив в это уравнение

$$B_2 = -\frac{B_1}{\varkappa_2'},$$

получим

$$\left(\frac{r_2}{s_2} + \frac{l_1'}{l_2'} \cdot \frac{e_1}{s_2}\right) B_1 l_2' s_2 - \frac{1}{\varkappa_2'} B_1 l_2' s_2 = -EJ_{\omega(0)} \theta'_{B(1)}.$$

Выражение в скобках по формуле (61) равно $\varkappa_2$. Сделав эту подстановку и принимая во внимание формулы (43), будем иметь

$$B_1 \left(\varkappa_2 - \frac{1}{\varkappa_2'}\right) l_2 s_2 \frac{J_{\omega(1)}}{J_{\omega(2)}} = -EJ_{\omega(1)} \theta'_{B(1)},$$

откуда

$$B_1 = -\frac{EJ_{\omega(1)} \theta'_{B(1)} \varkappa_2'}{(\varkappa_2 \varkappa_2' - 1) l_2 s_2} \cdot \frac{J_{\omega(2)}}{J_{\omega(1)}}, \tag{68}$$

где $\theta'_{B(1)}$ — депланация опорного сечения консоли, закрепленной только против закручивания, от загружения ее закручивающей пролетной нагрузкой. Эту депланацию следует определять по соответствующим формулам приложения 7.

Значки 1 в правой части формулы (68) относятся к консоли, а значки 2 — к примыкающему к ней пролету балки.

§ 15. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННОЙ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ НА КРУЧЕНИЕ ПО МЕТОДУ БИМОМЕНТНЫХ ФОКУСОВ

Пример 10. Определить опорные бимоменты балки примера 9 (см. § 12 и рис. 186,*а*).

Вычисляем левые и правые бимоментные фокусные отношения:

по формуле (60)

$$\varkappa_1 = \frac{r_1}{s_1} = \frac{0{,}14}{0{,}0276} = 5{,}07;$$

по формуле (58)

$$\varkappa_2 = \frac{r_2}{s_2} + \frac{l_1}{l_2}\left(\frac{r_1}{s_2} - \frac{s_1}{s_2}\,\frac{1}{\varkappa_1}\right) = \frac{0,175}{0,046} + \frac{8}{6}\left(\frac{0,14}{0,046} - \frac{0,0276}{0,046}\cdot\frac{1}{5,07}\right) =$$

$$= 3,8 + 1,33(3,04 - 0,12) = 3,8 + 3,88 = 7,68;$$

по формуле (61)

$$\varkappa_2' = \frac{r_2}{s_2} + \frac{l_3}{l_2}\cdot\frac{e_3}{s_2} = \frac{0,175}{0,046} + \frac{2}{6}\cdot\frac{0,749}{0,046} = 3,8 + 5,43 = 9,23;$$

по формуле (58′)

$$\varkappa_1' = \frac{r_1}{s_1} + \frac{l_2}{l_1}\left(\frac{r_2}{s_1} - \frac{s_2}{s_1}\cdot\frac{1}{\varkappa_2'}\right) = \frac{0,14}{0,0276} + \frac{6}{8}\left(\frac{0,175}{0,0276} -\right.$$

$$\left. - \frac{0,046}{0,0276}\cdot\frac{1}{9,23}\right) = 5,07 + 0,75(6,34 - 0,18) = 5,07 + 4,62 = 9,69.$$

Опорные бимоменты

а) От загружения пролета 1 — по формулам (67) и (66):

$$B_0 = -\frac{\dfrac{R_1^{\text{ф.лев}}}{l_1 s_1}\varkappa_1' - \dfrac{R_1^{\text{ф.прав}}}{l_1 s_1}}{\varkappa_1\varkappa_1' - 1} = -\frac{\dfrac{483}{8\cdot 0,0276}(9,69-1)}{5,07\cdot 9,69 - 1} =$$

$$= -\frac{19\,000}{48,2} = -394,2\ \textit{кгм}^2;$$

$$B_1 = -\frac{\dfrac{R_1^{\text{ф.прав}}}{l_1 s_1}\varkappa_1 - \dfrac{R_1^{\text{ф.лев}}}{l_1 s_1}}{\varkappa_1\varkappa_1' - 1} = -\frac{\dfrac{483}{8\cdot 0,0276}(5,07-1)}{5,07\cdot 9,69 - 1} =$$

$$= -\frac{8\,930}{48,2} = -185,3\ \textit{кгм}^2;$$

по формуле (56)

$$B_2 = -\frac{B_1}{\varkappa_2'} = \frac{185,3}{9,23} = 20,1\ \textit{кгм}^2.$$

б) От загружения пролета 2 — по формулам (67) и (66):

$$B_1 = -\frac{\dfrac{R_2^{\text{ф.лев}}}{l_2 s_2}\varkappa_2' - \dfrac{R_2^{\text{ф.прав}}}{l_2 s_2}}{\varkappa_2\varkappa_2' - 1} = -\frac{\dfrac{231}{6\cdot 0,046}(9,23-1)}{7,68\cdot 9,23 - 1} =$$

$$= -\frac{6\,890}{70} = -98,5\ \textit{кгм}^2;$$

$$B_2 = -\frac{\frac{R_2^{\text{ф.прав}}}{l_2 s_2}\varkappa_2 - \frac{R_2^{\text{ф.лев}}}{l_2 s_2}}{\varkappa_2 \varkappa_2' - 1} = -\frac{\frac{231}{6 \cdot 0{,}046}(7{,}68-1)}{7{,}68 \cdot 9{,}23 - 1} =$$

$$= -\frac{5\,600}{70} = -80 \text{ кгм}^2;$$

по формуле (53)

$$B_0 = -\frac{B_1}{\varkappa_1} = \frac{98{,}5}{5{,}07} = 19{,}4 \text{ кгм}^2.$$

в) От загружения консоли — по формуле (6) из приложения 7

$$EJ_{\omega(3)}\theta'_{A(3)} = Bl_3 \frac{1}{kl_3 \operatorname{sh} kl_3} = 100 \cdot 2 \frac{1}{1{,}49 \cdot 2{,}106} = 63{,}7 \text{ кгм}^3;$$

по формуле (68)

$$B_2 = -\frac{EJ_{\omega(3)}\theta'_{A(3)}\varkappa_2}{(\varkappa_2 \varkappa_2' - 1)\, l_2 s_2} \quad 1 = -\frac{63{,}7 \cdot 7{,}68}{70 \cdot 6 \cdot 0{,}046} =$$

$$= -\frac{489}{19{,}3} = -25{,}4 \text{ кгм}^2;$$

по формуле (53)

$$B_1 = -\frac{B_2}{\varkappa_2} = \frac{25{,}4}{7{,}68} = 3{,}31 \text{ кгм}^2;$$

$$B_0 = -\frac{B_1}{\varkappa_1} = -\frac{3{,}31}{5{,}07} = -0{,}65 \text{ кгм}^2.$$

Окончательные значения опорных бимоментов:

$$B_0 = -394{,}2 + 19{,}4 - 0{,}65 = -375{,}5 \text{ кгм}^2$$
$$B_1 = -185{,}3 - 98{,}5 + 3{,}31 = -280{,}5 \quad \text{„}$$
$$B_2 = -\ 20{,}1 - 80 - 25{,}4 = -85{,}3 \quad \text{„}$$

§ 16. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК НА ПОВОРОТ ОПОР ВОКРУГ ОСИ БАЛКИ

Угловые перемещения опор вокруг линии центров изгиба вызывают в неразрезных балках внутренние усилия, заставляющие балку закручиваться.

Будем предполагать, что перемещения эти настолько малы, что возникающие напряжения не выходят за предел упругости.

В таком случае можно считать, что закон независимости действия сил остается справедливым, и мы можем рассчитывать отдельно действие от закручивающей нагрузки и отдельно действие от поворота опор, а затем результаты расчетов суммировать.

Первая задача нами уже рассмотрена в предыдущих параграфах настоящей главы, здесь же рассмотрим только расчет на поворот опор.

Пусть опоры неразрезной тонкостенной балки получили поворот вокруг линии центров изгиба на углы θ_0, θ_1, ..., θ_n ..., где индекс указывает на номер опоры.

В качестве основной системы, так же как и раньше, принимаем систему, состоящую из однопролетных балок с шарнирами по концам, допускающими депланацию, причем каждая балка, кроме

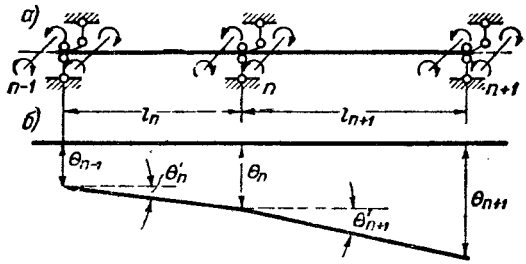


Рис. 192

того, лишена способности сопротивляться чистому кручению (рис. 192,*а*).

Тогда углы закручивания этой основной системы могут быть изображены графически ломаной линией с переломами на опорах (рис. 192,*б*), которые необходимо уничтожить опорными бимоментами $B_1, B_2 ..., B_{m-1}$.

Угол перелома γ_n на n-й опоре, возникающий в основной системе от поворота опор, равен разности углов (депланаций).

Из рис. 192,*б* видно, что

$$\gamma_n = \theta'_{n+1} - \theta'_n = \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{l_{n+1}} - \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{l_n}. \qquad (69)$$

Угол перелома (депланация), вызванный опорными бимоментами, как мы получили раньше [см. левую часть формулы (45)], равен

$$\frac{1}{EJ_{\omega(0)}} \left[B_{n-1}\, l'_n s_n + B_n (l'_n r_n + l'_{n+1} r_{n+1}) + B_{n+1}\, l'_{n+1} s_{n+1}\right]. \qquad (70)$$

Здесь множитель $\frac{1}{EJ_{\omega(0)}}$ введен потому, что при вычислении перемещений, являющихся множителями при неизвестных B_{n-1}, B_n и B_{n+1}, мы умножали их на произвольную величину секторнальной жесткости $EI_{\omega(0)}$.

В таком случае уравнение трех бимоментов, выражающее условие отсутствия угла перелома на опоре n, будет иметь следующий вид:

$$B_{n-1} l'_n s_n + B_n (l'_n r_n + l'_{n+1} r_{n+1}) + B_{n+1} l'_{n+1} s_{n+1} = \\ = -EJ_{\omega(0)} (\theta'_{n+1} - \theta'_n), \tag{71}$$

где разность $\theta'_{n+1} - \theta'_n$ в развернутом виде представлена формулой (69).

Заметим, что уравнение (71) отличается от уравнения (45) только в правой части, в которую входит модуль упругости E, показывающий, что при расчете балки на поворот опоры усилия в ней зависят от материала балки.

§ 17. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ НЕРАЗРЕЗНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОК

Если на какую-нибудь закрепленную на опорах от углов закручивания тонкостенную балку будет действовать закручивающий момент $m=1$, приложенный в произвольном сечении n-го пролета этой балки на расстоянии a и b от левой и правой опор (рис. 193), то так называемые перекрестные отрезки $S_n^{\text{прав}}$ и $S_n^{\text{лев}}$ по формуле (66) будут равны

$$S_n^{\text{прав}} = \frac{R_n^{\text{ф.лев}}}{l_n s_n} \text{ и } S_n^{\text{лев}} = \frac{R_n^{\text{ф.прав}}}{l_n s_n}. \tag{66}$$

Подставляя в формулу (66) значения $R_n^{\text{ф.лев}}$ и $R_n^{\text{ф.прав}}$ из формулы табл. 43 и значения s из формулы (32), получим

$$S_n^{\text{прав}} = \frac{\frac{b}{l} \operatorname{sh} kl - \operatorname{sh} kb}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl} \cdot \frac{l}{s_n} = \frac{b \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl - kl}; \tag{72}$$

$$S_n^{\text{лев}} = \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} kl - \operatorname{sh} ka}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl} \cdot \frac{l}{s_n} = \frac{a \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} ka}{\operatorname{sh} kl - kl}. \tag{73}$$

Зная перекрестные отрезки $S_n^{\text{прав}}$ и $S_n^{\text{лев}}$, нетрудно по формуле (67) получить выражения для опорных изгибно-крутящих бимоментов рассматриваемого пролета

$$B_{n-1} = -\frac{S_n^{\text{прав}} \varkappa'_n - S_n^{\text{лев}}}{\varkappa_n \varkappa'_n - 1} \text{ и } B_n = -\frac{S_n^{\text{лев}} \varkappa_n - S_n^{\text{прав}}}{\varkappa_n \varkappa'_n - 1}, \tag{67}$$

а именно:

$$B_{n-1} = -\frac{1}{(\varkappa_n \varkappa'_n - 1)(\operatorname{sh} kl - kl)} \left[(b \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} kb) \varkappa'_n - \\ - (a \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} ka) \right]; \tag{74}$$

$$B_n = -\frac{1}{(\varkappa_n \varkappa_n' - 1)(\operatorname{sh} kl - kl)}[(a \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} ka)\varkappa_n - (b \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} kb)]. \quad (75)$$

Используя бимоментные фокусные отношения, можно вычислить значения опорных изгибно-крутящих бимоментов рассматриваемой неразрезной балки при положении закручивающего момента $m=1$ в любом сечении любого пролета балки и, следовательно, можно построить линии влияния B_{n-1} и B_n.

Если закручивающая нагрузка расположена в $(n+1)$-м пролете, а требуется определить бимомент B_{n-1}, то следует воспользоваться следующей формулой:

$$B_{n-1} = \frac{B_n}{\varkappa_n}. \quad (76)$$

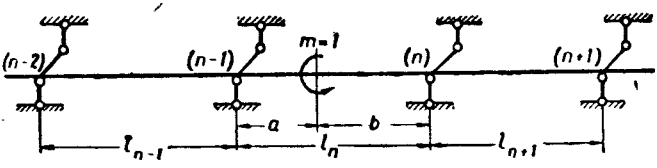


Рис. 193

При нахождении закручивающего момента в пролете $(n+2)$ изгибно-крутящий бимомент на опоре $(n+1)$ будет равен

$$B_{n-1} = B_{n+1} \varkappa_{n+1} \varkappa_n. \quad (77)$$

Если требуется построить линию влияния изгибно-крутящего бимомента в промежуточном сечении балки, то от закручивающего момента, расположенного в том же сечении, бимомент определяется по формуле (198) ч. I.

$$B_\omega = B_A \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} + B_B \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl} + B_p, \quad (78)$$

где B_p — бимомент в рассматриваемом сечении свободно опертой балки.

№ точек	a	b	ka	kb	$\operatorname{sh} ka$	$\operatorname{sh} kb$	$a \operatorname{sh} kl$	$l \operatorname{sh} ka$
2	160	640	1,19	4,76	1,49	58,44	$0{,}000306 \cdot 10^6$	$0{,}0000119 \cdot 10^6$
3	320	480	2,38	3,57	5,36	17,76	$0{,}000612 \cdot 10^6$	$0{,}0000427 \cdot 10^6$
4	480	320	3,57	2,38	17,76	5,36	$0{,}000918 \cdot 10^6$	$0{,}000142 \cdot 10^6$
5	640	160	4,76	1,19	58,44	1,49	$0{,}001224 \cdot 10^6$	$0{,}000465 \cdot 10^6$
6	800	0	5,94	0	190,2	0		

Формула (78) показывает, что линия влияния изгибно-крутящего бимомента в произвольном сечении произвольного пролета неразрезной балки состоит из трех линий влияния, а именно из линии влияния левого опорного бимомента загруженного пролета, умноженного на коэффициент $\frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl}$, из правого опорного бимомента того же пролета, умноженного на коэффициент $\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}$, и линии влияния бимомента от пролетной нагрузки свободно опертой балки.

Совершенно аналогично строятся и линии влияния изгибно-крутящих и крутящих моментов и опорных реактивных крутящих моментов.

Порядок построения линии влияния опорного изгибно-крутящего бимомента покажем на следующем примере.

Пример 11. Построить линию влияния изгибно-крутящего бимомента на опоре (1) для балки, изображенной на рис. 186,*а*.

Нагрузка в 1-м пролете:

$$\varkappa_1 \varkappa_1' - 1 = 5{,}07 \cdot 9{,}69 - 1 = 49{,}13 - 1 = 48{,}13;$$

$$k = 0{,}007427\ см^{-1};\ kl_1 = 5{,}94;\ \operatorname{sh} kl_1 = 190{,}2;$$

$$\operatorname{sh} kl_1 - kl_1 = 190{,}2 - 5{,}94 = 184{,}3;$$

$$\frac{1}{(\varkappa_1 \varkappa_1' - 1)(\operatorname{sh} kl - kl)} = \frac{1}{48{,}13 \cdot 184{,}3} = \frac{1}{8\,900} = 112 \cdot 10^{-6}.$$

Дальнейшие вычисления бимоментов по формуле (75) произведены в табл. 44.

Нагрузки во 2-м пролете:

$$\varkappa_2 \varkappa_2' - 1 = 7{,}68 \cdot 9{,}23 - 1 = 71 - 1 = 70;$$

$$k = 0{,}007427\ см^{-1};\ kl_2 = 4{,}46;\ \operatorname{sh} kl_2 = 43{,}29;$$

$$\operatorname{sh} kl_2 - kl_2 = 43{,}29 - 4{,}46 = 38{,}83;$$

$$\frac{1}{(\varkappa_2 \varkappa_2' - 1)(\operatorname{sh} kl_2 - kl_2)} = \frac{1}{70 \cdot 38{,}83} = \frac{1}{271{,}8} = 368 \cdot 10^{-6}.$$

Таблица 44

$b \operatorname{sh} kl$	$l \operatorname{sh} kb$	$(a \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} ka)\varkappa_1$	$b \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} kb$	$(a \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} ka) \times \varkappa_1 - (b \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} kb)$	B_1
$0{,}001224 \cdot 10^6$	$0{,}000465 \cdot 10^6$	$0{,}00149 \cdot 10^6$	$0{,}000759 \cdot 10^6$	$0{,}00073 \cdot 10^6$	0,0819
$0{,}000918 \cdot 10^6$	$0{,}000147 \cdot 10^6$	$0{,}00288 \cdot 10^6$	$0{,}000771 \cdot 10^6$	$0{,}00211 \cdot 10^6$	0,237
$0{,}000612 \cdot 10^6$	$0{,}00427 \cdot 10^6$	$0{,}00391 \cdot 10^6$	$0{,}000565 \cdot 10^6$	$0{,}00333 \cdot 10^6$	0,374
$0{,}000306 \cdot 10^6$	$0{,}00119 \cdot 10^6$	$0{,}00385 \cdot 10^6$	$0{,}000294 \cdot 10^6$	$0{,}00356 \cdot 10^6$	0,400

№ точек	a	b	ka	kb	sh ka	sh kb	d sh kl	l sh kb
7	120	480	0,89	3,56	1,012	17,59	$0{,}000208\cdot10^6$	$0{,}000106\cdot10^6$
8	240	360	1,78	2,67	2,883	7,193	$0{,}000156\cdot10^6$	$0{,}0000431\cdot10^6$
9	360	420	2,67	1,78	7,193	2,883	$0{,}000104\cdot10^6$	$0{,}0000173\cdot10^6$
10	480	120	3,56	0,89	17,59	1,012	$0{,}0000519\cdot10^6$	$0{,}0000061\cdot10^6$

Дальнейшие вычисления бимоментов по формуле (74) произведены в табл. 45.

Нагрузка на консоли

По формуле (68)

$$B_2 = -\frac{EJ_{\omega(3)}\,\theta'_{A(3)}\,\varkappa_2}{\left(\varkappa_2\varkappa_2'-1\right)l_2\,s_2},$$

где $EJ_{\omega(3)}\ \theta'_{A(3)}$ определяем по формуле (2) приложения 7 (при $z=0$).

$$EJ_{\omega(3)}\,\theta'_{A(3)} = EJ_{\omega(3)}\frac{1}{k^3\,EJ_{\omega(3)}}\left(k-\frac{\operatorname{sh}k\,(l-a)}{\operatorname{sh}kl}\,k\right)=\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{\operatorname{sh}k(l-a)}{\operatorname{sh}kl}\right),$$

где a — координата точки приложения закручивающего момента $m=1$

$$k = 0{,}007427\ см^{-1};\quad \frac{1}{k^2}=\frac{1}{0{,}007427^2}=1{,}82\ кгм^2;\quad s_2=0{,}046;$$

$$\operatorname{sh}kl = 2{,}08;\quad \frac{\varkappa_2}{\left(\varkappa_2\varkappa_2'-1\right)l_2\,s_2}=\frac{7{,}68}{70\cdot6\cdot0{,}046}=0{,}397\ м^{-1}.$$

Все дальнейшие вычисления бимоментов расположим в форме табл. 46. В последней графе этой таблицы по формуле (76) определен бимомент B_1.

Таблица 46

№ точек	a	$k\,(l-a)$	sh $k\,(l-a)$	$\left(1-\frac{\operatorname{sh}k\,(l-a)}{\operatorname{sh}kl}\right)$	$\frac{1}{k^2}\left[1-\frac{\operatorname{sh}k\,(l-a)}{\operatorname{sh}kl}\right]$	B_2	$B_1=\frac{B_2}{\varkappa_2}$
12	50	1,11	1,35	0,35	0,637	0,253	0,033
13	100	0,74	0,81	0,61	1,11	0,44	0,0572
14	150	0,37	0,38	0,82	1,49	0,592	0,077
15	200	0	0	1	1,82	0,723	0,094

Таблица 45

$a \operatorname{sh} kl$	$l \operatorname{sh} ka$	$(b \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} kb)\, x_2'$	$a \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} ka$	$(b \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} kb) \times x_2' - (a \operatorname{sh} kl - l \operatorname{sh} ka)$	B_1
$0{,}000052 \cdot 10^6$	$0{,}0000061 \cdot 10^6$	$0{,}00111 \cdot 10^6$	$0{,}000046 \cdot 10^6$	$0{,}00106 \cdot 10^6$	0,39
$0{,}000104 \cdot 10^6$	$0{,}0000173 \cdot 10^6$	$0{,}00104 \cdot 10^6$	$0{,}000087 \cdot 10^6$	$0{,}000953 \cdot 10^6$	0,351
$0{,}000156 \cdot 10^6$	$0{,}0000431 \cdot 10^6$	$0{,}00081 \cdot 10^6$	$0{,}000113 \cdot 10^6$	$0{,}000692 \cdot 10^6$	0,254
$0{,}000208 \cdot 10^6$	$0{,}0001055 \cdot 10^6$	$0{,}00043 \cdot 10^6$	$0{,}000103 \cdot 10^6$	$0{,}000322 \cdot 10^6$	0,118

Полученные результаты вычислений в табл. 44, 45 и 46 дали возможность построить линию влияния изгибно-крутящего опорного бимомента B_1, которая представлена на рис. 194.

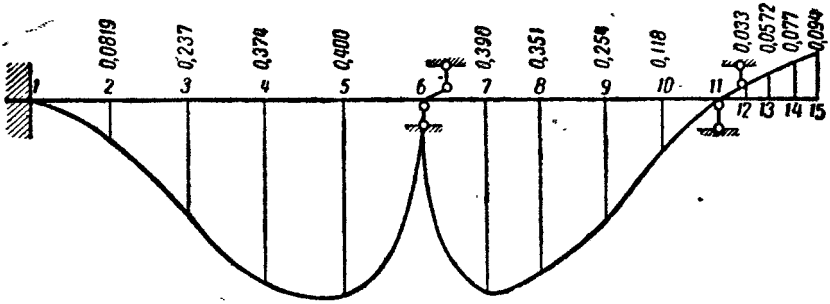


Рис. 194

Более подробно линии влияния изгибно-крутильных факторов неразрезных тонкостенных балок изложены в кандидатской диссертации доцента Александрова В. Г.[1].

§ 18. НЕРАЗРЕЗНАЯ ТОНКОСТЕННАЯ БАЛКА НА УПРУГО ВРАЩАЮЩИХСЯ ОПОРАХ

Упруго вращающимися опорами, как известно, называются такие опоры, угловые перемещения которых пропорциональны действующим на них усилиям. Таковыми опорами являются, например, колонны, к которым прикреплены неразрезные балки, продольные балки конструкций перекрытий и рабочих площадок промышленных зданий, на которые опираются неразрезные поперечные балки проезжей части мостов, и т. п.

[1] Александров В. Г. Линии влияния изгибно-крутильных факторов неразрезных тонкостенных балок. Сборник Ростовского-на-Дону инж.-стр. института № 2 «Вопросы строительной механики», 1953.

Александров В. Г. Расчет тонкостенных неразрывных балок на кручение при подвижной нагрузке. «Вестник инженеров и техников», № 4, 1953.

Будем считать, что опоры неразрезной балки шарнирные, допускающие поворот и депланацию опорных сечений, т. е. будем считать, что балка закреплена только от прогибов и закручивания.

В металлических конструкциях примером такого сопряжения может служить прикрепление стенки двухполочной неразрезной

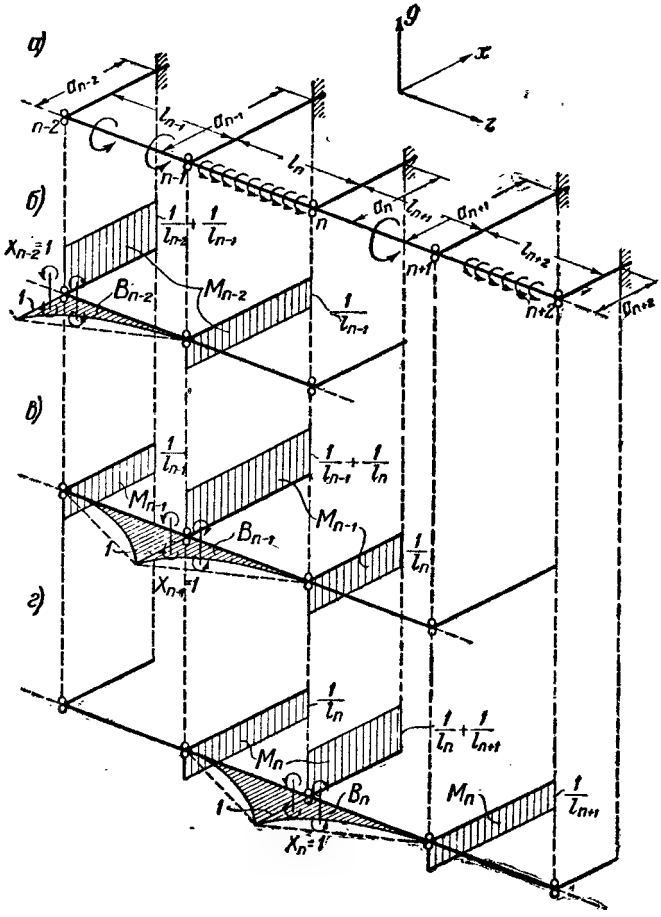


Рис. 195

балки к торцам стенок двутавровых опорных балок, осуществляемое при помощи парных уголков, при этом полки балок должны остаться неприкрепленными.

Угловые перемещения опор вокруг оси балки, вызванные единичным закручивающим моментом, или коэффициенты податливости опор, обозначим через φ и будем считать их известными. Размерность $\varphi - \frac{1}{кгсм}$.

Например, если опорой является защемленная на противоположном конце балка длиной a с моментом инерции из плоскости конструкции, равным J_x, то коэффициент податливости ее будет угол поворота на конце ее, вызванный закручивающим моментом $M=1$, т. е.

$$\varphi = \frac{1}{EJ_x} 1 \cdot a = \frac{a}{EJ_x}. \tag{79}$$

В качестве основной системы, как и для балок на жестких опорах, будем принимать балку, расчлененную на опорах на ряд однопролетных балок шарнирами, допускающими депланацию (рис. 195,*а*). Неизвестными при этом будут опорные изгибно-крутящие бимоменты.

Построим эпюры изгибно-крутящих бимоментов и изгибающих моментов в плоскости *yx*, вызванные единичными значениями этих неизвестных, и вычислим коэффициенты канонических уравнений. На рис. 195, *б, в, г* построены указанные эпюры только для неизвестных X_{n-2}, X_{n-1} и X_n.

Нетрудно понять, что перелом упругой линии углов закручивания на n-й опоре вызывается бимоментами B_{n-2}, B_{n-1}, B_n, B_{n+1} и B_{n+2} и внешней нагрузкой на пролетах l_{n-1}, l_n, l_{n+1} и l_{n+2}, так как любой из перечисленных силовых факторов вызывает в основной системе поворот по крайней мере одной из колонн $n-1$, n и $n+1$, а поворот последних вызывает взаимную депланацию опорных сечений, связанных шарниром на опоре n. Бимоменты же и нагрузки на опорах и пролетах, расположенных дальше от опоры n, не вызывают в этих балках усилий.

В таком случае каноническое уравнение для n-й опоры будет иметь следующий вид:

$$\delta_{n,n-2} B_{n-2} + \delta_{n,n-1} B_{n-1} + \delta_{nn} B_n + \delta_{n,n+1} B_{n+1} + \\ + \delta_{n,n+2} B_{n+2} + \Delta_{\text{пр}} = 0. \tag{80}$$

Уравнение (80) называется **уравнением пяти бимоментов**.

Перемещение $\delta_{n,\,n-2}$ зависит только от изгиба опорной балки $n-1$ и не зависит от бимоментов, так как эпюры B_{n-2} и B_n не имеют общих участков.

Следовательно:

$$\delta_{n,n-2} = \int_0^{a_{n-1}} \frac{M_{n-2} M_n}{EJ_{x\,(n-1)}} dz = \frac{1}{EJ_{x\,(n-1)}} \cdot \frac{1}{l_{n-1}} \cdot \frac{1}{l_n} a_{n-1} = \\ = \frac{a_{n-1}}{EJ_{x\,(n-1)}} \cdot \frac{1}{l_{n-1}\, l_n} = \frac{\varphi_{n-1}}{l_{n-1}\, l_n}.$$

Коэффициент $\delta_{n,n-1}$ определим, проинтегрировав произведения эпюр B_{n-1} и B_n и соответственно M_{n-1} и M_n.

Получим

$$\delta_{n,n-1}=\int_0^{l_n}\frac{B_{n-1}B_n}{EJ_{\omega(n)}}dz+\sum\int_0^{a}\frac{M_{n-1}M_n}{EJ_x}dz=\frac{1}{EJ_{\omega(n)}}l_n s_n-$$

$$-\frac{a_{n-1}}{EJ_{x(n-1)}}\left(\frac{1}{l_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\right)\frac{1}{l_n}-\frac{a_n}{EJ_{x(n)}}\cdot\frac{1}{l_n}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{l_n s_n}{EJ_{\omega(n)}}-\frac{\varphi_{n-1}}{l_n}\left(\frac{1}{l_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\right)-\frac{\varphi_n}{l_n}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right);$$

$$\delta_{nn}=\frac{l_n r_n}{EJ_{\omega(n)}}+\frac{l_{n+1}r_{n+1}}{EJ_{\omega(n+1)}}+\frac{\varphi_{n-1}}{l_n^2}+\varphi_n\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)^2+\frac{\varphi_{n+1}}{l_{n+1}^2}.$$

Коэффициенты $\delta_{n,n+1}$ и $\delta_{n,n+2}$ напишем по аналогии с коэффициентами $\delta_{n,n-1}$ и $\delta_{n,n-2}$:

$$\delta_{n,n+1}=\frac{l_{n+1}s_{n+1}}{EJ_{\omega(n+1)}}-\frac{\varphi_n}{l_{n+1}}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)-\frac{\varphi_{n-1}}{l_{n+1}}\left(\frac{1}{l_{n+1}}+\frac{1}{l_{n+2}}\right);$$

$$\delta_{n,n+2}=\frac{\varphi_{n+1}}{l_{n+1}\,l_{n+2}}.$$

Свободный член уравнения (80) выражается формулой

$$\Delta_{пр}=\sum\int\frac{B_n B_p}{EJ_\omega}dz+\sum\int\frac{M_n M_p}{EJ_x}dz=\frac{R_n^{ф.прав}}{EJ_{\omega(n)}}+\frac{R_{n+1}^{ф.лев}}{EJ_{\omega(n+1)}}+$$

$$+\frac{\varphi_{n-1}K_{n-1}}{l_n}-\varphi_n K_n\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)+\frac{\varphi_{n+1}K_{n+1}}{l_{n+1}},$$

где K_{n-1}, K_n и K_{n+1} — реактивные крутящие моменты на опорах $n-1$, n и $n+1$, вызываемые в основной системе внешней нагрузкой; $R_n^{ф.прав}$ и $R_n^{ф.лев}$ — фиктивные реакции опоры n в n-м и $n+1$-м пролетах.

Если балка по всей длине имеет одинаковое сечение и равные пролеты, а все опоры — постоянный коэффициент податливости φ, то уравнение пяти бимоментов будет иметь следующий вид

$$B_{n-2}\frac{\varphi}{l^2}+B_{n-1}\left(\frac{ls}{EJ_\omega}-\frac{4\varphi}{l^2}\right)+2B_n\left(\frac{lr}{EJ_\omega}+\frac{3\varphi}{l^2}\right)+$$

$$+B_{n+1}\left(\frac{ls}{EJ_\omega}-\frac{4\varphi}{l^2}\right)+B_{n+2}\frac{\varphi}{l^2}=-\frac{R_n^{ф.прав}+R_n^{ф.лев}}{EJ_\omega}-$$

$$-\frac{\varphi}{l}(K_{n-1}-2K_n+K_{n+1}). \qquad (81)$$

Угол закручивания на n-й опоре неразрезной балки в общем случае при различных пролетах и различных коэффициентах податливости опор будет равен [см. формулу (47)]

$$\theta_n = \varphi_n K_n = \varphi_n \left(K_n^0 + \frac{B_{n+1} - B_n}{l_{n+1}} + \frac{B_{n-1} - B_n}{l_n} \right), \qquad (82)$$

где K_n — опорный реактивный крутящий момент, вызванный опорными бимоментами и пролетной нагрузкой на n-й опоре;

K_n^0 — то же, только от пролетной нагрузки.

Если коэффициенты податливости φ всех опор будут равны нулю, то балка превращается в неразрезную балку на жестких опорах, а уравнение пяти бимоментов — в уравнение трех бимоментов.

Если же балка будет расположена в упругой среде, подчиняющейся закону пропорциональности между местным давлением и местным угловым вокруг оси балки смещением, то такую среду можно рассматривать как совокупность бесконечного множества не связанных друг с другом упругих опорных закреплений против закручивания, отстоящих друг от друга на бесконечно малом расстоянии dz. Так как жесткость таких бесконечно тонких опорных стерженьков будет равна нулю, то по формуле (79) коэффициент податливости отдельного опорного закрепления $\varphi = \infty$.

Податливость среды поэтому характеризуется величиной $\varphi\, dz$, т. е. углом поворота среды под влиянием равномерно распределенных моментов интенсивности, равной единице.

Для этого случая в формуле (82) можно положить $l_n = l_{n+1} = dz$, $K_n^0 = m dz$, где m — интенсивность закручивающих моментов на опоре n.

Полагая, кроме того, $\frac{1}{\varphi_n\, dz} = k_\theta$,

где k_θ — коэффициент упругости среды, измеряемой в *кг*, получим

$$\theta = \frac{1}{k_\theta\, dz} \left(m dz + \frac{B_{n-1} - 2B_n + B_{n+1}}{dz} \right).$$

При любых пролетах

$$B_{n-1} - 2B_n + B_{n+1} = \Delta^2 B,$$

где $\Delta^2 B$ — так называемая разность 2-го порядка, которая при бесконечно малых пролетах переходит в дифференциал 2-го порядка.

Таким образом, будем иметь

$$\theta = \frac{1}{k_\theta} \cdot \frac{d^2 B}{dz^2} + \frac{1}{k_\theta} m. \qquad (83)$$

Подставляя в формулу (83) вместо B значение так называемого общего крутящего бимомента, равного сумме изгибно-крутящего и крутящего бимоментов:

$$B = B_{\omega} + B_{кр} = -EJ_{\omega}\theta'' + GJ_d\theta, \tag{84}$$

получим

$$\theta = \frac{1}{k_\theta} \cdot \frac{d^2}{dz^2}(-EJ_{\omega}\theta''' + GJ_d\theta) + \frac{1}{k_\theta} m,$$

или

$$EJ_{\omega}\theta^{IV} - GJ_d\theta'' + k_\theta\theta - m = 0. \tag{85}$$

Уравнение (85) является дифференциальным уравнением упругой линии углов закручивания тонкостенной балки, находящейся в упругой среде[1].

Заметим, что при выводе этого уравнения в формулу угла закручивания мы подставили значение общего крутящего бимомента, определяемого формулой (84), а не изгибно-крутящего, выражаемого первым слагаемым этой формулы, так как при отсутствии опор в балке в упругой среде второе слагаемое формулы общего крутящего бимомента не обращается в нуль.

Что же касается неразрезных балок на опорах, то при определении опорных бимоментов в них, строго говоря, следовало бы пользоваться также формулой общего, а не изгибно-крутящего бимомента, но этого мы не делаем, так как общий опорный бимомент на любой шарнирной или защемленной от депланаций опоре равен изгибно-крутящему бимоменту, поскольку на опоре $\theta = 0$, а следовательно, и $GJ_d\theta = 0$.

ГЛАВА IV

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МЕТОДОМ СИЛ

§ 19. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫБОР ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ

Состоящую из тонкостенных элементов рамную систему будем называть плоской, если она удовлетворяет следующим условиям.

а) Проходящие через центры тяжести сечений стержней продольные оси, а также одна из главных осей всех поперечных сечений лежат в одной плоскости.

б) Продольные оси, проходящие через центры изгиба всех стержней рамы, также лежат в одной плоскости, которую будем называть плоскостью тонкостенной рамы.

[1] Это же уравнение, но выведенное другим способом, имеется в работе В. З. Власова «Тонкостенные упругие стержни», Стройиздат, 1940, стр. 236.

в) В узлах рамы депланация θ' концов всех сходящихся стержней одинакова; для этого необходимо, чтобы продольные линии, проходящие через секториальные нулевые точки соответствующих элементов контура всех стержней узла, сходились в одной точке и чтобы производные секториальных координат ω' (углы наклона эпюры ω) для соответствующих элементов контура были равны между собой.

г) Опоры рамы устроены так, что от нагрузки, действующей в плоскости рамы, все усилия и деформации получаются параллельными плоскости рамы.

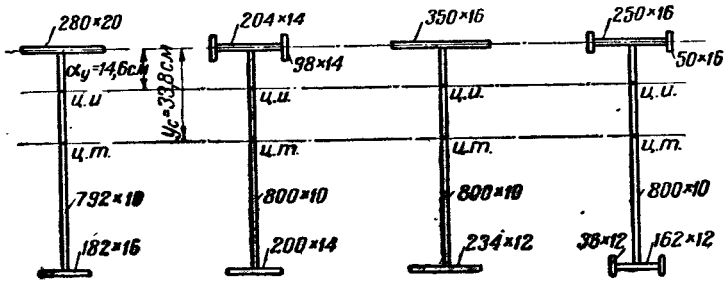


Рис. 196

На рис. 196 изображены четыре различных поперечных сечения металлических стержней, у которых размеры элементов подобраны так, что в образованной из этих стержней раме узлы будут удовлетворять перечисленным в пунктах «а», «б» и «в» условиям.

Простейшие рамы, элементы которых работают на кручение, а именно рамы под балконы, эркеры, под механизмы и машины, а также вагонные рамы, как правило, удовлетворяют требованиям, предъявляемым к плоским рамам.

Методом сил для расчета плоских тонкостенных систем мы уже пользовались в главе III при выводе уравнений трех и пяти бимоментов для расчета неразрезных балок на кручение и там встретились с некоторыми особенностями, обычно не имеющими места в элементарном курсе строительной механики. В частности, это относится к крайнему пролету неразрезной балки с консолью. При расчете неразрезных балок на изгиб наличие консоли, как известно, ничего нового в уравнение трех изгибающих моментов не вносит, так как в нетонкостенных стержнях усилия, возникающие в консоли, являются величинами статически определимыми и не зависят от опорных моментов балки.

Наличие же консоли в неразрезной тонкостенной балке, работающей на кручение, заставило нас прибегнуть к составлению уравнения неразрывности депланаций на крайней опоре с консолью, что привело к уравнению (51) главы III, по форме несколько отличающемуся от обычного уравнения трех бимоментов для промежуточных опор.

Кроме того, для консоли в основной системе, на одном конце закрепленной против закручивания и свободной для депланаций, а на другом конце совершенно свободной, при определении изгибно-крутильных перемещений, как было сказано выше, нельзя пользоваться табл. 42 интегралов $\int B_k B_i dz$, так как эта таблица составлена в предположении, что соответствующие стержни в основной системе не могут сопротивляться чистому кручению. Этого нельзя предположить в отношении рассматриваемой консоли, так как при лишении ее способности сопротивляться чистому кручению она станет геометрически изменяемой, что для основной системы, как правило, является недопустимым.

Указанные замечания необходимо иметь в виду при выборе основной системы для расчета тонкостенных рам на кручение методом сил.

При выборе основной системы, так же как и при расчете рам из нетонкостенных элементов, следует прежде всего наметить несколько возможных вариантов, проверить их с точки зрения геометрической неизменяемости и выбрать наилучший из них. Наиболее удачной основной системой, как известно, считается такая, при которой наибольшее количество побочных коэффициентов канонических уравнений обращается в нуль.

Каждое сечение тонкостенного стержня с недеформирующимся контуром, находящегося в условиях пространственной работы, обладает семью степенями свободы: тремя — в плоскости и четырьмя — из плоскости сечения, так как возможны три линейных перемещения вдоль осей координат, три угла поворота относительно тех же осей и, наконец, седьмое перемещение — депланация сечения по секториальному закону.

Поэтому при разрезе такого стержня действие одной части на другую в общем случае следует заменять семью силовыми факторами, соответствующими перечисленным семи компонентам перемещения: продольной силой N, проекциями поперечной силы на оси x и y — Q_x и Q_y, общим крутящим моментом L, изгибающими моментами M_x и M_y и, наконец, бимоментом B.

Поскольку в данной работе мы рассматриваем расчет тонкостенных балок и рам, как правило, только на кручение, то нас будут интересовать только те из перечисленных компонентов сил, которые могут вызвать изгибно-крутильные силовые факторы в стержнях, а таковыми являются Q_y, M_x, L и B (Q_y и M_x входят потому, что при изгибе какого-нибудь стержня из плоскости рамы другие стержни системы, примыкающие к нему под углом, будут закручиваться).

Усилия же Q_x и M_y, действующие в плоскости рамы, а также продольная сила N (которую мы выше условились при приведении сил считать приложенной по линии, проходящей через главную секториальную точку сечения) кручения стержней плоской рамы вызывать не будут.

Таким образом, в каждом разрезе стержня основной системы при расчете тонкостенной рамы только на кручение в общем случае будут действовать четыре неизвестных компонента сил.

Отметим еще одну особенность основной системы для расчета тонкостенных рам на кручение по методу сил.

Рассмотрим многопролетную в двух направлениях плоскую раму, часть которой изображена на рис. 197,*а*. Пусть опоры этой рамы защемлены против изгиба из плоскости рамы и депланаций. Наличие же или отсутствие защемления в плоскости рамы по указанным выше причинам здесь нас интересовать не будет. Для выбора основной системы сделаем разрезы во всех стержнях, параллельных линии, соединяющей опоры (рис. 197, *б*). Мы получим таким образом совокупность консолей, которая при расчете рамы на изгиб может быть принята в качестве основной статически определимой системы. При расчете же на кручение такую систему можно принять за основную лишь в том случае, если мы будем иметь готовые формулы бимоментов для различных случаев загружения подобных сложных консолей, в противном случае необходимо освобождаться еще от некоторых связей путем включения шарниров для возможности депланации. Указанные шарниры проще всего поставить в местах примыкания выступающих элементов консолей к основному стержню, так как мы имеем готовые формулы изгибно-крутильных кинематических и силовых факторов в консоли, шарнирно опертой на одном конце. Они даны в приложениях 7 и 8. Кроме того, в табл. 47 даны формулы для интегралов, необходимые для определения перемещений в подобных консолях. Формулы для тех же факторов в стержне, защемленном против закручивания и депланаций на одном конце и свободном на другом и загруженном сосредоточенным бимоментом, приложенным в произвольном сечении по длине, также нетрудно получить, пользуясь формулами (9) из приложения 7.

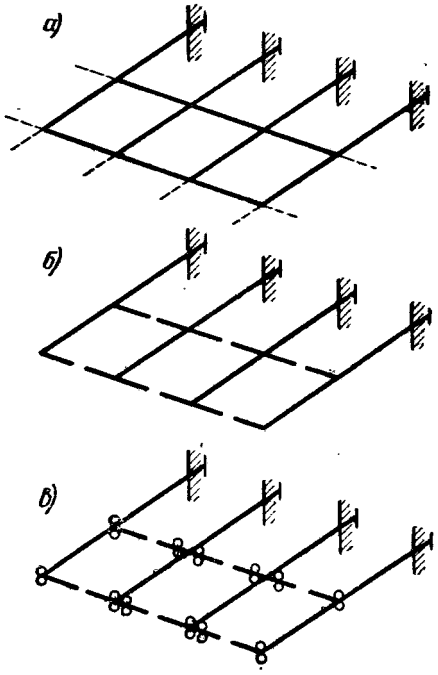


Рис. 197

Таким образом, в качестве основной системы для рамы, изображенной на рис. 197, *а*, при расчете ее на кручение по методу сил

Таблица 47

Формулы для интегралов $\int\limits_0^l \frac{B_k B_i}{EJ_\omega}\,dz + \int\limits_0^l \frac{M_k^{кр} M_i^{кр}}{GJ_d}\,dz$

Состояние k \ Состояние i	B, l	B, l	M, l
B, l	$\frac{B_k B_i l}{EJ_\omega} e$	$\frac{B_k B_i l}{EJ_\omega} q$	$\frac{B_k M_i l^2}{EJ_\omega} \varphi$
B, l	$\frac{B_k B_i l}{EJ_\omega} q$	$\frac{B_k B_i l}{EJ_\omega} e$	$\frac{B_k M_i l^2}{EJ_\omega} \varphi$
M, l	$\frac{M_k B_i l^2}{EJ_\omega} \varphi$	$\frac{M_k B_i l^2}{EJ_\omega} \varphi$	$\frac{M_k M_i l^3}{EJ_\omega} \varphi$
m, l	$\frac{m_k B_i l^3}{EJ_\omega} \Delta$	$\frac{m_k B_i l^3}{EJ_\omega} f\varphi$	$\frac{m_k M_i l^4}{2EJ_\omega} \varphi$

$e = \frac{1}{kl\,\mathrm{th}\,kl}$; $q = \frac{1}{kl\,\mathrm{sh}\,kl}$; $\varphi = \frac{1}{k^2 l^2}$; $\Delta = \frac{kl\,\mathrm{sh}\,kl - \mathrm{ch}\,kl + 1}{k^3 l^3\,\mathrm{sh}\,kl}$; $f = \frac{\mathrm{ch}\,kl - 1}{kl\,\mathrm{sh}\,kl}$.

Численные значения этих коэфициентов см. в приложении 11

можно принять систему, изображенную на рис. 197,*в*. Число неизвестных для определения бимоментов в этой раме, очевидно, будет равно 36.

Заметим, что для расчета тонкостенной рамы на кручение в качестве основной системы мы всегда будем иметь статически неопределимую систему с бесконечно большим количеством лишних неизвестных (не считая продольных надрезов по рис. 172, лишающих стержни способности сопротивляться чистому кручению), так как в каждом сечении тонкостенного стержня мы имеем одно лиш-

нее неизвестное, а именно бимомент, который в общем случае не может быть найден из уравнений статики.

Для упрощения расчета таких рам на кручение по методу сил следует при выборе основной системы расчленять заданную систему на возможно более укрупненные элементы разрезами и шарнирами для депланаций, что связано с необходимостью иметь готовые формулы изгибно-крутильных силовых факторов для этих элементов. Пока мы имеем только готовые формулы для однопролетных балок.

Далее мы приводим подобные формулы и для Г-образного консольного элемента.

Мы не останавливаемся здесь на указаниях о рациональном выборе основной системы потому, что все известные из курса строительной механики приемы целиком применимы и здесь. При назначении основной системы, конечно, возможно и необходимо использовать симметрию системы, если таковая имеет место, способ группировки неизвестных, введение упругих центров и т. п. Некоторые из этих приемов проиллюстрированы ниже на примерах.

Условимся в дальнейшем рассчитываемую плоскую раму изображать в горизонтальной плоскости, что уже было нами выполнено выше на рис. 197.

Правило построения эпюр бимоментов легко усвоить, если представить себе заданную раму, составленную из двухполочных профилей (двутавров, швеллеров и т. п.), расположенных вертикально, т. е. так, что верхние и нижние пояса элементов параллельны плоскости рамы. В таком случае, как было указано выше, от действия бимоментов верхний пояс стержня будет изгибаться в одну сторону, а нижний — в противоположную.

Если действующий в рассматриваемом сечении стержня бимомент изобразить в виде бипары с вертикально расположенным плечом, то она покажет, в какую сторону изгибается пояс.

При такой предпосылке условимся эпюру бимоментов чертить в плоскости рамы со стороны растянутого волокна верхнего пояса соответствующего стержня.

Эпюру же изгибающих моментов относительно оси x (при изгибе стержней рамы в вертикальной плоскости) будем изображать на том же чертеже, но перпендикулярно к плоскости рамы со стороны растянутых волокон верхнего или нижнего пояса.

Эпюры бимоментов будем штриховать частой штриховкой, а эпюры изгибающих моментов — редкой.

§ 20. Г-ОБРАЗНАЯ ТОНКОСТЕННАЯ КОНСОЛЬНАЯ РАМА

Пример 12. Пусть дана консольная Г-образная рама из тонкостенных элементов (рис. 198,*а*), на одном конце закрепленная против поворота из плоскости рамы, закручивания и депланаций, а на другом конце — свободная.

Определим изгибно-крутящие бимоменты, возникающие в элементах этой рамы от различных закручивающих нагрузок.

В качестве основной системы примем раму с шарниром для депланаций в единственном узле. Действие удаленных связей заменим бимоментом B и построим единичную эпюру бимоментов B_1 от действия $B=X_1=1$ (рис. 198,*б*). Эпюра сен-венановских крутящих моментов для определения коэффициентов канонического уравнения не понадобится и поэтому ее не строим. Для участка l_1

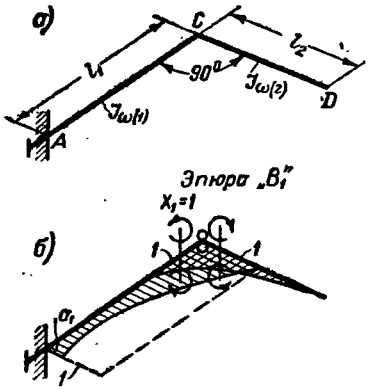


Рис. 198

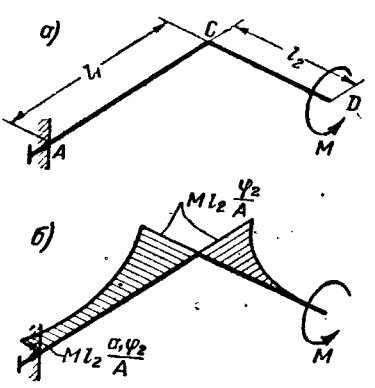


Рис. 199

соответствующее слагаемое коэффициента будем определять по формуле $\int B_k \; B_i \; dz$, где одна из эпюр B прямолинейная (рис. 198,*б* — пунктир), а значения $M_{кр}$ в эту формулу не входят. Для участка же l_2 по указанным в предыдущем параграфе соображениям при перемещении следует пользоваться общей формулой

$$\int_0^l \frac{B_k B_i}{EJ_\omega} dz + \int_0^l \frac{M_k^{кр} M_i^{кр}}{GJ_d} dz .$$

Однако при наличии табл. 47 для вычисления этих интегралов нет надобности строить эпюры B или $M_{кр}$.

Для упрощения дальнейших преобразований будем вычислять не δ_{ik}, а $EJ_{\omega(2)} \delta_{ik}$, где $J_{\omega(2)}$ — секториальный момент инерции стержня 2.

Тогда, пользуясь табл. 42 и 47 и формулами приложения 10, будем иметь

$$EJ_{\omega(2)} \delta_{11} = l_1 \frac{J_{\omega(2)}}{J_{\omega(1)}} [(a_1 + 1)(r_1 + s_1) + l_2 e_2] =$$

$$= l_1 \frac{J_{\omega(2)}}{J_{\omega(1)}} b_1 + l_2 e_2 = l_2 (e_2 + i_{2\omega} b_1) = l_2 A ,$$

где

$$A = e_2 + i_{2\omega} b_1, \tag{86}$$

а

$$i_{2\omega} = \frac{J_{\omega(2)} l_1}{J_{\omega(1)} l_2}. \tag{87}$$

1. На свободном конце действует закручивающий момент M (рис. 199,*а*).

Бимоменты в основной системе как на первом, так и на втором участках будут отсутствовать.

В таком случае по табл. 47 будем иметь

$$EJ_{\omega(2)} \delta_{1p} = Ml_2^2 \varphi_2.$$

Подставив значение найденных коэффициентов в уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1p} = 0, \tag{88}$$

получим

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = -Ml_2 \frac{\varphi_2}{A}.$$

Окончательные значения бимоментов в узле и на опоре будут следующие:

$$B_C = X_1 = -Ml_2 \frac{\varphi_2}{A};$$

$$B_A = X_1 a_1 = -Ml_2 \frac{a_1 \varphi_2}{A}.$$

Соответствующая эпюра бимоментов построена на рис. 199,*б*.

2. По всей длине участка l_2 действуют равномерно распределенные закручивающие моменты (рис. 200,*а*).

Построим эпюру B_p в основной системе (рис. 200,*б*). На участке l_1 бимоменты отсутствуют, так как действующая нагрузка только изгибает этот элемент, а на участке l_2 эпюра B имеет такой же вид, как в балке, шарнирно опертой по концам, так как выражается совершенно одинаковым уравнением [см. формулы (6) и (12) приложения 8].

По табл. 47 будем иметь

$$EJ_{\omega(2)} \delta_{1p} = ml_2^3 \Delta_2.$$

Подставив в уравнение (88), получим

$$X_1 = -ml_2^2 \frac{\Delta_2}{A}.$$

Тогда окончательные значения бимоментов в узле и на опоре будут следующие:

$$B_C = X_1 = -ml_2^2 \frac{\Delta_2}{A};$$

$$B_A = X_1 a_1 = -ml_2^2 \frac{a_1 \Delta_2}{A}.$$

Эпюра бимоментов построена на рис. 200,*в*.

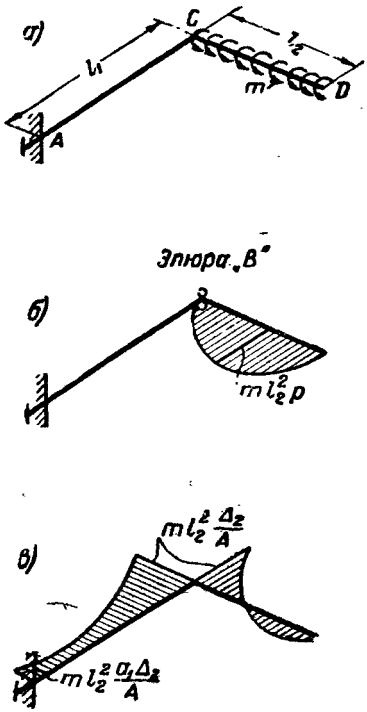


Рис. 200

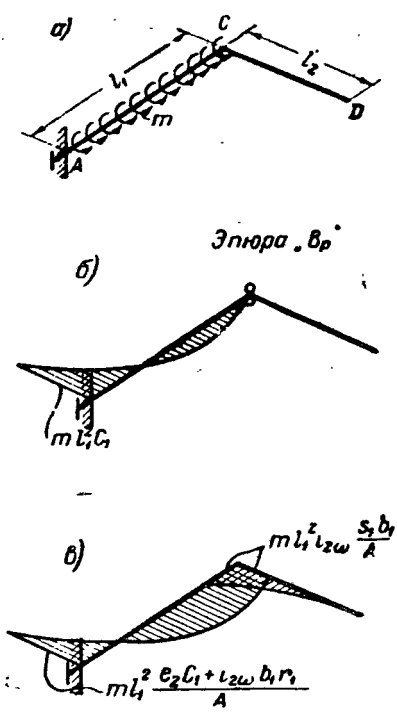


Рис. 201

3. По всей длине участка l_1 действуют равномерно распределенные закручивающие моменты (рис. 201,*а*).

Построим, пользуясь таблицей приложения 8, эпюру B_p в основной системе (рис. 201,*б*). На участке l_2 бимоменты, очевидно, будут равны нулю.

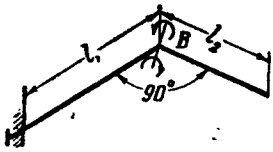
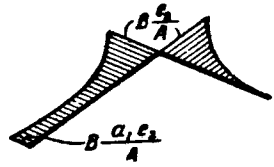
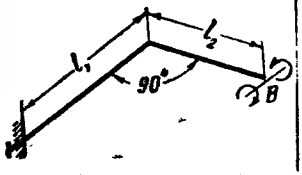
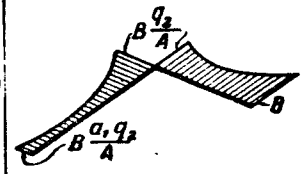
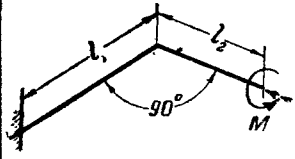
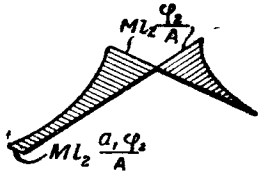
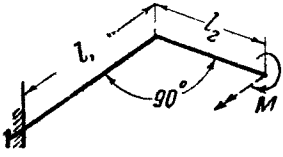
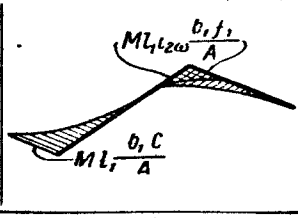
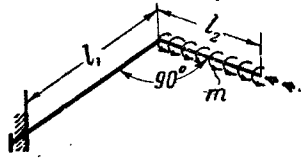
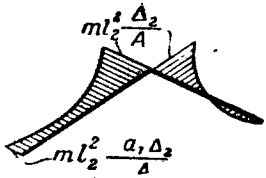
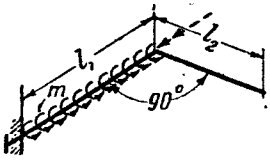
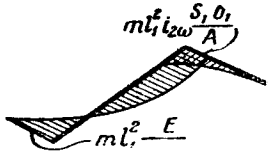
По табл. 42 и формулам приложения 10 будем иметь

$$EJ_{\omega(2)} \delta_{1p} = -ml_1^3 \frac{J_{\omega(2)}}{J_{\omega(1)}} [c_1 (r_1 + s_1) -$$

$$- t_1] = -ml_1^2 l_2 i_{2\omega} (c_1 f_1 - t_1) = -ml_1^2 l_2 i_{2\omega} s_1 b_1.$$

Таблица 48

Эпюры бимоментов в Г-образной консольной раме

Схема загружения	Эпюра B_ω	Принятые обозначения
		$i_{2\omega}=\frac{J_{\omega(2)}\,l_1}{J_{\omega(1)}\,l_2}$ $e=\frac{1}{kl\,\mathrm{th}\,kl}$
		$a=\frac{1}{\mathrm{ch}\,kl}$ $q=\frac{1}{kl\,\mathrm{sh}\,kl}$
		$\varphi=\frac{1}{k^2l^2}$ $b=\frac{\mathrm{th}\,kl}{kl}$ $f=\frac{\mathrm{th}\,kl-1}{kl\,\mathrm{sh}\,kl}$
		$\Delta=\frac{kl\,\mathrm{sh}\,kl-\mathrm{ch}\,kl+1}{k^3l^3\,\mathrm{sh}\,kl}$ $c=\frac{kl\,\mathrm{sh}\,kl-\mathrm{ch}\,kl+1}{k^2l^2\,\mathrm{ch}\,kl}$
		$s=\frac{\mathrm{sh}\,kl-kl}{k^2l^2\,\mathrm{sh}\,kl}$ $A=e_2+i_{2\omega}\,b_1$
		$C=e_2+i_{2\omega}\,f_1$ $E=e_2\,c_1+i_{2\omega}\,b_1\,r_1$

Подставив в уравнение (88), получим

$$X_1 = ml_1^2 i_{2\omega} \frac{s_1 b_1}{A}.$$

Тогда окончательные значения бимоментов в узле и на опоре будут равны

$$B_C = X_1 = ml_1^2 i_{2\omega} \frac{s_1 b_1}{A};$$

$$B_A = X_1 a_1 - ml_1^2 c_1 = ml_1^2 i_{2\omega} \frac{a_1 s_1 b_1}{A} -$$

$$- ml_1^2 c_1 = - \frac{ml_1^2}{A} (e_2 c_1 + i_{2\omega} b_1 c_1 - i_{2\omega} a_1 b_1 s_1) =$$

$$= \frac{ml_1^2}{A} (e_2 c_1 + i_{2\omega} b_1 r_1)$$

(см. формулы приложения 10).

Эпюра бимоментов построена на рис. 201,*в*.

Мы произвели расчет рассматриваемой рамы и на некоторые другие виды нагрузок; результаты этих расчетов представлены в форме табл. 48 и могут быть использованы при расчете более сложных систем.

§ 21. МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ Г-ОБРАЗНАЯ РАМА, ЗАЩЕМЛЕННАЯ ПО КОНЦАМ ПРОТИВ ИЗГИБА, ЗАКРУЧИВАНИЯ И ДЕПЛАНАЦИИ

Пример 13. Требуется построить эпюры изгибно-крутящих бимоментов B_ω и изгибающих моментов M_x.

Размеры и характер загружения указаны на рис. 202,*а*. Сечение — двутавр № 60а.

Разрежем заданную раму в узле и полученную таким образом совокупность двух консолей примем в качестве основной системы. Действие удаленных связей заменим четырьмя неизвестными обобщенными силами: двумя моментами вокруг осей 1-го и 2-го стержней X_1 и X_2 (они на чертеже для ясности изображены векторами с двумя стрелками на конце), поперечной силой из плоскости рамы X_3 и бимоментом X_4.

Эпюры бимоментов и изгибающих моментов от действия перечисленных обобщенных сил, равных единице, и от заданной нагрузки в основной системе представлены на рис. 202, *б, в, г, д, е*. Пунктиром изображены бимоменты в предельном состоянии при $k=0$ (в идеально тонкостенном стержне). Эпюр сен-венановских крутящих моментов не строим, так как они нам не понадобятся.

Выпишем из таблиц необходимые данные для расчета:

Для двутавра № 60а из сортамента

$$J_x = 83\,860 \text{ см}^4; \quad J_\omega = 1\,349\,900 \text{ см}^6;$$

$$k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}} = 0{,}007427\ см^{-1}; \qquad \frac{J_\omega}{J_x} = \frac{1\,349\,900}{83\,860} = 16{,}1 см^2;$$

$$kl_1 = 0{,}007427 \cdot 400 = 2{,}97; \quad kl_2 = 0{,}007427 \cdot 500 = 3{,}71.$$

По таблице приложения 11:

$r_1 = 0{,}225$; $s_1 = 0{,}0788$; $b_1 = 0{,}335$; $a_1 = 0{,}103$;
$f_1 = 0{,}304$; $r_2 = 0{,}198$; $s_2 = 0{,}0597$; $b_2 = 0{,}270$;
$a_2 = 0{,}0503$; $f_2 = 0{,}257$; $t_2 = 0{,}0355$; $c_2 = 0{,}201$.

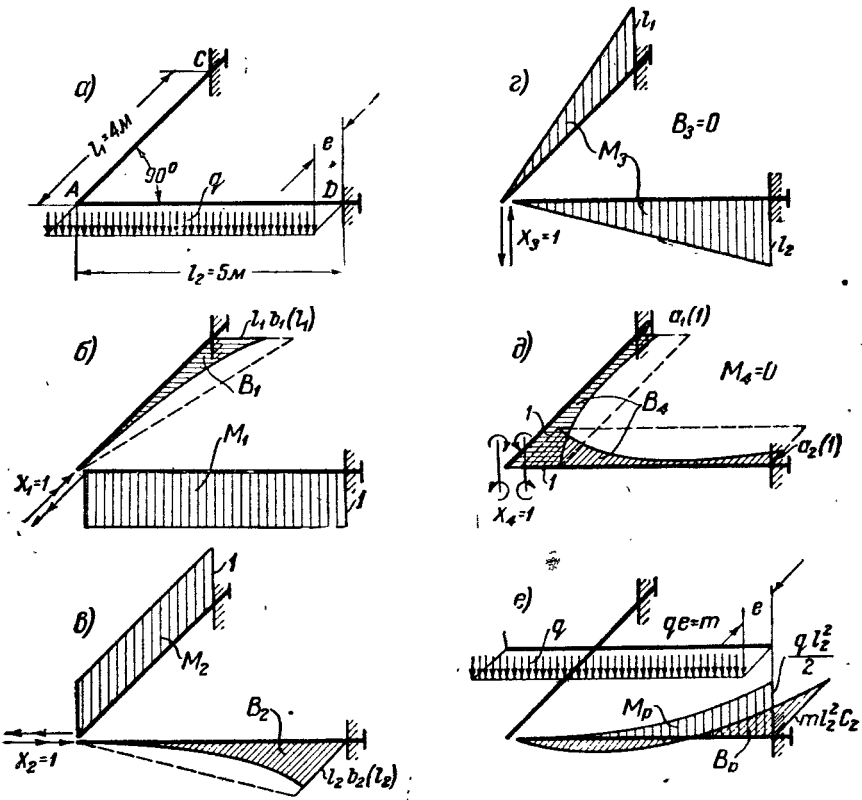


Рис. 202

Коэффициенты эти рекомендуется проверить по следующим формулам из приложения 10:

$$r + s = f; \quad f(a+1) = b; \quad as + r = c \text{ и } sb + t = fc.$$

Вычислим коэффициенты канонических уравнений:

$$EJ_\omega \delta_{11} = l_1^3 b_1 r_1 + \frac{J_\omega}{J_x} l_2 = 400^3 \cdot 0{,}335 \cdot 0{,}225 + 16{,}1 \cdot 500 =$$

$$= 4{,}82 \cdot 10^6 + 0{,}008 \cdot 10^6 = 4{,}83 \cdot 10^6;$$

$$EJ_\omega \delta_{12} = 0;$$

$$EJ_\omega \delta_{13} = \frac{J_\omega}{J_x} \cdot \frac{l_2^2}{2} = 16{,}1 \frac{500^2}{2} = 2{,}01 \cdot 10^6;$$

$$EJ_\omega \delta_{14} = l_1^2 b_1 (r_1 + s_1) = l_1^2 b_1 f_1 = 400^2 \cdot 0{,}335 \cdot 0{,}304 = 1{,}63 \cdot 10^4;$$

$$EJ_\omega \delta_{1p} = -\frac{J_\omega}{J_x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{q l_2^3}{2} = -1{,}61 \frac{500^3}{6} q = -335 \cdot 10^6 q;$$

$$EJ_\omega \delta_{22} = \frac{J_\omega}{J_x} l_1 + l_2^3 b_2 r_2 = 16{,}1 \cdot 400 + 500^3 \cdot 0{,}270 \cdot 0{,}198 =$$

$$= 0{,}0064 \cdot 10^6 + 6{,}68 \cdot 10^6 = 6{,}69 \cdot 10^6;$$

$$EJ_\omega \delta_{23} = \frac{J_\omega}{J_x} \cdot \frac{l_1^2}{2} = -16{,}1 \frac{400^2}{2} = 1{,}29 \cdot 10^6;$$

$$EJ_\omega \delta_{24} = -l_2^2 b_2 (r_2 + s_2) = -l_2^2 b_2 f_2 = -500^2 \cdot 0{,}270 \cdot 0{,}257 =$$

$$= -1{,}73 \cdot 10^4;$$

$$EJ_\omega \delta_{2p} = -m l_2^3 \left(l_2 c_2 r_2 - \frac{l_2}{2} t_2 \right) = -\frac{m l_2^4}{2} (2 c_2 r_2 - t_2) =$$

$$= -m \frac{500^4}{2} (2 \cdot 0{,}201 \cdot 0{,}198 - 0{,}0355) = -1380 \cdot 10^6 m;$$

$$EJ_\omega \delta_{33} = \frac{J_\omega}{J_x} \cdot \frac{l_1^3}{3} + \frac{J_\omega}{J_x} \cdot \frac{l_2^3}{3} = \frac{16{,}1}{3} (400^3 + 500^3) = 1014 \cdot 10^6;$$

$$EJ_\omega \delta_{34} = 0;$$

$$EJ_\omega \delta_{3p} = -\frac{J_\omega}{J_x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{q l_2^3}{2} \cdot \frac{3}{4} l_2 = -16{,}1 \cdot \frac{1}{8} \cdot 500^4 q =$$

$$= -126 \cdot 10^9 q;$$

$$EJ_\omega \delta_{44} = l_1 (a_1 + 1)(r_1 + s_1) + l_2 (a_2 + 1)(r_2 + s_2) =$$

$$= l_1 b_1 + l_2 b_2 = 400 \cdot 0{,}355 + 500 \cdot 0{,}270 = 269;$$

$$EJ_\omega \delta_{4p} = m l_2^3 [c_2 (r_2 + s_2) - t_2] = m l_2^3 b_2 s_2 =$$

$$= 500^3 \cdot 0{,}270 \cdot 0{,}0597 m = 2{,}01 \cdot 10^6 m.$$

Разделим все полученные коэффициенты и свободные члены на $EJ_\omega \cdot 10^4$ и подставим в канонические уравнения, которые будут иметь вид, представленный в табл. 49.

Решая эти уравнения, найдем следующие значения.

От нагрузки q (в *кг/см*)

$$X_1 = 31{,}7\ q\ \text{кгсм}; \quad X_2 = -34{,}6\ q\ \text{кгсм};$$

$$X_3 = 124\ q\ \text{кг} \quad \text{и} \quad X_4 = -4140 q\ \text{кгсм}^2;$$

Таблица 49

Система канонических уравнений

№ уравнения	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	
	X_1	X_2	X_3	X_4	от нагрузки q	от нагрузки m
1	483	0	201	1,63	$-335\cdot10^2q$	0
2	0	669	129	−1,73	0	$-138\cdot10^3m$
3	201	129	$101,4\cdot10^3$	0	$-126\cdot10^5q$	0
4	1,63	−1,73	0	0,0269	0	$201\ m$

От нагрузки m (в *кг*)

$$X_1 = -31,1m \text{ кгсм}; \quad X_2 = 230m \text{ кгсм};$$

$$X_3 = -0,231m \text{ кг и } X_4 = 9200m \text{ кгсм}^2.$$

Определяем окончательные бимоменты B и изгибающие моменты M_x в узле и на опорах рамы.

От нагрузки q (в *кг/см*)

$$B_C = -l_1 b_1 X_1 - a_1 X_4 = -400\cdot0,335\cdot31,7q + 0,103\cdot4140q =$$

$$= -4250q + 430q = -3820q \text{ кгсм}^2;$$

$$B_A = -X_4 = 4140q \text{ кгсм}^2;$$

$$B_D = l_2 b_2 X_2 - a_2 X_4 = -500\cdot0,270\cdot34,6q + 0,0503\cdot4140q =$$

$$= -4670q + 210q = -4460q \text{ кгсм}^2;$$

$$M_C = -1X_2 - l_3 X_3 = 34,6q - 400\cdot124q = -49\,600q \text{ кгсм};$$

$$M_{A(1)} = -1\cdot X_2 = 34,6q \text{ кгсм};$$

$$M_{A(2)} = 1\cdot X_1 = 31,7q \text{ кгсм};$$

$$M_D = 1\cdot X_1 + l_2 X_3 - \frac{ql_2^2}{2} = 31,7q + 500\cdot124q -$$

$$-\frac{500^2}{2}q = 31,7q + 62000q - 125000q = 63000q \text{ кгсм}.$$

Соответствующие эпюры B и $M_{изг}$ от нагрузки q построены на рис. 203.

От нагрузки m (в *кг*)

$$B_C = 400\cdot0,335\cdot31,1\,m - 0,103\cdot9200\,m = 4170\,m - 950\,m = 3220\,m \text{ кгсм}^2;$$

$$B_A = -9200m \text{ кгсм}^2;$$

$$B_D = 500\cdot0,270\cdot230\,m - 0,0503\cdot9200\,m - 500^2\cdot0,201\,m =$$

$$= 31050\,m - 462\,m - 50250\,m = -19700\,m \text{ кгсм}^2;$$

$$M_C = -230\,m + 400\cdot0,231\,m = -138\,m \text{ кгсм};$$

$$M_{A(1)} = -230\,m\ кгсм;$$

$$M_{A(2)} = -31{,}1\ кгсм;$$

$$M_D = -31{,}1\,m - 500 \cdot 0{,}231\,m = -147\,m\ кгсм.$$

Эпюры B и $M_{изг}$ от нагрузки m построены на рис. 204.

Для проверки правильности полученных окончательных значений B и $M_{изг}$ следует взаимно проинтегрировать окончатель-

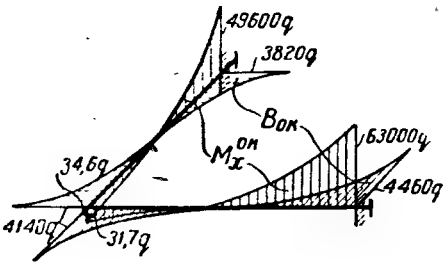


Рис. 203

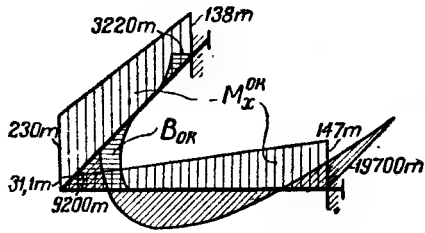


Рис. 204

ные эпюры их с соответствующими единичными эпюрами. Если указанные силовые факторы определены правильно, то результаты интегрирования окончательных эпюр их с любой из единичных эпюр должны равняться нулю.

В качестве иллюстрации проинтегрируем окончательную эпюру от закручивающих моментов m (рис. 204) с единичной эпюрой $X_4 = 1$ (рис. 204,*д*). Физический смысл этой проверки — неразрывность депланаций в узле $A(\theta'_{A(1)} = \theta'_{A(2)})$.

По табл. 42

$$EJ_\omega \delta_{4s} = \Sigma \int_0^l B_s B_4\, dz =$$

$$= l_1(9200\,m - 3220\,m)(r_1 + s_1) + l_2[(9200\,m + 19700\,m)(r_2 + s_2) - ml_2^2 t_2] =$$

$$= 400 \cdot 9\,200\,m \cdot 0{,}304 - 400 \cdot 3\,220\,m \cdot 0{,}304 + 500 \cdot 9\,200\,m \cdot 0{,}257 +$$

$$+ 500 \cdot 19\,700\,m \cdot 0{,}257 - 500^3\,m \cdot 0{,}0355 = 112 \cdot 10^4\,m - 39 \cdot 10^4\,m +$$

$$+ 118 \cdot 10^4\,m + 253 \cdot 10^4\,m - 444 \cdot 10^4\,m = 483 \cdot 10^4\,m - 483 \cdot 10^4\,m = 0.$$

Проинтегрируем еще окончательные эпюры B и $M_{изг}$ от нагрузки q (рис. 203) с единичной эпюрой $X_1 = 1$ (рис. 202,*б*). Физический смысл этой проверки — равенство угла закручивания стержня *1* углу поворота стержня *2* в узле $A(\theta_{A(1)} = \varphi_{A(2)})$.

Получим

$$EJ_\omega \delta_{1s} = \int_0^{l_1} B_s B_1 dz + \frac{J_\omega}{J_x} \int_0^{l_2} M_x^{изг} M_1^{изг} dz =$$

$$= l_1^2 (3\,820 q r_1 - 4\,140 q s_1) + \frac{J_\omega}{J_x} \left(\frac{31{,}7q - 63000q}{2} \; l_2 + \frac{2}{3} \frac{q l_2^3}{8} \right) =$$

$$= 400^2 \cdot 3\,820 q \cdot 0{,}225 - 400^2 \cdot 4\,140 q \cdot 0{,}0788 - 16{,}1 \cdot 31500 q \cdot 500 +$$

$$+ 16{,}1 \frac{500^3}{12} q = 137 \cdot 10^6 q - 52 \cdot 10^6 q - 253 \cdot 10^6 q + 168 \cdot 10^6 q =$$

$$= 305 \cdot 10^6 q - 305 \cdot 10^6 q = 0 .$$

§ 22. СИММЕТРИЧНАЯ ТОНКОСТЕННАЯ П-ОБРАЗНАЯ РАМА

Пример 14. При выборе основной системы для расчета симметричной рамы на кручение, так же как и при расчете ее на изгиб, следует использовать симметрию рамы путем введения этой симметрии в единичные эпюры и эпюры от заданной нагрузки. В таком случае, как известно, удается часть, а иногда и все побочные коэффициенты канонических уравнений обратить в нули, что влечет за собой распадение совместной системы уравнений на отдельные независимые системы, содержащие меньшее количество неизвестных, а иногда и на отдельные независимые уравнения. Внешнюю нагрузку при этом следует разбивать на симметричную и обратно симметричную и расчет на каждую из них производить отдельно. Тогда часть свободных членов уравнений также обратится в нуль.

Проиллюстрируем это на примере расчета симметричной П-образной рамы (рис. 205,*а*). Разрежем ее по оси симметрии и заменим действие удаленных связей четырьмя неизвестными силовыми факторами (считая, что расчет рамы на усилия, действующие в ее плоскости, производится независимо). Таким образом, в качестве основной системы мы принимаем совокупность двух Г-образных консолей, решения для которых в общем виде у нас имеются и представлены в табл. 48.

Эпюры бимоментов и изгибающих моментов от единичных значений неизвестных X_1, X_2, X_3 и X_4 изображены на рис. 205, *б*, *в*, *г*, *д*.

Моменты на этих фигурах для ясности изображены векторами с двумя стрелками на конце. Пунктиром изображены эпюры бимоментов в предельном состоянии (при $k=0$). Соответствующие же значения предельных бимоментов даны в скобках.

Как видим, эпюры B_1, B_2 и $M_{x(2)}$ симметричны относительно оси симметрии, а эпюры B_3, B_4, $M_{x(3)}$ и $M_{x(4)}$ — обратно симметричны; в таком случае, как известно, первые взаимно ортогональны со вторыми, т. е. результат взаимного интегрирования их равен нулю.

На этом основании можно написать $\delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{23} = \delta_{24} = 0$.

Тогда система канонических уравнений разобьется на две независимые системы следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2p} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{33} X_3 + \delta_{34} X_4 + \delta_{3p} = 0; \\ \delta_{43} X_3 + \delta_{44} X_4 + \delta_{4p} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

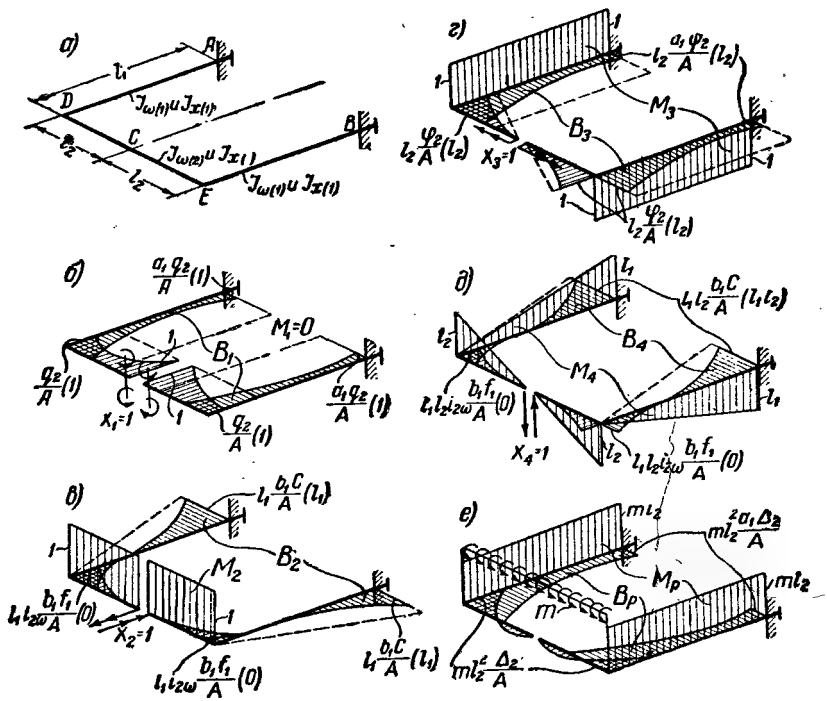


Рис. 205

Введем обозначения

$$i_{1\omega} = \frac{EJ_{\omega(1)}}{l_1} = 1; \quad i_{2\omega} = \frac{EJ_{\omega(2)}}{l_2};$$

$$i_{1x} = \frac{EJ_{x(1)}}{l_1}; \quad i_{2x} = \frac{EJ_{x(2)}}{l_2}.$$

Пользуясь табл. 42, найдем (преобразования коэффициентов произведены по формулам приложения 10: $r+s=f$):

$$f(a+1) = b \text{ и } ar + s = bf;$$

$$\delta_{11} = 2\frac{1}{i_{2\omega}}\left(\frac{q_2}{A}+1\right)(r_2+s_2) + 2\frac{q_2}{A}(a_1+1)(r_1+s_1) =$$

$$= \frac{2}{Ai_{2\omega}}\left[(q_2+A)f_2 \quad + i_{2\omega}q_2 b_1\right] = \frac{2e_2}{Ai_{2\omega}}(b_2+i_{2\omega}b_1);$$

$$\delta_{12} = -2\frac{q_2}{A}l_1(a_1r_1+s_1) = -\frac{2l_1}{A}q_2b_1f_1;$$

$$\delta_{22} = 2\frac{l_1b_1}{A}l_1(Cr_1 - i_{2\omega}f_1s_1) + \frac{2}{l_{2x}} =$$

$$= \frac{2}{Ai_{2x}}\left[l_1^2 i_{2x}b_1(C_1r_1 - i_{2\omega}f_1s_1) + A\right] =$$

$$= \frac{2}{Ai_{2x}}\left[l_1^2 i_{2x}\frac{b_1}{\lambda_1}(\mu_1e_2 + i_{2\omega}) + A\right]$$

[так как $C_1r_1 - i_{2\omega}f_1s_1 = e_2r_1 + i_{2\omega}f_1r_1 - i_{2\omega}f_1s_1 =$

$$= \frac{1}{\lambda_1}(\mu_1e_2 + i_{2\omega})\Big];$$

$$\delta_{33} = 2\frac{1}{i_{2\omega}}l_2\frac{\varphi_2}{A}l_2r_2 + 2\frac{l_2^2\varphi_2}{A}(1+a_1)(r_1+s_1) + 2\frac{1}{i_{1x}} =$$

$$= \frac{2}{Ai_{2\omega}i_{1x}}\left[l_2^2 i_{1x}\varphi_2(r_2+i_{2\omega}b_1) + Ai_{2\omega}\right];$$

$$\delta_{34} = -2\frac{l_2\varphi_2}{A}l_1l_2(a_1r_1+s_1) + \frac{l_1}{i_{1x}} = -\frac{l_1}{Ai_{1x}}(2l_2^2 i_{1x}\varphi_2 b_1f_1 - A);$$

$$\delta_{44} = 2l_1l_2\frac{b_1}{A}l_1l_2(Cr_1 - i_{2\omega}f_1s_1) + 2\frac{l_2}{i_{2x}2}\frac{2}{3}l_2 + 2\frac{l_1}{i_{1x}2}\frac{2}{3}l_1 =$$

$$= \frac{2l_2^2}{Ai_{1x}i_{2x}}\left[l_1^2 i_{1x}i_{2x}\frac{b_1}{\lambda_1}(\mu_1e_2+i_{2\omega}) + \frac{1}{3}A\left(i_{1x} + \frac{l_1^2}{l_2^2}i_{2x}\right)\right].$$

Рассчитаем заданную раму на симметричное загружение ее закручивающими моментами, равномерно распределенными по всей длине ригеля DE.

Эпюры B_p и $M_{x(p)}$ от этой нагрузки в основной системе представлены на рис. 205,*е* (см. табл. 48).

Свободные члены уравнений (89) имеют следующий вид:

$$\delta_{1p} = \frac{2}{i_{2\omega}}ml_2^2\left[\frac{\Delta_2}{A}(r_2+s_2) - t_2\right] + 2ml_2^2\frac{\Delta_2}{A}(1+a_1)(r_1+s_1) =$$

$$= \frac{2ml_2^2}{Ai_{2\omega}}(\Delta_2f_2 - At_2 + i_{2\omega}\Delta_2b_1) = \frac{2ml_2^2\varphi_2}{Ai_{2\omega}}(s_2 + i_{2\omega}f_2b_1);$$

$$\delta_{2p} = -2ml_2^2\frac{\Delta_2}{A}l_1(a_1r_1+s_1) = -\frac{2ml_2^2l_1}{A}\Delta_2b_1f_1.$$

Из уравнения (89) получаем

$$X_1 = \frac{\delta_{12}\delta_{2p} - \delta_{22}\delta_{1p}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}; \; X_2 = \frac{\delta_{12}\delta_{1p} - \delta_{11}\delta_{2p}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}. \tag{91}$$

Вычислим сначала знаменатель формул (91). [При дальнейших преобразованиях использованы следующие формулы приложения 10: $b(\mu - \alpha f) = 1$, $q = ae$, $\lambda f = \alpha$ и $qa + b = e$.]

$$\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2 = \frac{4e_2}{A^2 i_{2\omega} i_{2x}}(b_2 + i_{2\omega} b_1)\left[l_1^2 i_{2x} \frac{b_1}{\lambda_1}(\mu_1 e_2 + i_{2\omega}) + A\right] -$$

$$- \frac{4l_1^2}{A^2} q_2^2 b_1^2 f_1^2 = \frac{4e_2}{A^2 i_{2\omega} i_{2x} \lambda_1}\{ l_1^2 i_{2x}[(\alpha_1 f_1 b_1 e_2 + e_2 + i_{2\omega} b_1) \times$$

$$\times (b_2 + i_{2\omega} b_1) - q_2 a_2 b_1^2 f_1^2 \lambda_1 i_{2\omega}] + A\lambda_1 (b_2 + i_{2\omega} b_1)\} =$$

$$= \frac{4e_2}{A^2 i_{2\omega} i_{2x} \lambda_1}\Big\{ l_1^2 i_{2x} [A(b_2 + i_{2\omega} b_1) + \alpha_1 f_1 b_1 (e_2 b_2 + i_{2\omega} e_2 b_1 -$$

$$- i_{2\omega} b_1 q_2 a_2)] + A\lambda_1 (b_2 + i_{2\omega} b_1)\} =$$

$$= \frac{4e_2}{A^2 i_{2\omega} i_{2x} \lambda_1}\{ l_1^2 i_{2x} [A(b_2 + i_{2\omega} b_1) + \alpha_1 f_1 b_1 b_2 A] +$$

$$+ A\lambda_1 (b_2 + i_{2\omega} b_1)\} = \frac{4e_2}{A i_{2\omega} i_{2x} \lambda_1}[l_1^2 i_{2x} b_1 (\mu_1 b_2 + i_{2\omega}) +$$

$$+ \lambda_1 (b_2 + i_{2\omega} b_1)].$$

Переходим к вычислению числителей формул (91) [см. формулы приложения 10:

$$\varphi(fe - s) = q\Delta, \quad b(\mu - \alpha f) = 1, \quad \varphi = be, \quad q = ae, \quad \Delta = ce,$$

$$as + r = c \text{ и } b(r + qf) = \Delta];$$

$$\delta_{12}\delta_{2p} - \delta_{22}\delta_{1p} = \frac{4ml_2^2 l_1^2}{A^2} q_2 \Delta_2 b_1^2 f_1^2 -$$

$$- \frac{4ml_2^2 \varphi_2}{A^2 i_{2\omega} i_{2x} \lambda_1}[l_1^2 i_{2x} b_1 (\mu_1 e_2 + i_{2\omega}) + A\lambda_1] (s_2 + i_{2\omega} f_2 b_1) =$$

$$= - \frac{4ml_2^2 \varphi_2}{A^2 i_{2\omega} i_{2x} \lambda_1}\Big[l_1^2 i_{2x}\Big(- \frac{q_2 \Delta_2}{\varphi_2} b_1^2 f_1^2 \lambda_1 i_{2\omega} + \mu_1 b_1 e_2 s_2 +$$

$$+ \mu_1 b_1^2 e_2 f_2 i_{2\omega} + b_1 s_2 i_{2\omega} + b_1^2 f_2 i_{2\omega}^2\Big) + A\lambda_1 (s_2 + b_1 f_2 i_{2\omega})] =$$

$$= - \frac{4ml_2^2 \varphi_2}{A^2 i_{2\omega} i_{2x} \lambda_1}[l_1^2 i_{2x} (- f_2 e_2 b_1^2 \alpha_1 f_1 i_{2\omega} + s_2 b_1^2 \alpha_1 f_1 i_{2\omega} +$$

$$+ e_2 s_2 + a_1 b_1 f_1 e_2 s_2 + b_1 e_2 f_2 i_{2\omega} + a_1 b_1^2 f_1 e_2 f_2 i_{2\omega} +$$
$$+ b_1 s_2 i_{2\omega} + b_1^2 f_2 i_{2\omega}^2) + A\lambda_1 (s_2 + b_1 f_2 i_{2\omega})] =$$
$$= -\frac{4ml_2^2 \varphi_2}{A^2 i_{2\omega} i_{2x} \lambda_1} \{ l_1^2 i_{2x} [s_2 (1 + a_1 b_1 f_1) A +$$
$$+ b_1 f_2 i_{2\omega} A] + A\lambda_1 (s_2 + b_1 f_2 i_{2\omega})\} =$$
$$= \frac{4ml_2^2 \varphi_2}{A i_{2\omega} i_{2x} \lambda_1} [l_1^2 i_{2x} b_1 (\mu_1 s_2 + i_{2\omega} f_2) + \lambda_1 (s_2 + i_{2\omega} f_2 b_1)] ;$$

$$\delta_{12}\delta_{1p} - \delta_{11}\delta_{2p} = -\frac{4ml_2^2 l_1 \varphi_2}{A^2 i_{2\omega}} b_1 f_1 q_2 (s_2 + i_{2\omega} b_1 f_2) +$$
$$+ \frac{4ml_2^2 l_1 e_2}{A^2 i_{2\omega}} b_1 f_1 \Delta_2 (b_2 + i_{2\omega} b_1) =$$
$$= -\frac{4ml_2^2 l_1 e_2 b_1 f_1}{A^2 i_{2\omega}} (b_2 q_2 s_2 + b_2 q_2 f_2 b_1 i_{2\omega} - \Delta_2 b_2 - \Delta_2 b_1 i_{2\omega}) =$$
$$= -\frac{4ml_2^2 l_1}{A^2 i_{2\omega}} e_2 b_1 f_1 [b_2 e_2 (a_2 s_2 - c_2) + b_1 i_{2\omega} (b_2 q_2 f_2 - \Delta_2)] =$$
$$= -\frac{4ml_2^2 l_1}{A^2 i_{2\omega}} e_2 b_1 f_1 [-b_2 r_2 (e_2 + i_{2\omega} b_1)] =$$
$$= \frac{4ml_2^2 l_1}{A i_{2\omega}} \varphi_2 r_2 b_1 f_1 .$$

Подставив найденные величины в формулы (91), получим

$$X_1 = -ml_2^2 b_2 \frac{\lambda_1 (s_2 + i_{2\omega} f_2 b_1) + l_1^2 i_{2x} b_1 (\mu_1 s_2 + i_{2\omega} f_2)}{D}$$

и

$$X_2 = ml_2^2 l_1 \frac{i_{2x} a_1 b_1 b_2 r_2}{D},$$

где

$$D = \lambda_1 (b_2 + i_{2\omega} b_1) + l_1^2 i_{2x} b_1 (\mu_1 b_2 + i_{2\omega}) .$$

Окончательные значения бимоментов $B_{ок}$ и изгибающих моментов $M_x^{ок}$ в узлах и на опорах рассматриваемой рамы будут равны [при преобразованиях использованы следующие формулы приложения 10:

$$re+qs=\Delta,\quad b(r+qf)=\Delta,\quad b(\mu-\alpha f)=1,\quad a\mu+\gamma=\alpha b$$
$$\text{и } b(\alpha f-\gamma)=a];$$

$$B_C=X_1=-\frac{ml_2^2}{D}b_2[\lambda_1(s_2+i_{2\omega}f_2b_1)+l_1^2i_{2x}b_1(\mu_1s_2+i_{2\omega}f_2)];$$

$$B_D=B_E=\frac{q_2}{A}X_1+l_1i_{2\omega}\frac{b_1f_1}{A}X_2+ml_2^2\frac{\Delta_2}{A}=\frac{ml_2^2}{DA}[-q_2b_2\lambda_1(s_2+$$
$$+i_{2\omega}f_2b_1)-l_1^2q_2b_2b_1i_{2x}(\mu_1s_2+i_{2\omega}f_2)+l_1^2b_2r_2\alpha_1b_1^2f_1i_{2x}i_{2\omega}+$$
$$+\Delta_2\lambda_1(b_2+i_{2\omega}b_1)+l_1^2\Delta_2b_1i_{2x}(\mu_1b_2+i_{2\omega})]=\frac{ml_2^2}{DA}[b_2\lambda_1(\Delta_2-$$
$$-q_2s_2)+i_{2\omega}b_1\lambda_1(\Delta_2-q_2b_2f_2)+l_1^2i_{2x}b_2\mu_1b_1(\Delta_2-q_2s_2)+$$
$$+l_1^2i_{2x}i_{2\omega}b_1(\Delta_2-q_2b_2f_2+b_2r_2\alpha_1b_1f_1)]=\frac{ml_2^2}{DA}[b_2r_2e_2\lambda_1+$$
$$+i_{2\omega}b_2r_2b_1\lambda_1+l_1^2i_{2x}b_2r_2e_2\mu_1b_1+l_1^2i_{2x}i_{2\omega}b_1b_2r_2(1-\alpha_1b_1f_1)]=$$
$$=\frac{ml_2^2}{DA}b_2r_2(\lambda_1A+l_1^2i_{2x}\mu_1b_1A)=\frac{ml_2^2}{D}b_2r_2(\lambda_1+l_1^2i_{2x}\mu_1b_1);$$

$$B_A=B_B=\frac{\alpha_1q_2}{A}X_1-l_1\frac{b_1C}{A}X_2+ml_2^2\frac{a_1\Delta_2}{A}=$$
$$=\frac{ml_2^2}{DA}[-a_1\lambda_1b_2q_2(s_2+i_{2\omega}f_2b_1)-l_1^2i_{2x}a_1b_1b_2q_2(\mu_1s_2+$$
$$+i_{2\omega}f_2)-l_1^2i_{2x}\alpha_1b_1^2b_2r_2C+a_1\lambda_1\Delta_2(b_2+i_{2\omega}b_1)+$$
$$+l_1^2i_{2x}a_1b_1\Delta_2(\mu_1b_2+i_{2\omega})]=\frac{ml_2^2}{DA}[a_1\lambda_1b_2(\Delta_2-q_2s_2)+$$
$$+a_1\lambda_1b_1i_{2\omega}(\Delta_2-q_2b_2f_2)+l_1^2i_{2x}a_1b_1\mu_1b_2\Big(\Delta_2-q_2s_2-$$
$$-r_2e_2\frac{a_1b_1}{a_1\mu_1}\Big)+l_1^2i_{2x}i_{2\omega}a_1b_1\Big(\Delta_2-b_2q_2f_2-b_2r_2\frac{a_1b_1f_1}{a_1}\Big)\Big]=$$
$$=\frac{ml_2^2}{DA}[a_1\lambda_1b_2r_2e_2+a_1\lambda_1b_1b_2r_2i_{2\omega}+l_1^2i_{2x}b_1b_2r_2e_2(a_1\mu_1-\alpha_1b_1)+$$
$$+l_1^2i_{2x}i_{2\omega}b_1b_2r_2(\alpha_1-\alpha_1b_1f_1)]=\frac{ml_2^2}{DA}b_2r_2(a_1\lambda_1A-$$
$$-l_1^2i_{2x}b_2r_2e_2b_1\gamma_1-l_1^2i_{2x}i_{2\omega}b_2r_2b_1^2\gamma_1)=\frac{ml_2^2}{D}b_2r_2(a_1\lambda_1-l_1^2i_{2x}b_1\gamma_1);$$

$$M_{x(C)} = M^{\text{риг}}_{x(D)} = M^{\text{риг}}_{x(E)} = -X_2 = -ml_2^2 l_1 i_{2x} \frac{a_1 b_1 b_2 r_2}{D};$$

$$M^{\text{оп.ст}}_{x(D)} = M^{\text{оп.ст}}_{x(E)} = -ml_2;$$

$$M_{x(A)} = M_{x(B)} = -ml_2.$$

Окончательные эпюры $B_{\text{ок}}$ и $M_x^{\text{ок}}$ построены на рис. 206.

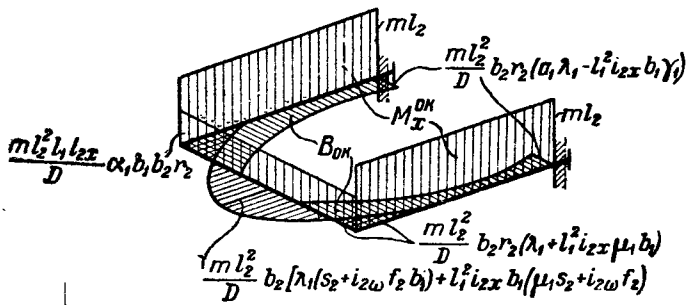


Рис. 206

Для проверки правильности построения этих эпюр проинтегрируем их с соответствующими единичными эпюрами, имея в виду, что по формулам приложения 10:

$$r + s = f, \quad f(r - s) = t, \quad f(a + 1) = b, \quad b(r - f^2) = t, \quad f(\mu - \gamma) = 1,$$

$$\mu = \lambda r, \quad \gamma = \lambda s, \quad a\mu + \gamma = \alpha b \text{ и } \mu s = \gamma r;$$

$$\delta_{s1} = \frac{2}{i_{2\omega}} \left\{ \frac{ml_2^2}{D} b_2 r_2 (\lambda_1 + l_1^2 i_{2x} \mu_1 b_1)(r_2 + s_2) - \frac{ml_2^2}{D} b_2 [\lambda_1 (s_2 + i_{2\omega} f_2 b_1) + l_1^2 i_{2x} b_1 (\mu_1 s_2 + i_{2\omega} f_2)](r_2 + s_2) - ml_2^2 t_2 \right\} + \frac{2ml_2^2}{D} b_2 r_2 [(\lambda_1 + l_1^2 i_{2x} \mu_1 b_1)(r_1 + s_1) + (a_1 \lambda_1 - l_1^2 i_{2x} b_1 \gamma_1)(r_1 + s_1)] = \frac{2ml_2^2}{D i_{2\omega}} \Big[\lambda_1 b_2 (r_2 f_2 - s_2 f_2 - t_2) + l_1^2 i_{2x} \mu_1 b_1 b_2 (r_2 f_2 - s_2 f_2 - t_2) - i_{2\omega} \lambda_1 b_1 \Big(f_2^2 b_2 + t_2 - \frac{f_1}{b_1} b_2 r_2 - \frac{a_1 f_1}{b_1} b_2 r_2 \Big) - l_1^2 i_{2x} i_{2\omega} b_1 (f_2^2 b_2 + t_2 - \mu_1 f_1 b_2 r_2 + \gamma_1 f_1 b_2 r_2) \Big] = 0,$$

$$\delta_{s2} = -2l_1 \Big[\frac{ml_2^2}{D} b_2 r_2 (a_1 \lambda_1 - l_1^2 i_{2x} b_1 \gamma_1) r_1 + \frac{ml_2^2}{D} b_2 r_2 (\lambda_1 +$$

$$+ l_1^2 i_{2x} \mu_1 b_1) s_1 \Big] + \frac{2}{i_{2x}} \frac{m l_2^2 l_1 i_{2x}}{D} a_1 b_1 b_2 r_2 = - \frac{2 m l_2^2 l_1}{D} b_2 r_2 [a_1 \lambda_1 \times$$

$$\times r_1 + \lambda_1 s_1 - a_1 b_1 - l_1^2 i_{2x} b_1 (r_1 \gamma_1 - \mu_1 s_1)] = 0.$$

При выборе основной системы для расчета рассматриваемой рамы мы использовали условия симметрии. Это привело к тому, что четыре из шести различных побочных перемещений обратились в нуль и система из четырех канонических уравнений разбилась на две независимые системы, содержащие по два неизвестных в каждой. Это дало нам возможность решить задачу для одного вида загружения в общем виде. Таким же образом можно решить эту задачу и для других видов нагрузок и в случае необходимости составить таблицы формул для расчета П-образных рам из тонкостенных элементов на кручение.

Для того чтобы все шесть побочных перемещений обратить в нуль и разбить систему канонических уравнений на четыре независимых уравнения, можно воспользоваться известным из курса строительной механики приемом выноса лишних неизвестных усилий в так называемый упругий центр при помощи жестких консолей, но для решения задачи в общем виде этот прием практических преимуществ не представляет, поэтому подробное изложение его мы опускаем. Заметим только, что здесь придется находить два упругих центра: один для симметричных и другой для обратно симметричных эпюр B и M_x.

ГЛАВА V

РАСЧЕТ БАЛОК И РАМ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МЕТОДОМ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 23. КОЛИЧЕСТВО ОСНОВНЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА

При расчете рам из тонкостенных элементов по методу деформаций основными неизвестными являются перемещения узлов: три линейных, три угловых и депланация узла. Следовательно, в общем случае для каждого узла рамы нужно составить семь уравнений. При расчете же плоских рам на пространственную нагрузку задача упрощается, так как нагрузка, перпендикулярная к плоскости рамы, не вызывает усилий, а следовательно, угловых и линейных перемещений системы в ее плоскости. Разложив заданную нагрузку на две составляющие, из которых одна лежит в плоскости системы, а другая ей перпендикулярна, можно неизвестные разбить на две независимые друг от друга группы.

(Вспомним, что плоскостью рамы из тонкостенных элементов мы условились называть плоскость, проходящую через линию центров изгиба стержней этой рамы).

В дальнейшем мы будем интересоваться лишь нагрузками, действующими перпендикулярно к плоскости рамы, так как расчет плоской рамы из тонкостенных элементов на нагрузки, действующие в ее плоскости, ничем не отличается от расчета плоских рам из нетонкостенных элементов.

Поэтому число неизвестных перемещений каждого узла плоской рамы из тонкостенных элементов в

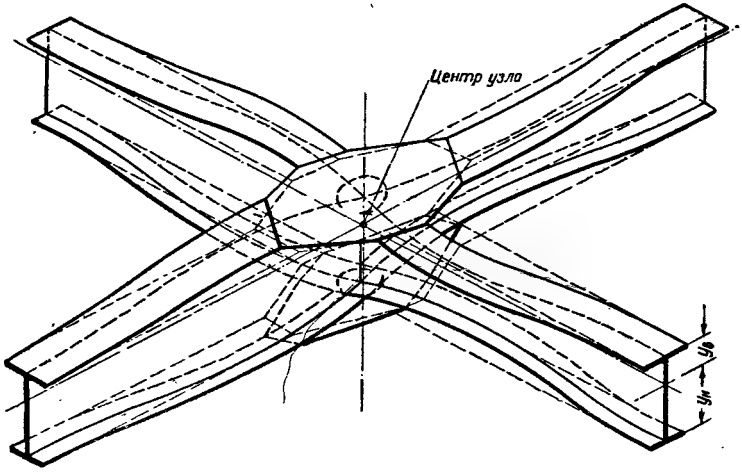


Рис. 207

общем случае будет равно четырем: одно линейное перемещение из плоскости рамы, два угловых перемещения вокруг двух непараллельных осей, взятых в плоскости рамы, и депланация узла.

Остановимся несколько на понятии о депланации узла.

Пусть сходящиеся в узле стержни являются удовлетворяющими условиям плоской рамы (см. § 19) двухполочными с вертикальной осью симметрии профилями (одинаковыми или разными) и пусть эти стержни в узле рамы соединены между собой двумя фасонками, расположенными в плоскостях верхней и нижней полок стержней (рис. 207).

Точку, в которой пересекаются линии центров изгиба стержней, будем называть центром узла. Под положительной единичной депланацией узла будем понимать поворот верхней фасонки в своей плоскости вместе с прикрепленными к ней стержнями по часовой стрелке, а нижней фасонки — против часовой стрелки на угол, условно равный расстоянию плоскости соответствующей фасонки от центра узла.

В самом деле, продольное перемещение u произвольной точки профиля с секториальной координатой ω при стесненном кручении

стержня равно $u = \theta'\omega$. Полагая $\theta' = 1$, получим $u = \omega$. Для двухполочного с вертикальной осью симметрии профиля (рис. 208)

$$u = \gamma_в a; \quad \omega = y_в a,$$

где a — расстояние рассматриваемой точки от оси симметрии сечения;

$\gamma_в$ — угол поворота верхней полки (фасонки);

$y_в$ — расстояние от верхней фасонки до центра изгиба (центра угла).

Отсюда

$$\gamma_в = y_в.$$

Аналогично получим для нижней полки

$$\gamma_н = y_н.$$

Для профиля с двумя осями симметрии

$$\gamma_в = \gamma_н = \frac{h}{2},$$

где h — высота сечения стержня.

Для расчета плоской рамы на кручение по методу деформаций необходимо на каждый узел ее наложить связи, закрепляющие его от перечисленных выше четырех перемещений, и полученную таким образом систему, состоящую из однопролетных балок, принять в качестве основной системы заданной рамы. Для облегчения построения эпюр бимоментов и изгибающих моментов в этой основной системе от заданных нагрузок следует иметь таблицы готовых формул реакций в однопролетных балках от различных загружений их и от различных перемещений опор. Для опорных реакций и опорных изгибающих моментов такие таблицы имеются почти во всех курсах строительной механики и в справочниках. Готовые же формулы опорных бимоментов и общих крутящих моментов представлены нами в форме таблицы приложения 9. Общие же формулы, положенные в основу при составлении этой таблицы, даны в следующем параграфе.

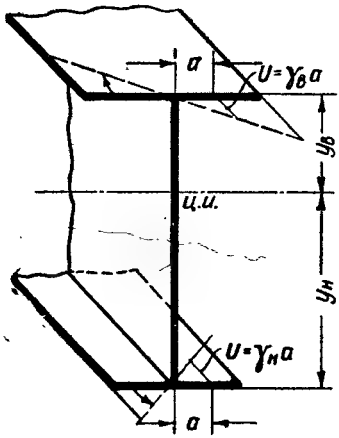


Рис. 208

При наличии готовых формул опорных реакций для более укрупненных элементов, например для Г-образных, Т-образных и

крестообразных рам, задачу расчета сложных рам по методу деформаций, как известно, можно значительно упростить, принимая основную систему, состоящую из указанных более укрупненных элементов, чем значительно уменьшается число лишних неизвестных. Для опорных реакций и опорных изгибающих моментов указанные таблицы готовых формул имеются, для опорных же бимоментов и общих крутящих моментов таких таблиц нет, но в случае необходимости нетрудно составить их, пользуясь указанными здесь методами.

§ 24. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА ДЕФОРМАЦИЙ

Для расчета балочных или рамных систем из тонкостенных элементов методом деформаций необходимо иметь выражения для опорных бимоментов и общих крутящих моментов, т. е. для опор-

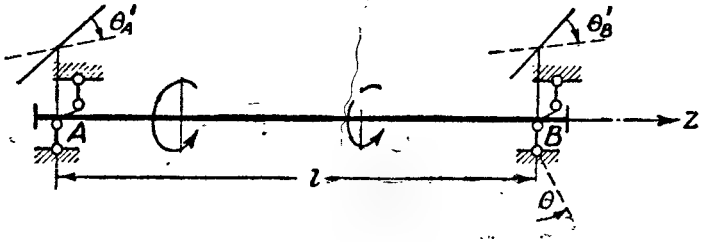


Рис. 209

ных реакций в обобщенном смысле этого слова, возникающих в опорах однопролетных балок от различных силовых и кинематических воздействий. Эти выражения могут быть найдены методом сил.

Рассмотрим тонкостенную балку постоянного сечения с двумя закрепленными против закручивания и депланаций опорами (рис. 209). Пусть опорные сечения этой балки A и B депланировали соответственно на величины θ'_A и θ'_B и одновременно повернулись одно относительно другого вокруг линии центров изгиба на некоторый угол θ, после чего опоры сделались абсолютно неподвижными.

За положительный угол закручивания θ будем принимать, как было указано в § 22 ч. 1, поворот сечения вокруг центра изгиба против движения часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной оси z.

Депланацию θ' будем считать положительной, если она соответствует положительному приращению угла закручивания θ.

Для двухполочных профилей при таком правиле знаков депланация будет положительна, если ближайшая к наблюдателю полка профиля поворачивается относительно задней полки по часовой стрелке.

Реактивные бимоменты B_A и B_B будем считать положительными, если для наблюдателя, смотрящего вдоль плеча бипары, направление ближайшей к нему пары совпадает с направлением движения часовой стрелки, а реактивные крутящие моменты K_A и K_B — положительные, если для наблюдателя, смотрящего со сто-

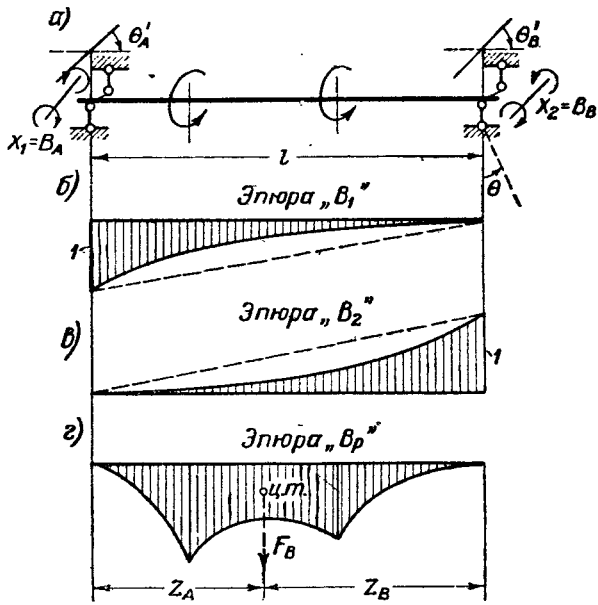


Рис. 210

роны положительной оси, они кажутся действующими по часовой стрелке.

Для определения величин B_A и B_B примем их за основные неизвестные и, обозначив их соответственно через X_1 и X_2 (рис. 210,*а*), составим для них два канонических уравнения метода сил:

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+\delta_{1p}&=\theta'_A;\\ X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+\delta_{2p}&=\theta'_B.\end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

Эпюры бимоментов от единичных значений неизвестных и от произвольной пролетной нагрузки представлены на рис. 210, *б*, *в*, *г*. Пунктиром изображены предельные эпюры бимоментов для идеального стержня — при $k=0$. Через F_B на рис. 210, *г* обозначена площадь эпюры бимоментов от пролетной нагрузки, а через Z_A и Z_B — расстояния от центра тяжести ее до соответствующих опор.

По формулам табл. 42

$$EJ_\omega\delta_{11}=lr,\quad EJ_\omega\delta_{12}=-ls,\quad EJ_\omega\delta_{22}=lr,$$

а по формуле (27) и от взаимного поворота опор на угол θ

$$EJ_\omega \delta_{1p} = \frac{F_B z_B}{l} + \frac{EJ_\omega \theta}{l};$$

$$EJ_\omega \delta_{2p} = -\frac{F_B z_A}{l} + \frac{EJ_\omega \theta}{l}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов и свободных членов в уравнения (92), получим

$$\left.\begin{aligned} X_1 r - X_2 s + \frac{F_B z_B}{l^2} + \frac{EJ_\omega \theta}{l^2} &= \frac{EJ_\omega \theta'_A}{l}; \\ -X_1 s + X_2 r - \frac{F_B z_A}{l^2} + \frac{EJ_\omega \theta}{l^2} &= \frac{EJ_\omega \theta'_B}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (93)$$

Решая эти уравнения, найдем

$$X_1 (r^2 - s^2) + \frac{F_B}{l^2}(z_B r - z_A s) + \frac{EJ_\omega \theta}{l^2}(r + s) = \frac{EJ_\omega}{l}(\theta'_A r + \theta'_B s);$$

$$X_2 (r^2 - s^2) + \frac{F_B}{l^2}(z_B s - z_A r) + \frac{EJ_\omega \theta}{l^2}(r + s) = \frac{EJ_\omega}{l}(\theta'_A s + \theta'_B r),$$

откуда

$$X_1 = \frac{EJ_\omega}{l}\left(\theta'_A \frac{r}{r^2 - s^2} + \theta'_B \frac{s}{r^2 - s^2} - \frac{\theta}{l} \cdot \frac{r + s}{r^2 - s^2}\right) - \frac{F_B}{l^2} \times$$
$$\times \left[z_B \frac{r}{r^2 - s^2} - (l - z_B)\frac{s}{r^2 - s^2}\right];$$

$$X_2 = \frac{EJ_\omega}{l}\left(\theta'_A \frac{s}{r^2 - s^2} + \theta'_B \frac{r}{r^2 - s^2} - \frac{\theta}{l} \cdot \frac{r + s}{r^2 - s^2}\right) + \frac{F_B}{l^2} \times$$
$$\times \left[z_A \frac{r}{r^2 - s^2} - (l - z_A)\frac{s}{r_2 - s^2}\right].$$

По формулам приложения 10 имеем

$$\frac{r}{r^2 - s^2} = \frac{r}{(r + s)(r - s)} = \frac{r}{f\frac{t}{f}} = \frac{r}{t} = r\lambda = \mu;$$

$$\frac{s}{r^2 - s^2} = \frac{s}{t} = s\lambda = \gamma \text{ и } \mu + \gamma = \alpha.$$

Подставив эти значения в предыдущие выражения и заменив X_1 и X_2 соответственно через B_A и B_B, окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} B_A &= \frac{EJ_\omega}{l}\left(\mu\theta'_A + \gamma\theta'_B - \alpha\frac{\theta}{l}\right) - \frac{F_B}{l^2}(\alpha z_B - \gamma l); \\ B_B &= \frac{EJ_\omega}{l}\left(\gamma\theta'_A + \mu\theta'_B - \alpha\frac{\theta}{l}\right) + \frac{F_B}{l^2}(\alpha z_A - \gamma l). \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Реактивные крутящие моменты по формулам (200) и (204) ч. I с учетом принятого правила знаков для бимоментов будут равны

$$\left.\begin{aligned} K_A &= K_A^0 - \frac{B_B + B_A}{l} + k^2 EJ_\omega \frac{\theta}{l}; \\ K_B &= K_B^0 + \frac{B_B + B_A}{l} - k^2 EJ_\omega \frac{\theta}{l}, \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

где K_A^0 и K_B^0 — опорные крутящие моменты от внешней нагрузки в балке с шарнирными опорами, допускающими депланацию.

Подставив в эти выражения значения B_A и B_B из формул (94) и имея в виду, что $\mu + \gamma = \alpha$, получим

$$K_A = -\frac{EJ_\omega}{l^2}\alpha\left(\theta'_A + \theta'_B - 2\frac{\theta}{l}\right) - \frac{F_B}{l^3}\alpha(z_A - z_B) + \\ + K_A^0 + k^2 EJ_\omega \frac{\theta}{l}; \tag{96}$$

$$K_B = \frac{EJ_\omega}{l^2}\alpha\left(\theta'_A + \theta'_B - 2\frac{\theta}{l}\right) + \frac{F_B}{l^3}\alpha(z_A - z_B) + \\ + K_B^0 - k^2 EJ_\omega \frac{\theta}{l}.$$

В пределе при $k=0$ (для идеального тонкостенного стержня)

$$\mu = 4, \quad \gamma = 2 \text{ и } \alpha = 6.$$

Если подставить эти предельные значения коэффициентов в формулы (94) и (96), то получим выражения, совершенно аналогичные соответствующим формулам для опорных изгибающих моментов и опорных реакций[1]. Из общих формул (94) и (96) нетрудно получить формулы опорных бимоментов и крутящих моментов для отдельных частных случаев силовых или кинематических воздействий на рассматриваемую балку.

Например, при депланации правого конца балки на величину θ'_B

$$B_A = \frac{EJ_\omega}{l}\gamma\theta'_B, \; B_B = \frac{EJ_\omega}{l}\mu\theta'_B, \; K_A = -K_B = -\frac{EJ_\omega}{l^2}\alpha\theta'_B.$$

При взаимном повороте опор вокруг линии центров изгиба на угол θ

$$B_A = B_B = -\frac{EJ_\omega}{l^2}\alpha\theta;$$

$$K_A = -K_B = \frac{EJ_\omega}{l^3}2\alpha\theta + k^2 EJ_\omega \frac{\theta}{l} = \frac{EJ_\omega}{l^3}(2\alpha + k^2 l^2)\theta.$$

[1] И. М. Рабинович, Курс строительной механики, ч. 2, Госстройиздат, 1954, стр. 292.

По формулам приложения 10

$$k^2 l^2 = \frac{1}{\varphi}, \quad 2\alpha + \frac{1}{\varphi} = \lambda,$$

тогда

$$K_A = -K_B = \frac{EJ_\omega}{l^2} \lambda\theta.$$

При загружении равномерно распределенными по всей длине балки закручивающими моментами интенсивности m

$$B_A = -B_B = -$$

$$-\frac{F_B}{l^2}(\alpha z_B - \gamma l).$$

По табл. 41

$$F_B = ml^3 po; \quad z_B = \frac{l}{2},$$

а по формулам приложения 10

$$po = t \text{ и } t(\alpha - 2\gamma) = 2g.$$

Отсюда

$$B_A = -B_B = -ml^2 g;$$

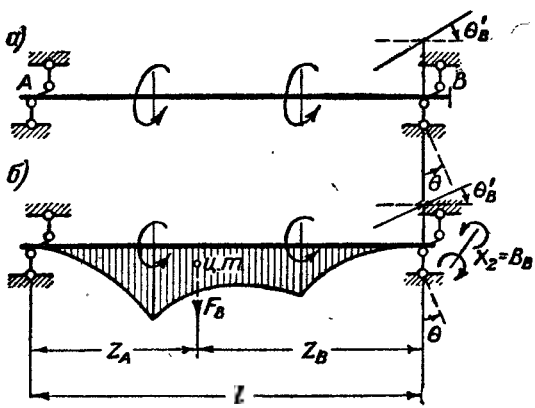


Рис. 211

$$K_A = -\frac{F_B}{l^3}\alpha(z_A - z_B) + K_A^0$$

или

$$K_A = K_B = K_A^0 = \frac{ml}{2}, \text{ так как } z_A - z_B = 0.$$

Рассмотрим теперь тонкостенную балку с одним закрепленным против закручивания и депланации концом и другим шарнирным, допускающим депланацию (рис. 211).

Для вывода общих формул опорных бимоментов и крутящих моментов для такой балки можно воспользоваться второй из формул (93), положив в ней $X_1 = 0$.

Получим

$$X_2 = \frac{EJ_\omega}{l}\theta'_B\frac{1}{r} + \frac{F_B}{l^2}z_A\frac{1}{r} - \frac{EJ_\omega}{l^2}\theta\frac{1}{r}.$$

Обозначив $\frac{1}{r} = \beta$ и заменив X_2 на B_B, будем иметь

$$B_B = \frac{EJ_\omega}{l}\beta\left(\theta'_B - \frac{\theta}{l}\right) + \frac{F_B}{l^2}\beta z_A. \tag{97}$$

По формулам (95), полагая в них $B_A=0$ и подставив B_B из формулы (97), получим

$$\left.\begin{aligned} K_A &= -\frac{EJ'_\omega}{l^2}\beta\left(\theta'_B-\frac{\theta}{l}\right)-\frac{F_B}{l^3}\beta z_A+K_A^0+k^2EJ_\omega\frac{\theta}{l};\\ K_B &= \frac{EJ_\omega}{l^2}\beta\left(\theta'_B-\frac{\theta}{l}\right)+\frac{F_B}{l^3}\beta z_A+K_B^0-k^2EJ_\omega\frac{\theta}{l}.\end{aligned}\right\} \quad (98)$$

В частном случае при депланации правого конца балки на величину θ'_B

$$B_B=\frac{EJ_\omega}{l}\beta\theta'_B;$$

$$K_A=-K_B=-\frac{EJ_\omega}{l^2}\beta\theta'_B.$$

При взаимном повороте опор вокруг линии центров изгиба на угол θ

$$B_B=-\frac{EJ_\omega}{l^2}\beta\theta;$$

$$K_A=-K_B=\frac{EJ_\omega}{l^3}\beta\theta+k^2EJ_\omega\frac{\theta}{l}=\frac{EJ_\omega}{l^3}(\beta+k^2l^2)\theta=$$

$$=\frac{EJ_\omega}{l^3}\left(\beta+\frac{1}{\varphi}\right)\theta=\frac{EJ_\omega}{l^3}\rho\theta,$$

где

$$\rho=\beta+\frac{1}{\varphi}.$$

При загружении сосредоточенным закручивающим моментом M посередине пролета

$$B_B=\frac{F_B}{l^2}\beta z_A.$$

По табл. 14

$$F_B=Ml^2fn;\quad z_A=\frac{l}{2};$$

по формулам приложения 10

$$fn=p \text{ и } p\beta=u.$$

После подстановки этих значений и имея в виду формулы приложения 10

$$1-u=2\sigma;\quad 1+u=2\tau,$$

получим

$$B_B = \frac{Ml}{2} u;$$

$$K_A = -\frac{F_B}{l^3} \beta z_A + K_A^0 = -\frac{M}{2} u + \frac{M}{2} = \frac{M}{2}(1-u) = M\sigma;$$

$$K_B = \frac{F_B}{l^3} \beta z_A + K_B^0 = \frac{M}{2} u + \frac{M}{2} = \frac{M}{2}(1+u) = M\tau.$$

3. Рассмотрим, наконец, загруженную произвольной закручивающей нагрузкой тонкостенную балку с закрепленным против закручивания и депланаций левым концом и совершенно свободным правым концом (рис. 212, *а*). Пусть опорное сечение этой балки депланировало на величину θ'_A.

Для определения величины опорного бимомента B_B примем его за основное неизвестное (рис. 212, *б*) и, обозначив его через X_1, составим каноническое уравнение метода сил

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1p} = \theta_A^1. \qquad (99)$$

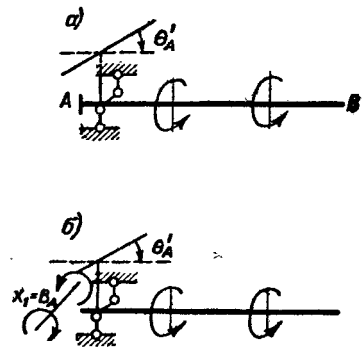


Рис. 212

По формулам табл. 47

$$\delta_{11} = \frac{l}{EJ_\omega} e.$$

Перемещение δ_{1p} является депланацией опорного сечения в основной системе от действия заданной внешней нагрузки. Обозначим его через $\theta_A'^0$ и будем определять по соответствующим формулам из табл. 47

$$\delta_{1p} = \theta_A'^0.$$

Подставив значения δ_{11} и δ_{1p} в уравнение (99), получим

$$B_A = X_1 = EJ_\omega \frac{\theta'_A - \theta_A'^0}{l} \frac{1}{e}$$

или, введя обозначение

$$\frac{1}{e} = \nu,$$

будем иметь

$$B_A = EJ_\omega \frac{\theta'_A - \theta_A'^0}{l} \nu. \qquad (100)$$

Опорный крутящий момент

$$K_A = K_A^0. \qquad (101)$$

В частном случае при депланации опорного сечения на величину θ'_A

$$B_A = \frac{EJ_\omega}{l} \nu\theta'_A, \; K_A = 0.$$

При загружении бимоментом B на конце консоли:
по формуле (6) приложения 7

$$\theta'^0_A = \frac{Bl}{EJ_\omega} \frac{1}{kl \operatorname{sh} kl} = \frac{Bl}{EJ_\omega} q;$$

$$B_A = -\frac{EJ_\omega \theta'^0_A}{l} \frac{1}{e} = -B\frac{q}{e} = -Ba;$$

(см. формулы приложения 10)

$$K_A = 0.$$

При загружении сосредоточенным моментом M посередине пролета:
по формуле (2) приложения 7

$$\theta'^0_A = \frac{Ml^2}{EJ_\omega}\left(\frac{1}{k^2 l^2} - \frac{1}{2k^2 l^2 \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right) =$$

$$= \frac{Ml^2}{EJ_\omega} \frac{2\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - 1}{2k^2 l^2 \operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = \frac{Ml^2}{EJ_\omega} \frac{\operatorname{sh} kl - \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl}.$$

Тогда

$$B_A = -\frac{EJ_\omega}{l} \nu\theta'^0_A = -\frac{EJ_\omega}{l} kl \operatorname{th} kl \frac{Ml^2}{EJ_\omega} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh} kl - \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl} = -Ml \frac{\operatorname{sh} kl - \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} kl} = -Mld;$$

(см. формулы приложения 10)

$$K_A = K^0_A = M.$$

Формулы реактивных бимоментов и крутящих моментов при различных силовых и кинематических воздействиях для рассмотренных в настоящем параграфе однопролетных балок представлены в форме таблицы приложения 9.

§ 25. РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОК НА КРУЧЕНИЕ ПО МЕТОДУ ДЕФОРМАЦИЙ. УРАВНЕНИЕ ТРЕХ ДЕПЛАНАЦИЙ

Рассмотрим неразрезную тонкостенную балку постоянного в пределах каждого пролета сечения с жесткими опорами. Для получения основной системы защемим от депланаций все промежуточные опорные сечения, включая и крайнюю опору со свешивающейся консолью (если таковая имеется), и примем в качестве неизве-

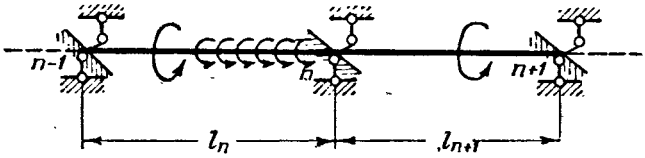


Рис. 213

стных депланации этих сечений. Концы балки независимо от способа опирания их оставляем без дополнительных закреплений.

Рассмотрим два промежуточных пролета l_n и l_{n+1} с общей опорой n (рис. 213).

Обозначим опорный бимомент, возникающий в заделке опорного сечения n от загружения пролетов l_n и l_{n+1} заданной закручивающей нагрузкой, через r_{np}; опорные бимоменты в той же заделке, вызванные единичной депланацией n—1-го узла — через $r_{n,n-1}$, n-го узла — через r_{nn} и n+1-го узла через $r_{n,n+1}$. Неизвестные депланации на опорах обозначим соответственно через θ'_{n-1}, θ'_n и θ'_{n+1}. И, наконец, погонные секториальные жесткости, которые будем называть коэффициентами секториальной жесткости каждого пролета, — соответственно через

$$i_{\omega(n)} = \frac{EJ_{\omega(n)}}{l_n} \text{ и } i_{\omega(n+1)} = \frac{EJ_{\omega(n+1)}}{l_{n+1}}.$$

Тогда условие отсутствия на n-й опоре внешнего защемляющего бимомента выразится так:

$$r_{n-1,n}\theta'_{n-1} + r_{n,n}\theta'_n + r_{n\,n+1}\theta'_{n+1} + r_{np} = 0, \qquad (102)$$

где по формулам приложения 9

$$r_{n-1,n} = i_{\omega(n)}\gamma_n; \quad r_{nn} = i_{\omega(n)}\mu_n + i_{\omega(n+1)}\mu_{n+1};$$
$$r_{n,n+1} = i_{\omega(n+1)}\gamma_{n+1}.$$

Свободный член уравнения (102) представляет собой сумму реактивных бимоментов, возникающих на n-й опоре от загружения пролетов l_n и l_{n+1} заданной закручивающей нагрузкой; при за-

щемлении от депланаций на обоих концах пролетов он равен по формулам (94)

$$r_{\text{пр}} = \frac{F_{B(n)}}{l_n^2}\left(\alpha_n z_{A(n)} - \gamma_n l_n\right) - \frac{F_{B(n+1)}}{l_{n+1}^2}\left(\alpha_{n+1} z_{B(n+1)} - \gamma_{n+1} l_{n+1}\right).$$

Подставив эти значения коэффициентов и свободного члена в уравнение (102), получим

$$i_{\omega(n)}\gamma_n \theta'_{n-1} + \left(i_{\omega(n)}\mu_n + i_{\omega(n+1)}\mu_{n+1}\right)\theta'_n +$$

$$+ i_{\omega(n+1)}\gamma_{n+1}\theta'_{n+1} = -\frac{F_{B(n)}}{l_n^2}\left(\alpha_n z_{A(n)} - \gamma_n l_n\right) +$$

$$+ \frac{F_{B(n+1)}}{l_{n+1}^2}\left(\alpha_{n+1} z_{B(n+1)} - \gamma_{n+1} l_{n+1}\right). \qquad (103)$$

Уравнение (103) и есть уравнение трех депланаций.

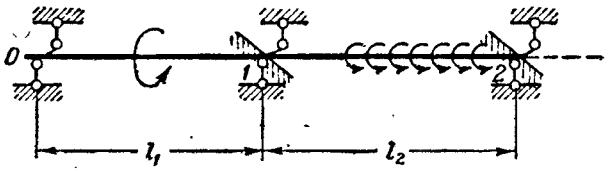


Рис. 214

Общее число этих уравнений будет равно числу промежуточных опор балки, включая и крайнюю опору со свешивающейся консолью, если таковая имеется.

Первое и последнее из системы уравнений (103) для многопролетной неразрезной балки будут содержать только по две депланации.

Если левый конец балки имеет шарнирную опору, допускающую депланацию (рис. 214), то в основной системе первый пролет будет представлять балку с шарнирным левым и защемленным против депланаций правым концами.

В этом случае по формулам приложения 9

$$r_{n-1,n} = 0; \quad r_{nn} = i_{\omega(1)}\beta_1 + i_{\omega(2)}\mu_2; \quad r_{n,n+1} = i_{\omega(2)}\gamma_2$$

и по формулам (97) и (94)

$$r_{\text{пр}} = \frac{F_{B(1)}}{l_1^2}\beta_1 z_{A(1)} - \frac{F_{B(2)}}{l_2^2}\left(\alpha_2 z_{B(2)} - \gamma_2 l_2\right).$$

Подставив эти значения коэффициентов и свободного члена в уравнение (102), получим

$$(i_{\omega(1)}\beta_1 + i_{\omega(2)}\mu_2)\,\theta_1' + i_{\omega(2)}\gamma_2\theta_2' =$$

$$= -\frac{F_{B(1)}}{l_1^2}\beta_1 z_{A(1)} + \frac{F_{B(2)}}{l_2^2}(a_2 z_{B(2)} - \gamma_2 l_2). \qquad (104)$$

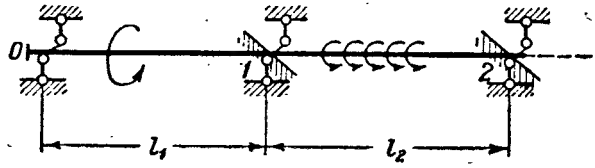


Рис. 215

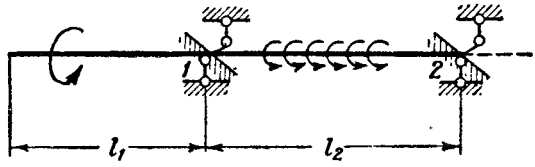


Рис. 216

Если левый конец балки защемлен против депланаций (рис. 215), то уравнение будет иметь следующий вид:

$$(i_{\omega(1)}\mu_1 + i_{\omega(2)}\mu_2)\,\theta_1' + i_{\omega(2)}\gamma_2\theta_2' =$$

$$= -\frac{F_{B(1)}}{l_1^2}(\alpha_1 z_{A(1)} - \gamma_1 l_1) + \frac{F_{B(2)}}{l_2^2}(\alpha_2 z_{B(2)} - \gamma_2 l_2). \qquad (105)$$

Наконец, если левый конец неразрезной балки является консолью (рис. 216), то в основной системе первый пролет будет представлять балку со свободным левым и защемленным против депланаций правым концами.

В этом случае:

по формулам таблицы приложения 9

$$r_{n-1,n} = 0; \quad r_{nn} = i_{\omega(1)}\nu_1 + i_{\omega(2)}\mu_2; \quad r_{n,n+1} = i_{\omega(2)}\gamma_2$$

и по формулам (100) и (94)

$$r_{nр} = i_{\omega(1)}\nu_1\theta_A'^0 - \frac{F_{B(2)}}{l_2^2}(\alpha_2 z_{B(2)} - \gamma_2 l_2).$$

Сделав подстановку в уравнение (102), получим

$$\left(i_{\omega(1)}\nu_1 + i_{\omega(2)}\mu_2\right)\theta_1' + i_{\omega(2)}\gamma_2\theta_2' =$$

$$= -i_{\omega(1)}\nu_1\theta_A'^0 + \frac{F_{B(2)}}{l_2^2}\left(\alpha_2 z_{B(2)} - \gamma_2 l_2\right), \qquad (106)$$

где $\theta_A'^0$ следует вычислять по формулам из приложения 7, а проще $i_{\omega(1)}\nu_1\theta_A'^0 = B_A$ брать из приложения 9 для консольной балки.

Подобно теории бимоментных фокусных отношений, изложенной в § 13 и 14 настоящей работы, можно было бы построить и

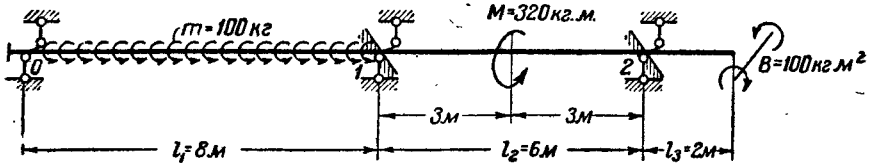


Рис. 217

теорию фокусных отношений депланаций, понимая под этим термином отношения $\frac{\theta_2'}{\theta_1'}, \frac{\theta_3'}{\theta_2'}, \ldots, \frac{\theta_{n+1}'}{\theta_n'}$, но ввиду отсутствия каких-либо практических преимуществ для расчета неразрезных тонкостенных балок на кручение по этой теории по сравнению с другими методами мы изложение ее здесь опускаем.

Пример 15. Определить опорные бимоменты неразрезной тонкостенной балки примера 9 (§ 12), пользуясь уравнениями трех депланаций.

Основная система заданной балки представлена на рис. 217. Как видим, задача эта при решении ее по методу деформаций имеет только два лишних неизвестных. При решении же ее по методу сил число неизвестных равнялось трем.

Составим уравнения депланаций для опоры *1* по типу (105) и для опоры *2* — по типу (106). Свободные члены принимаем по формулам приложения 9

$$\left(i_{\omega(1)}\mu_1 + i_{\omega(2)}\mu_2\right)\theta_1' + i_{\omega(2)}\gamma_2\theta_2' = -ml_1^2 g_1 + \frac{Ml_2}{2}n_2;$$

$$i_{\omega(2)}\gamma_2\theta_1' + \left(i_{\omega(2)}\mu_2 + i_{\omega(3)}\nu_3\right)\theta_2' = -\frac{Ml_2}{2}n_2 + Ba_3.$$

В этих уравнениях

$$i_{\omega(1)} = \frac{EJ_\omega}{l_1} = \frac{2{,}1\cdot 10^6\cdot 1349900}{800} = 3{,}54\cdot 10^3\ кгм^3;$$

$$i_{\omega(2)} = \frac{EJ_\omega}{l_2} = \frac{2{,}1\cdot 10^6\cdot 1\,349\,900}{600} = 4{,}72\cdot 10^3\ кгм^3;$$

$$i_{\omega(3)} = \frac{EJ_\omega}{l_3} = \frac{2{,}1\cdot 10^6\cdot 1\,349\,900}{200} = 14{,}17\cdot 10^3\ кгм^3;$$

$$kl_1 = 5{,}94;\quad kl_2 = 4{,}46 \text{ и } kl_3 = 1{,}49.$$

По таблице приложения 11

$$\mu_1 = 7{,}429;\quad \gamma_1 = 1{,}457;\quad g_1 = 0{,}0563;$$

$$\mu_2 = 6{,}17;\quad \gamma_2 = 1{,}598;\quad n_2 = 0{,}181;$$

$$\nu_3 = 1{,}345;\quad a_3 = 0{,}43.$$

После подстановки численных значений в уравнения депланаций получим

$$(3{,}45\cdot 10^3\cdot 7{,}429 + 4{,}72\cdot 10^3\cdot 6{,}17)\,\theta_1' + 4{,}72\cdot 10^3\cdot 1{,}598\theta_2' =$$

$$= -100\cdot 8^2\cdot 0{,}0563 + \frac{320\cdot 6}{2}\cdot 0{,}181;$$

$$4{,}72\cdot 10^3\cdot 1{,}598\theta_1' + (4{,}72\cdot 10^3\cdot 6{,}17 + 14{,}17\cdot 10^3\cdot 1{,}345)\,\theta_2' =$$

$$= \frac{320\cdot 6}{2}\,0{,}181 + 100\cdot 0{,}43;$$

$$55{,}5\cdot 10^3\theta_1' + 7{,}55\cdot 10^3\theta_2' = -186{,}2;$$

$$7{,}55\cdot 10^3\theta_1' + 48{,}1\cdot 10^3\theta_2' = -130{,}8,$$

откуда

$$\theta_1' = -3{,}11\cdot 10^{-3}\,м^{-1},\qquad \theta_2' = -2{,}23\cdot 10^{-3}\,м^{-1}.$$

Опорные бимоменты будут равны

$$B_0 = -ml_1^2 g_1 + i_{\omega(1)}\gamma_1\theta_1' = -100\cdot 8^2\cdot 0{,}0563 -$$

$$-3{,}54\cdot 10^3\cdot 1{,}457\cdot 3{,}11\cdot 10^{-3} = -360{,}3 - 16{,}09 = -376{,}4\ кгм^2;$$

$$B_1^{лев} = ml_1^2 g_1 + i_{\omega(1)}\mu_1\theta_1' = 360{,}3 - 3{,}54\cdot 10^3\cdot 7{,}429\cdot 3{,}11\cdot 10^{-3} =$$

$$= 360{,}3 - 82 = 278{,}3\ кгм^2;$$

$$B_1^{пр} = -\frac{Ml_2}{2}\,n_2 + i_{\omega(2)}\mu_2\theta_1' + i_{\omega(2)}\gamma_2\theta_2' = -\frac{320.6}{2}\,0{,}181 -$$

$$-4{,}72\cdot 10^3\cdot 6{,}17\cdot 3{,}11\cdot 10^{-3} - 4{,}72\cdot 10^3\cdot 1{,}598\cdot 2{,}23\cdot 10^{-3} =$$

$$= -173{,}7 - 90{,}6 - 16{,}8 = -281{,}1\ кгм^2;$$

$$B_2^{лев} = \frac{Ml_2}{2}\,n_2 + i_{\omega(2)}\gamma_2\theta_1' + i_{\omega(2)}\mu_2\theta_2' =$$

$$= 173{,}7 - 4{,}72\cdot 10^3\cdot 1{,}598\cdot 3{,}11\cdot 10^{-3} - 4{,}72\cdot 10^3\cdot 6{,}17\cdot 2{,}23\cdot 10^{-3} =$$

$$= 173{,}7 - 23{,}4 - 65 = 85{,}3\ кгм^2;$$

$$B_2^{прав} = -Ba_3 + i_{\omega(3)}\nu_3\theta_2' = -100\cdot 0{,}43 -$$

$$-14{,}17\cdot 10^3\cdot 1{,}345\cdot 2{,}23\cdot 10^{-3} = -43 - 42{,}5 = -85{,}5\ кгм^2.$$

Пример 16. В § 20 предыдущей главы нами была рассчитана по методу сил консольная Г-образная рама из тонкостенных элементов при различных закручивающих нагрузках. Рассчитаем теперь эту раму по методу деформаций.

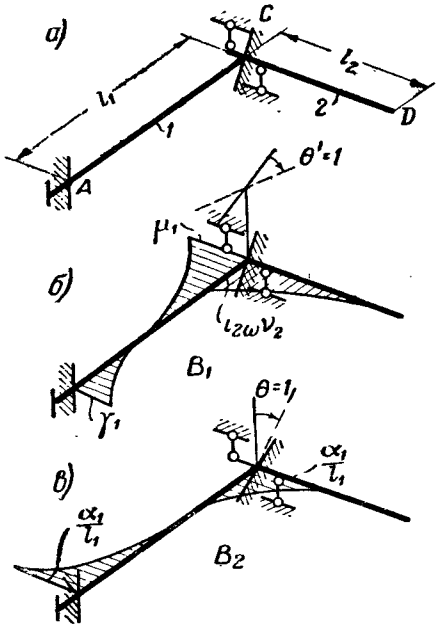


Рис. 218

В качестве основной системы примем ту же раму, но закрепленную в узле C против депланаций и закручивания вокруг оси стержня *1* (рис. 218, *а*). Закреплять этот узел против закручивания вокруг оси стержня *2* и линейного смещения из плоскости рамы нет необходимости, так как эти перемещения не будут оказывать никакого влияния на эпюру бимоментов в заданной раме.

Таким образом, по методу деформаций эта задача имеет два неизвестных: депланацию узла C, которую обозначим через θ', и угол закручивания вокруг оси стержня 1—θ.

Канонические уравнения метода деформаций напишутся так:

$$\left.\begin{aligned} r_{11}\theta' + r_{12}\theta + r_{1p} = 0; \\ r_{21}\theta' + r_{22}\theta + r_{2p} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (107)$$

Для определения коэффициентов этих уравнений r_{11}, r_{12} и r_{22} рассмотрим единичные состояния основной системы, отвечающие неизвестным θ' и θ. На рис. 218,*б* представлена эпюра бимоментов от депланации узла C на величину $\theta'=1$, а на рис. 218,*в* — эпюра бимоментов от поворота узла C на угол $\theta=1$ вокруг стержня 1.

По формулам приложения 9

$$r_{11} = \mu_1 + i_{2\omega}\nu_2, \quad r_{12} = -\frac{a_1}{l_1} \text{ и } r_{22} = \frac{\lambda_1}{l_1^2},$$

где

$$i_{2\omega} = \frac{EJ_{\omega(2)}}{l_2}, \qquad \frac{EJ_{\omega(1)}}{l_1} = 1.$$

Из уравнения (107)

$$\left.\begin{aligned} \theta' &= \frac{r_{12}r_{2p} - r_{22}r_{1p}}{r_{11}r_{22} - r_{12}^2}; \\ \theta &= \frac{r_{12}r_{1p} - r_{11}r_{2p}}{r_{11}r_{22} - r_{12}^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

Знаменатель в этих формулах может быть преобразован следующим образом:

$$r_{11}r_{12} - r_{12}^2 = (\mu_1 + i_{2\omega}\nu_2)\frac{\lambda_1}{l_1^2} - \frac{a_1^2}{l_1^2} = \frac{\lambda_1}{l_1^2}(\mu_1 - a_1 f_1 + i_{2\omega}\nu_2) =$$

$$= \frac{\lambda_1}{l_1^2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{i_{2\omega}}{e_2}\right) = \frac{\lambda_1}{l_1^2} \cdot \frac{e_2 + i_{2\omega}b_1}{b_1 e_2}$$

или

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = \frac{1}{l_1^2} \cdot \frac{A\lambda_1}{b_1 e_2},$$

так как по формулам приложения 10

$$a = \lambda f, \quad b(\mu - af) = 1 \text{ и } \nu = \frac{1}{e},$$

а по формулам табл. 48

$$e_2 + i_{2\omega}b_1 = A.$$

1. Действие закручивающего момента M, приложенного на свободном конце.

Эпюра бимоментов в основной системе от заданного загружения построена на рис. 219.

По формулам приложения 9

$$r_{1p} = -Ml_2b_2, \quad r_{2p} = 0.$$

Числители формул (108) для рассматриваемого случая загружения будут равны

$$r_{12}r_{2p} - r_{22}r_{1p} = \frac{Ml_2}{l_1^2}\lambda_1 b_2;$$

$$r_{12}r_{1p} - r_{11}r_{2p} = \frac{Ml_2}{l_1}a_1 b_2.$$

Подставив эти значения в формулы (108), получим

$$\theta' = \frac{Ml_2}{A}b_1 e_2 b_2 = \frac{Ml_2}{A}b_1\varphi_2;$$

$$\theta = \frac{Ml_1 l_2}{A} \cdot \frac{a_1}{\lambda_1}b_1 e_2 b_2 = \frac{Ml_1 l_2}{A}f_1 b_1 \varphi_2,$$

так как по формулам приложения 10

$$\varphi = be \text{ и } \alpha = \lambda f.$$

Окончательные бимоменты в узле и на опоре будут следующие:

$$B_{CD} = i_{2\omega}\nu_2\theta' - Ml_2 b_2 = -\frac{Ml_2}{A}(Ab_2 - i_{2\omega} b_1 \nu_2 \varphi_2) =$$

$$= -\frac{Ml_2}{A}(e_2 b_2 + i_{2\omega} b_1 b_2 - i_{2\omega} b_1 b_2) = -\frac{Ml_2}{A}\varphi_2;$$

$$B_{CA} = \mu_1\theta' - \frac{\alpha_1}{l_1}\theta = \frac{Ml_2}{A}\varphi_2 b_1(\mu_1 - \alpha_1 f_1) = \frac{Ml_2}{A}\varphi_2;$$

$$B_A = \gamma_1\theta' - \frac{\alpha_1}{l_1}\theta = -\frac{Ml_2}{A}\varphi_2 b_1(\alpha_1 f_1 - \gamma_1) = -\frac{Ml_2}{A}a_1\varphi_2,$$

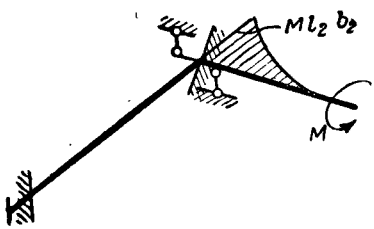


Рис. 219

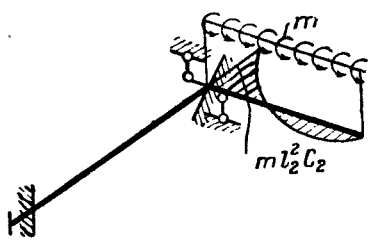


Рис. 220

так как по формулам приложения 10

$$\nu\varphi = \frac{1}{e}\varphi = b \text{ и } b(\alpha f - \gamma) = a.$$

2. Действие закручивающих моментов, равномерно распределенных по всей длине стержня l_2.

Эпюра бимоментов в основной системе от этой нагрузки построена на рис. 220.

По формулам приложения 9

$$r_{1p} = -ml_2^2 c_2; \quad r_{2p} = 0;$$

$$r_{12}r_{2p} - r_{22}r_{1p} = \frac{ml_2^2}{l_1^2}\lambda_1 c_2;$$

$$r_{12}r_{1p} - r_{11}r_{2p} = \frac{ml_2^2}{l_1}\alpha_1 c_2.$$

После подстановки этих значений в формулы (108) получим

$$\theta' = \frac{ml_2^2}{A} b_1 e_2 c_2;$$

$$\theta = \frac{ml_2^2 l_1}{A}\frac{\alpha_1}{\lambda_1} b_1 e_2 c_2 = \frac{ml_2^2 l_1}{A} f_1 b_1 e_2 c_2.$$

Окончательные значения бимоментов в узле и на опоре будут следующие:

$$B_{CD} = i_{2\omega}\nu_2\theta' - ml_2^2 c_2 = -\frac{ml_2^2}{A} e_2 c_2 \left(\frac{A}{l_2} - i_{2\omega} b_1 \nu_2\right) =$$

$$= -\frac{ml_2^2}{A}\Delta_2 (1 + i_{2\omega} b_1 \nu_2 - i_{2\omega} b_1 \nu_2) = -\frac{ml_2^2}{A}\Delta_2;$$

$$B_{CA} = \mu_1\theta' - \frac{\alpha_1}{l_1}\theta = \frac{ml_2^2}{A} e_2 c_2 b_1 (\mu_1 - \alpha_1 f_1) = \frac{ml_2^2}{A}\Delta_2;$$

$$B_A = \gamma_1\theta' - \frac{\alpha_1}{l_1}\theta = -\frac{ml_2^2}{A} e_2 c_2 b_1 (\alpha_1 f_1 - \gamma_1) = -\frac{ml_2^2}{A} a_1 \Delta_2,$$

так как по формулам приложения 10

$$\Delta = ce.$$

3. Действие закручивающих моментов, равномерно распределенных по всей длине стержня l_1.

Эпюра бимоментов в основной системе от этой нагрузки построена по рис. 221.

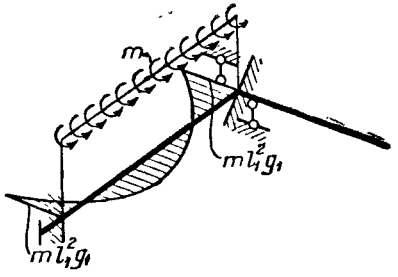


Рис. 221

По формулам приложения 9

$$r_{1p} = ml_1^2 g_1; \quad r_{2p} = -\frac{ml_1}{2};$$

$$r_{12}r_{2p} - r_{22}r_{1p} = \frac{m}{2}\alpha_1 - m\lambda_1 g_1 = \frac{m}{2}\lambda_1 (f_1 - 2g_1);$$

$$r_{12}r_{1p} - r_{11}r_{2p} = -ml_1\alpha_1 g_1 + \frac{ml_1}{2}(\mu_1 + i_{2\omega}\nu_2) =$$

$$= \frac{ml_1}{2}(\mu_1 - 2\alpha_1 g_1 + i_{2\omega}\nu_2) = \frac{ml_1}{2}(\mu_1 - 1 + i_{2\omega}\nu_2),$$

так как по формулам приложения 10

$$2\alpha g = 1.$$

После подстановки этих значений в формулы (108) получим

$$\theta' = \frac{ml_1^2}{2A} e_2 b_1 (f_1 - 2g_1);$$

$$\theta = \frac{ml_1^3}{2A} e_2 \frac{b_1}{\lambda_1} (\mu_1 - 1 + i_{2\omega} \nu_2).$$

Тогда окончательные значения бимоментов будут следующие:

$$B_{CD} = i_{2\omega} \nu_2 \theta' = \frac{ml_1^2}{2A} i_{2\omega} \cdot b_1 (f_1 + 2g_1) = \frac{ml_1^2}{A} i_{2\omega} b_1 s_1;$$

$$B_{CA} = \mu_1 \theta' - \frac{\alpha_1}{l_1} \theta + ml_1^2 g_1 = -\frac{ml_1^2}{2A} b_1 e_2 \Big[-\mu_1 f_1 + 2\mu_1 g_1 +$$

$$+ \mu_1 f_1 - f_1 + f_1 i_{2\omega} \nu_2 - \frac{1}{b_1 e_2} (2e_2 g_1 + 2i_{2\omega} b_1 g_1) \Big] =$$

$$= -\frac{ml_1^2}{2A} b_1 e_2 \left[2g_1 \left(\mu_1 - \frac{1}{b_1} \right) - f_1 + \frac{i_{2\omega}}{e_2} (f_1 - 2g_1) \right] =$$

$$= -\frac{ml_1^2}{A} b_1 e_2 \left(2g_1 \alpha_1 f_1 - f_1 + \frac{2i_{2\omega}}{e_2} s_1 \right) = -\frac{ml_1^2}{A} i_{2\omega} b_1 s_1;$$

$$B_A = \gamma_1 \theta' - \frac{\alpha_1}{l_1} \theta - ml_1^2 g_1 = -\frac{ml_1^2}{2A} [e_2 (-\gamma_1 b_1 f_1 + 2\gamma_1 b_1 g_1 +$$

$$+ b_1 f_1 \mu_1 - b_1 f_1 + i_{2\omega} f_1 b_1 \nu_2 + 2g_1) + 2i_{2\omega} b_1 g_1] =$$

$$= -\frac{ml_1^2}{2A} \{e_2 [b_1 f_1 (\mu_1 - \gamma_1) + 2g_1 (\gamma_1 b_1 + 1) - b_1 f_1] + i_{2\omega} b_1 (f_1 + 2g_1)\} =$$

$$= -\frac{ml_1^2}{2A} \{e_2 [b_1 (1 - f_1) + 2g_1 \alpha_1 c_1] + 2i_{2\omega} b_1 r_1\} =$$

$$= -\frac{ml_1^2}{A} (e_2 c_1 + i_{2\omega} b_1 r_1),$$

так как по формулам приложения 10

$$f - 2g = 2s, \quad f + 2g = 2r, \quad f(\mu - \gamma) = 1,$$
$$\gamma b + 1 = \alpha c \text{ и } b(1 - f) = c.$$

Для рассмотренных видов нагрузок мы получили те же формулы опорного и узлового бимоментов, что и в § 20 при расчете этой рамы по методу сил. Но заметим, что расчет подобных рам по методу сил значительно проще, чем по методу деформаций.

§ 27. МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ Г-ОБРАЗНАЯ РАМА, ЗАЩЕМЛЕННАЯ ПО КОНЦАМ ПРОТИВ ИЗГИБА, ЗАКРУЧИВАНИЯ И ДЕПЛАНАЦИИ

Пример 17. Рассчитаем по методу деформаций раму, рассчитанную по методу сил в § 20 предыдущей главы.

В качестве основной системы принимаем ту же раму, но защемленную в узле A: 1) против депланаций, 2) против поворота

вокруг оси стержня AC, 3) против поворота вокруг оси стержня AD и 4) против линейного смещения из плоскости рамы (рис. 222).

Закреплять эту раму против поворота и линейных смещений в ее плоскости надобности не встречается, так как составляющая заданной нагрузки в плоскости рамы равна нулю. Если бы таковая составляющая имелась, то, как было указано выше, расчет на нее можно было бы производить независимо по методам, известным из элементарного курса строительной механики.

Таким образом, при решении этой рамы по методу деформаций, так же как и по методу сил, имеются четыре неизвестных, а именно: 1) депланация узла θ_1', 2) угол закручивания вокруг оси стержня AC— θ_2, 3) то же, вокруг оси стержня AD— θ_3 и 4) линейное перемещение из плоскости рамы — Δ_4.

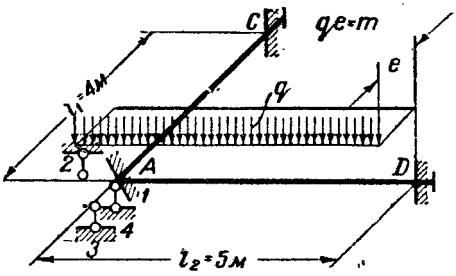


Рис. 222

Для определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода деформаций на рис. 223 построены эпюры бимоментов B и изгибающих моментов M_x в основной системе от перечисленных единичных перемещений закрепленного узла A и от заданной нагрузки. Для того чтобы не затемнять чертеж, закрепления узла A на чертежах эпюр не указаны. Значения опорных бимоментов на этих эпюрах взяты из приложения 9, а опорные изгибающие момента — из соответствующей таблицы элементарного курса строительной механики. Эпюры бимоментов, как мы условились выше, заштрихованы частой штриховкой, а эпюры изгибающих моментов — редкой.

На этих эпюрах:

$$i_{1\omega} = \frac{EJ_\omega}{l_1} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 1\,349\,900}{400} = 7{,}09 \cdot 10^9 \text{ кгсм}^3;$$

$$i_{2\omega} = \frac{EJ_\omega}{l_2} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 1\,349\,900}{500} = 5{,}67 \cdot 10^9 \text{ кгсм}^3;$$

$$i_{1x} = \frac{EJ_x}{l_1} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 83\,860}{400} = 4{,}40 \cdot 10^8 \text{ кгсм};$$

$$i_{2x} = \frac{EJ_x}{l_2} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 83\,860}{500} = 3{,}52 \cdot 10^8 \text{ кгсм}.$$

Из примера § 20

$$kl_1 = 2{,}97; \quad kl_2 = 3{,}71.$$

По таблице приложения 11

$$\mu_1 = 5{,}06; \quad \gamma_1 = 1{,}77; \quad \alpha_1 = 6{,}83; \quad \lambda_1 = 22{,}51;$$
$$\mu_2 = 5{,}58; \quad \gamma_2 = 1{,}68; \quad \alpha_2 = 7{,}26; \quad \lambda_2 = 28{,}35;$$
$$g_2 = 0{,}0689.$$

Для проверки правильности принятых коэффициентов рекомендуется воспользоваться формулами приложения 10:

$$\mu + \gamma = \alpha, \quad 2\alpha g = 1, \quad \mu = \lambda r \text{ или } \gamma = \lambda s$$

(r или s — из примера § 20).

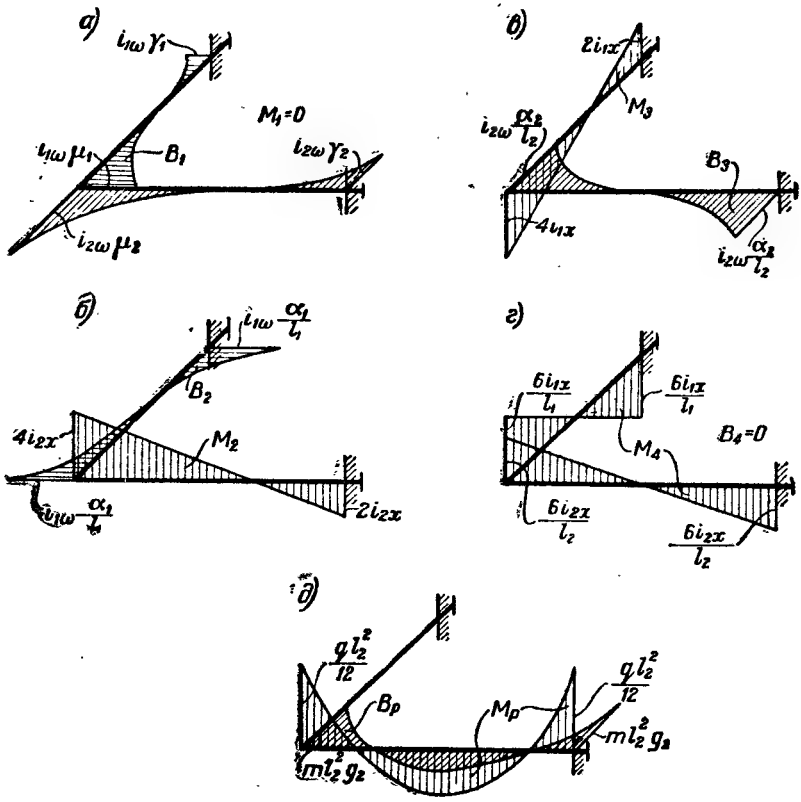


Рис. 223

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений будут равны:

$$r_{11} = i_{1\omega}\mu_1 + i_{2\omega}\mu_2 = 7{,}09\cdot 10^9\cdot 5{,}06 + 5{,}67\cdot 10^9\cdot 5{,}58 = 67{,}5\cdot 10^9;$$

$$r_{12} = -i_{1\omega}\frac{\alpha_1}{l_1} = -7{,}09\cdot 10^9\frac{6{,}83}{400} = -12{,}1\cdot 10^7;$$

$$r_{13} = -i_{2\omega}\frac{a_2}{l_2} = -5{,}67\cdot 10^9\,\frac{7{,}26}{500} = -8{,}23\cdot 10^7;$$

$$r_{14} = 0;$$

$$r_{22} = i_{1\omega}\frac{\lambda_1}{l_1^2} + 4i_{2x} = 7{,}09\cdot 10^9\,\frac{22{,}51}{400^2} + 4\cdot 3{,}52\cdot 10^8 = 14{,}1\cdot 10^8;$$

$$r_{23} = 0;$$

$$r_{24} = \frac{6i_{2x}}{l_2} = \frac{6\cdot 3{,}52\cdot 10^8}{500} = 4{,}22\cdot 10^6;$$

$$r_{33} = i_{2\omega}\frac{\lambda_2}{l_2^2} + 4i_{1x} = 5{,}67\cdot 10^9\,\frac{28{,}35}{500^2} + 4\cdot 4{,}4\cdot 10^8 = 17{,}6\cdot 10^8;$$

$$r_{34} = -\frac{6i_{1x}}{l_1} = -\frac{6\cdot 4{,}4\cdot 10^8}{400} = -6{,}6\cdot 10^6;$$

$$r_{44} = \frac{12i_{1x}}{l_1^2} + \frac{12i_{2x}}{l_2^2} = \frac{12\cdot 4{,}4\cdot 10^8}{400^2} + \frac{12\cdot 3{,}52\cdot 10^8}{500^2} = 4{,}99\cdot 10^4;$$

$$r_{1p} = -ml_2^2 g_2 = -500^2\cdot 0{,}0689m = -1{,}72\cdot 10^4\,m;$$

$$r_{2p} = \frac{ql_2^2}{12} = \frac{500^2}{12}\,q = 2{,}08\cdot 10^4 q;$$

$$r_{3p} = \frac{ml_2}{2} = 2{,}5\cdot 10^2\,m;$$

$$r_{4p} = \frac{ql_2}{2} = 2{,}5\cdot 10^2 q.$$

Разделим все полученные коэффициенты и свободные члены на 10^5 и подставим в канонические уравнения метода деформаций, которые будут иметь вид, представленный в форме табл. 50.

Таблица 50

Система канонических уравнений (к примеру § 27)

№ уравнения	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	
	θ_1'	θ_2	θ_3	Δ_4	от нагрузки m	от нагрузки q
1	$67{,}5\cdot 10^4$	$-12{,}1\cdot 10^2$	$-8{,}23\cdot 10^2$	0	$-0{,}172\,m$	0
2	$-12{,}1\cdot 10^2$	$14{,}1\cdot 10^3$	0	42,2	0	$0{,}208\,q$
3	$-8{,}23\cdot 10^2$	0	$17{,}6\cdot 10^3$	$-66{,}0$	$0{,}0025\,m$	0
4	0	42,2	$-66{,}0$	0,499	0	$0{,}0025\,q$

Решая эти уравнения, найдем:
от нагрузки m (в *кг*)

$$\theta_1' = 0{,}255\cdot 10^{-6}\,m;\quad \theta_2 = 0{,}246\cdot 10^{-6}\,m;$$

$$\theta_3 = -0{,}441\cdot 10^{-5}\,m;\ \text{и}\ \Delta_4 = -0{,}751\cdot 10^{-4}\,m;$$

от нагрузки q (в *кг/см*)

$$\theta_1' = -0{,}149\cdot 10^{-7} q; \quad \theta_2 = 0{,}298\cdot 10^{-4} q;$$

$$\theta_3 = -0{,}560\cdot 10^{-4} q \quad \text{и} \quad \Delta_4 = -1{,}493\cdot 10^{-2} q.$$

Окончательные значения бимоментов и изгибающих моментов в узлах и на опорах будут равны:
от нагрузки m (в *кг*)

$$B_{AC} = i_{1\omega}\mu_1\theta_1' - i_{1\omega}\frac{a_1}{l_1}\theta_2 =$$

$$= 7{,}09\cdot 10^9\left(5{,}06\cdot 0{,}255\cdot 10^{-6} m - \frac{6{,}83}{400}\cdot 0{,}246\cdot 10^{-6} m\right) = 9180 m \text{ кгсм}^2;$$

$$B_{AD} = i_{2\omega}\mu_2\theta_1' - i_{2\omega}\frac{a_2}{l_2}\theta_3 - m l_2^2 g_2 =$$

$$= 5{,}67\cdot 10^9\cdot\left(5{,}58\cdot 0{,}255\cdot 10^{-6} m + \frac{7{,}26}{500}\cdot 0{,}411\cdot 10^{-6} m\right) -$$

$$- 25\cdot 10^4\cdot 0{,}0689 m = -9130 m \text{ кгсм}^2;$$

$$B_C = i_{1\omega}\gamma_1\theta_1' - i_{1\omega}\frac{a_1}{l_1}\theta_2 =$$

$$= 7{,}09\cdot 10^9\left(1{,}77\cdot 0{,}255\cdot 10^{-6} m - \frac{6{,}83}{400} 0{,}246\cdot 10^{-6} m\right) = 3210 m \text{ кгсм}^2;$$

$$B_D = i_{2\omega}\gamma_2\theta_1' - i_{2\omega}\frac{a_2}{l_2}\theta_3 + m l_2^2 g_2 =$$

$$= 5{,}67\cdot 10^9\left(1{,}68\cdot 0{,}255\cdot 10^{-6} m + \frac{7{,}26}{500} 0{,}411\cdot 10^{-6} m\right) +$$

$$+ 25\cdot 10^4\cdot 0{,}0689 m = 19700 m \text{ кгсм}^2;$$

$$M_{AC} = -4 i_{1x}\theta_3 + \frac{6 i_{1x}}{l_1}\Delta_4 =$$

$$= 4{,}4\cdot 10^8\left(4\cdot 0{,}411\cdot 10^{-6} m - \frac{6}{400} 0{,}751\cdot 10^{-4} m\right) = 228 m \text{ кгсм};$$

$$M_{AD} = -4 i_{2x}\theta_2 - \frac{6 i_{2x}}{l_2}\Delta_4 =$$

$$= -3{,}52\cdot 10^8\left(4\cdot 0{,}246\cdot 10^{-6} m - \frac{6}{500}\cdot 0{,}751\cdot 10^{-4} m\right) = -29{,}2 m \text{ кгсм};$$

$$M_C = -2 i_{1x}\theta_3 + \frac{6 i_{1x}}{l_1}\Delta_4 =$$

$$= 4{,}4\cdot 10^8\left(2\cdot 0{,}411\cdot 10^{-6} m - \frac{6}{400} 0{,}751\cdot 10^{-4} m\right) = -134 m \text{ кгсм};$$

$$M_D = -2 i_{2x}\theta_2 - \frac{6 i_{2x}}{l_2}\Delta_4 =$$

$$= -3{,}52\cdot 10^8\left(2\cdot 0{,}246\cdot 10^{-6}\,m - \frac{6}{500}\,0{,}751\cdot 10^{-4}\,m\right) = 144m\,кгсм;$$

от нагрузки q (в *кг/см*)

$$B_{AC} = i_{1\omega}\,\mu_1\,\theta_1' - i_{1\omega}\,\frac{\alpha_1}{l_1}\,\theta_2 =$$

$$= -7{,}09\cdot 10^9\left(5{,}06\cdot 0{,}149\cdot 10^{-7}\,q + \frac{6{,}83}{400}\,0{,}298\cdot 10^{-4}\,q\right) = -4140q\,кгсм^2;$$

$$B_{AD} = i_{2\omega}\,\mu_2\,\theta_1' - i_{2\omega}\,\frac{\alpha_2}{l_2}\,\theta_3 =$$

$$= 5{,}67\cdot 10^9\left(-5{,}58\cdot 0{,}149\cdot 10^{-7}\,q + \frac{7{,}26}{500}\,0{,}56\cdot 10^{-4}\,q\right) = 4140q\,кгсм^2;$$

$$B_C = i_{1\omega}\,\gamma_1\,\theta_1' - i_{1\omega}\,\frac{\alpha_1}{l_1}\,\theta_2 =$$

$$= -7{,}09\cdot 10^9\left(1{,}77\cdot 0{,}149\cdot 10^{-7}\,q + \frac{6{,}83}{400}\,0{,}298\cdot 10^{-4}\,q\right) = -3790q\,кгсм^2;$$

$$B_D = i_{2\omega}\,\gamma_2\,\theta_1' - i_{2\omega}\,\frac{\alpha_2}{l_2}\,\theta_3 =$$

$$= 5{,}67\cdot 10^9\left(-1{,}68\cdot 0{,}149\cdot 10^{-7}\,q + \frac{7{,}26}{500}\,0{,}56\cdot 10^{-4}q\right) = 4470q\,кгсм^2;$$

$$M_{AC} = -4i_{1x}\,\theta_3 + \frac{6i_{1x}}{l_1}\,\Delta_4 =$$

$$= 4{,}4\cdot 10^8\left(4\cdot 0{,}56\cdot 10^{-4} - \frac{6}{400}\,1{,}493\cdot 10^{-2}\,q\right) = 22q\,кгсм;$$

$$M_{AD} = -4i_{2x}\,\theta_2 - \frac{6i_{2x}}{l_2}\,\Delta_4 - \frac{ql_2^2}{12} =$$

$$= -3{,}52\cdot 10^8\left(4\cdot 0{,}298\cdot 10^{-4}q - \frac{6}{500}\,1{,}493\cdot 10^{-2}\,q\right) -$$

$$-\frac{25\cdot 10^4}{12}\,q = 290q\,кгсм;$$

$$M_C = -2i_{1x}\,\theta_3 + \frac{6i_{1x}}{l_1}\,\Delta_4 =$$

$$= -4{,}4\cdot 10^8\left(-2\cdot 0{,}56\cdot 10^{-4}\,q + \frac{6}{400}\,1{,}493\cdot 10^{-2}\,q\right) = -49300q\,кгсм;$$

$$M_D = -2i_{2x}\,\theta_2 - \frac{6i_{2x}}{l_2}\,\Delta_4 + \frac{ql_2^2}{12} =$$

$$= 3{,}52\cdot 10^8\left(-2\cdot 0{,}298\cdot 10^{-4}\,q + \frac{6}{500}\,1{,}493\cdot 10^{-2}\,q\right) +$$

$$+\frac{25\cdot 10^4}{12}\,q = 63000q\,кгсм.$$

Полученные значения бимоментов и изгибающих моментов с достаточной степенью точности совпадают с соответствующими значениями, полученными при решении этой задачи по методу сил в § 20.

Окончательные эпюры $B_{ок}$ и $M_x^{ок}$ построены на рис. 203 и 204.

§ 28. СИММЕТРИЧНАЯ ТОНКОСТЕННАЯ П-ОБРАЗНАЯ РАМА

Пример 18. Эта рама (рис. 205) нами была уже рассчитана по методу сил в § 21 предыдущей главы. Рассчитаем ее на ту же нагрузку, а именно на симметричное загружение закручивающими

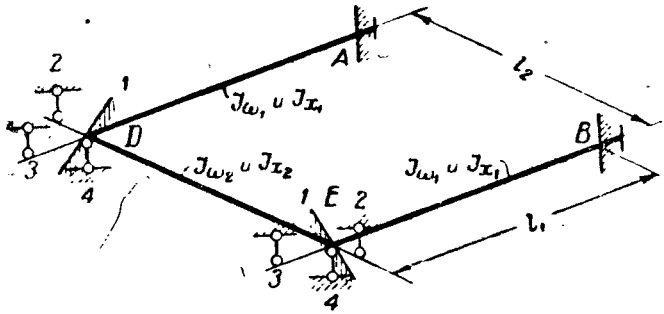


Рис. 224

моментами, равномерно распределенными по всей длине ригеля DE, по методу деформаций.

Основная система и принятые обозначения представлены на рис. 224. В качестве неизвестных принимаем симметричные обобщенные перемещения узлов D и E; депланацию θ_1', угол поворота вокруг осей опорных стержней DA и EB — θ_2, то же вокруг оси ригеля DE — θ_3 и линейное перемещение из плоскости рамы — Δ_4. Эпюры бимоментов и изгибающих моментов, возникающих в основной системе от перечисленных перемещений, равных единице, и от заданной нагрузки, представлены на рис. 225, где приняты следующие обозначения:

$$\frac{EJ_{\omega(1)}}{l_1} = i_{1\omega} = 1, \quad \frac{EJ_{\omega(2)}}{l_2} = i_{2\omega};$$

$$\frac{EJ_{x(1)}}{l_1} = i_{1x} \text{ и } \frac{EJ_{x(2)}}{l_2} = i_{2x}.$$

Защемления узлов на этой фигуре не обозначены.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений будут равны:

$$r_{11} = \mu_1 + \frac{i_{2\omega}}{f_2}; \quad r_{12} = -\frac{\alpha_1}{l_1};$$

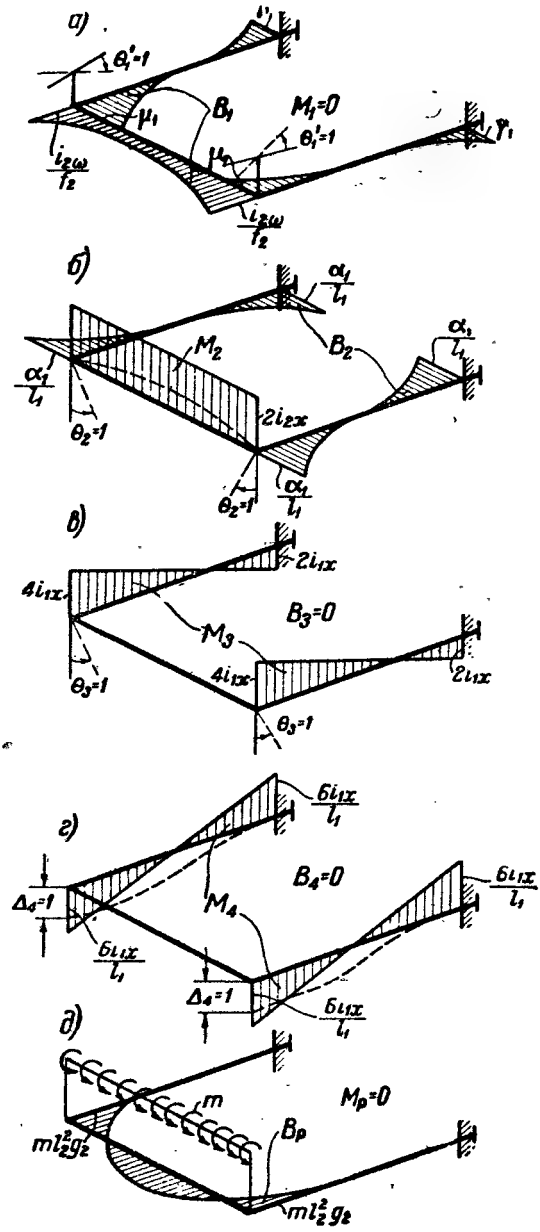

а)
$\theta_1'=1$
B_1
$M_1=0$
μ_1
$\theta_1'=1$
μ_2
γ_1
$\frac{i_{2\omega}}{l_2}$
$\frac{i_{2\omega}}{l_2}$
б)
$\frac{\alpha_1}{l_1}$
M_2
B_2
$\frac{\alpha_1}{l_1}$
$\frac{\alpha_1}{l_1}$
$2i_{2x}$
$\theta_2=1$
$\theta_2=1$
$\frac{\alpha_1}{l_1}$
в)
$2i_{1x}$
$4i_{1x}$
$B_3=0$
M_3
$4i_{1x}$
$2i_{1x}$
$\theta_3=1$
$\theta_3=1$
г)
$\frac{6i_{1x}}{l_1}$
$B_4=0$
$\Delta_4=1$
M_4
$\frac{6i_{1x}}{l_1}$
$\frac{6i_{1x}}{l_1}$
$\Delta_4=1$
$\frac{6i_{1x}}{l_1}$
д)
m
$M_p=0$
B_p
$ml_2^2g_2$
$ml_2^2g_2$

Рис. 225

$$r_{13} = r_{14} = 0;$$

$$r_{22} = \frac{\lambda_1}{l_1^2} + 2i_{2x}; \; r_{23} = r_{24} = 0;$$

$$r_{33} = 4i_{1x}; \; r_{34} = -\frac{6i_{1x}}{l_1};$$

$$r_{44} = \frac{12i_{1x}}{l_1^2};$$

$$r_{1p} = -ml_2^2 g_2; \; r_{2p} = 0;$$

$$r_{3p} = -\frac{ml_2}{2}; \; r_{4p} = 0.$$

При этих значениях коэффициентов и свободных членов система канонических уравнений метода деформаций разбивается на две независимые системы уравнений, по два в каждой. Из первых двух уравнений, как увидим ниже, определяются θ_1' и θ_2, а по ним — бимоменты, а из последних двух — θ_3 и Δ_4, а по ним — изгибающие моменты.

Уравнения эти будут иметь следующий вид:

$$\left(\mu_1 + \frac{i_{2\omega}}{f_2}\right)\theta_1' - \frac{\alpha_1}{l_1}\theta_2 - ml_2^2 g_2 = 0;$$

$$-\frac{\alpha_1}{l_1}\theta_1' + \left(\frac{\lambda_1}{l_1^2} + 2i_{2x}\right)\theta_2 = 0;$$

$$4i_{1x}\theta_3 - \frac{6i_{1x}}{l_1}\Delta_4 - \frac{ml_2}{2} = 0;$$

$$-\frac{6i_{1x}}{l_1}\theta_3 + \frac{12i_{1x}}{l_1^2}\Delta_4 = 0.$$

Решая эти уравнения и имея в виду, что по формулам приложения 10

$$\mu_1\lambda_1 - \alpha_1^2 = \mu_1\lambda_1 - \alpha_1 f_1 \lambda_1 = \lambda_1(\mu_1 - \alpha_1 f_1) = \frac{\lambda_1}{b_1},$$

получим

$$\theta_1' = \frac{ml_2^2 g_2\left(\frac{\lambda_1}{l_1^2} - 2i_{2x}\right)}{\left(\mu_1 + \frac{i_{2\omega}}{f_2}\right)\left(\frac{\lambda_1}{l_1^2} + 2i_{2x}\right) - \frac{\alpha_1^2}{l_1^2}} =$$

$$= \frac{ml_2^2 g_2 f_2(\lambda_1 + 2l_1^2 i_{2x})}{f_2(\mu_1\lambda_1 - \alpha_1^2) + i_{2\omega}\lambda_1 + 2l_1^2 i_{2x}(\mu_1 f_2 + i_{2\omega})} =$$

$$= \frac{ml_2^2 b_1 g_2 f_2}{H}(\lambda_1 + 2l_1^2 i_{2x}),$$

где

$$H = \lambda_1 (f_2 + i_{2\omega} b_1) + 2l_1^2 i_{2x} b_1 (\mu_1 f_2 + i_{2\omega}),$$

$$\theta_2 = \frac{m l_2^2 g_2 \frac{\alpha_1}{l_1}}{\left(\mu_1 + \frac{i_{2\omega}}{f_2}\right)\left(\frac{\lambda_1}{l_1^2} + 2i_{2x}\right) - \frac{\alpha_1^2}{l_1^2}} = \frac{m l_2^2 l_1 \alpha_1 b_1 g_2 f_2}{H};$$

$$\theta_3 = \frac{\frac{m l_2}{2} \cdot \frac{12 i_{1x}}{l_1^2}}{\frac{48 i_{1x}^2}{l_1^2} - \frac{36 i_{1x}^2}{l_1^2}} = \frac{m l_2}{2 i_{1x}};$$

$$\Delta_4 = \frac{\frac{m l_2}{2} \cdot \frac{6 i_{1x}}{l_1}}{\frac{48 i_{1x}^2}{l_1^2} - \frac{36 i_{1x}^2}{l_1^2}} = \frac{m l_2 l_1}{4 i_{1x}}.$$

Окончательные значения бимоментов и изгибающих моментов в узлах и на опорах рамы будут равны

$$B_{DA} = -B_{EB} = \mu_1 \theta_1' - \frac{\alpha_1}{l_1} \theta_2 = \frac{m l_2^2 g_2 f_2}{H} \left[b_1 (\mu_1 \lambda_1 - \alpha_1^2) + \right.$$

$$\left. + 2l_1^2 i_{2x} \mu_1 b_1 \right] = \frac{m l_2^2 g_2 f_2}{H} (\lambda_1 + 2l_1^2 i_{2x} \mu_1 b_1);$$

$$B_{DE} = -B_{ED} = \frac{i_{2\omega}}{f_2} \theta_1' - m l_2^2 g_2 = -\frac{m l_2^2 g_2 f_2}{H} \times$$

$$\times \left[-\frac{i_{2\omega}}{f_2} b_1 (\lambda_1 + 2l_1^2 i_{2x}) + \lambda_1 \left(1 + \frac{i_{2\omega}}{f_2} b_1\right) + 2l_1^2 i_{2x} b_1 \times \right.$$

$$\left. \times \left(\mu_1 + \frac{i_{2\omega}}{f_2}\right) \right] = -\frac{m l_2^2 g_2 f_2}{H} (\lambda_1 + 2l_1^2 i_{2x} \mu_1 b_1);$$

$$B_{AD} = -B_{BE} = \gamma_1 \theta_1' - \frac{\alpha_1}{l_1} \theta_2 = -\frac{m l_2^2 g_2 f_2}{H} \left[b_1 (\alpha_1^2 - \lambda_1 \gamma_1) - \right.$$

$$\left. - 2l_1^2 i_{2x} \gamma_1 b_1 \right] = -\frac{m l_2^2 g_2 f_2}{H} (\lambda_1 \alpha_1 - 2l_1^2 i_{2x} \gamma_1 b_1).$$

При выводе этих выражений были использованы следующие формулы приложения 10:

$$b(\mu\lambda - \alpha^2) = \lambda b (\mu - \alpha f) = \lambda \text{ и } b(\alpha^2 - \lambda\gamma) = \lambda b (\alpha f - \gamma) = \lambda a;$$

$$M_{DA} = M_{EB} = 4 i_{1x} \theta_3 - \frac{6 i_{1x}}{l_1} \Delta_4 = 2 m l_2 - \frac{3}{2} m l_2 = \frac{m l_2}{2};$$

$$M_{DE} = -M_{ED} = -2i_{2x}\theta_2 = -\frac{2ml_2^2 l_1 i_{2x} \alpha_1 b_1 g_2 f_2}{H};$$

$$M_{AD} = M_{BE} = 2i_{1x}\theta_3 - \frac{6i_{1x}}{l_1}\Delta_4 = ml_2 - \frac{2}{3}ml_2 = -\frac{ml_2}{2}.$$

Соответствующие эпюры $B_{ок}$ и $M_x^{ок}$ построены на рис. 226.

Сравнивая эти эпюры с соответствующими эпюрами $B_{ок}$ и $M_x^{ок}$, полученными нами при расчете этой рамы по методу сил (рис. 206), мы замечаем, что по виду они ничем не отличаются друг от друга, но значения опорных и узловых бимоментов и моментов выражаются различными формулами. Это объясняется тем, что при расчете рамы по методу сил мы длину ригеля DE обозначили через $2l_2$ для возможности пользоваться готовыми формулами бимоментов для Г-образной консоли, здесь же мы обозначили ее через l_2.

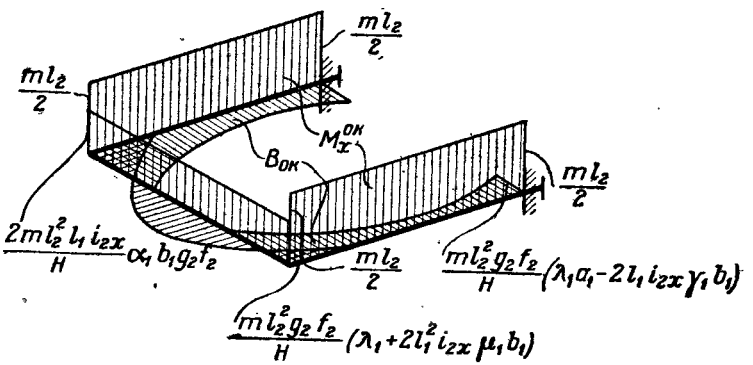


Рис. 226

Покажем, что эти выражения соответственно равны друг другу. В дальнейшем значения всех коэффициентов, относящихся к ригелю, в формулах по методу сил будем обозначать с черточкой наверху, а в формулах, полученных по методу деформаций, — без черточки.

Тогда

$$\bar{l}_2 = \frac{l_2}{2}; \quad \bar{i}_{2\omega} = 2i_{2\omega} \text{ и } \bar{i}_{2x} = 2i_{2x}.$$

По формулам приложения 10

$$\bar{b}_2 = \frac{\operatorname{th} k\bar{l}_2}{k\bar{l}_2} = \frac{\operatorname{th}\frac{kl_2}{2}}{\frac{kl_2}{2}} = \frac{2\operatorname{sh}^2\frac{kl_2}{2}}{kl_2 \operatorname{sh}\frac{kl_2}{2}\operatorname{ch}\frac{kl_2}{2}} = \frac{2(\operatorname{ch} kl_2 - 1)}{kl_2 \operatorname{sh} kl_2} = 2f_2;$$

$$\bar{r}_2 = \frac{k\bar{l}_2 \operatorname{ch} k\bar{l}_2 - \operatorname{sh} k\bar{l}_2}{k^2 \bar{l}_2^2 \operatorname{sh} k\bar{l}_2} = \frac{\frac{kl_2}{2} \operatorname{ch} \frac{kl_2}{2} - \operatorname{sh} \frac{kl_2}{2}}{\frac{k^2 l_2^2}{4} \operatorname{sh} \frac{kl_2}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{kl_2}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{kl_2}{2} - \operatorname{sh} \frac{kl_2}{2} \operatorname{ch} \frac{kl_2}{2}}{\frac{k^2 l_2^2}{4} \operatorname{sh} \frac{kl_2}{2} \operatorname{ch} \frac{kl_2}{2}} = 4 \frac{\frac{kl_2}{2} (\operatorname{ch} kl_2 + 1) - \operatorname{sh} kl_2}{k^2 l_2^2 \operatorname{sh} kl_2} = 4g_2 .$$

Знаменатель формул, полученных по методу сил:

$$D = \lambda_1 (\bar{b}_2 + \bar{i}_{2\omega} b_1) + l_1^2 \bar{i}_{2x} b_1 (\mu_1 \bar{b}_2 + \bar{i}_{2\omega}) =$$

$$= 2 [\lambda_1 (f_2 + i_{2\omega} b_1) + l_1^2 i_{2x} b_1 (\mu_1 f_2 + i_{2\omega})] = 2H .$$

После подстановки получим

$$B_D = \frac{m\bar{l}_2^2}{D} \bar{b}_2 \bar{r}_2 (\lambda_1 + l_1^2 \bar{i}_{2x} \mu_1 b_1) = \frac{ml_2^2}{4 \cdot 2H} 8g_2 f_2 (\lambda_1 + 2l_1^2 i_{2x} \mu_1 b_1) =$$

$$= \frac{ml_2^2 g_2 f_2}{H} (\lambda_1 + 2l_1^2 i_{2x} \mu_1 b_1) ;$$

$$B_A = \frac{m\bar{l}_2^2}{D} \bar{b}_2 \bar{r}_2 (\alpha_1 \lambda_1 - l_1^2 \bar{i}_{2x} b_1 \gamma_1) = \frac{ml_2^2 g_2 f_2}{H} (a_1 \lambda_1 - 2l_1^2 i_{2x} b_1 \gamma_1) ;$$

$$M_{\text{риг}} = \frac{m\bar{l}_2^2 l_1 \bar{i}_{2x}}{D} \alpha_1 b_1 \bar{b}_2 \bar{r}_2 = \frac{ml_2^2 l_1 2i_{2x}}{4 \cdot 2H} \alpha_1 b_1 8g_2 f_2 =$$

$$= \frac{2ml_2^2 l_1 i_{2x}}{H} \alpha_1 b_1 g_2 f_2 ;$$

$$M_{\text{оп.ст}} = m\bar{l}_2 = \frac{ml_2}{2} .$$

Сравнивая результаты расчета симметричной П-образной рамы по методу сил и по методу деформаций, мы видим, что расчет по методу деформаций значительно проще, чем по методу сил. Это остается справедливым не только при симметричной, но и при обратно симметричной нагрузке, так как в отличие от расчета этой рамы на изгиб в ее плоскости общее число неизвестных четное, равное четырем, а при расчете как на симметричную, так и на обратно симметричную нагрузку приходится иметь дело с двумя неизвестными.

§ 29. УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ РАМ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКОЙ

Для плоских рам с прямоугольной сеткой по типу, изображенному на рис. 197,*а*, уравнения метода деформаций можно составить в развернутом виде, т. е. с окончательными формулами для

всех коэффициентов. Число таких уравнений для каждого узла плоской рамы, как было установлено выше, будет равно четырем (считая, что расчет рамы на нагрузки, действующие в плоскости рамы, производится отдельно) в соответствии с четырьмя неизвестными перемещениями узла, каковыми являются: депланация θ', два угла поворота θ_I и θ_{II} вокруг осей взаимно-перпендикулярных стержней, сходящихся в узле, и линейное перемещение узла из плоскости рамы — Δ.

За основную систему, как было сказано выше, принимаем раму, образованную из заданной путем закрепления всех внеопорных узлов против перечисленных перемещений. Эти закрепления превращают заданную раму в совокупность однопролетных балок с

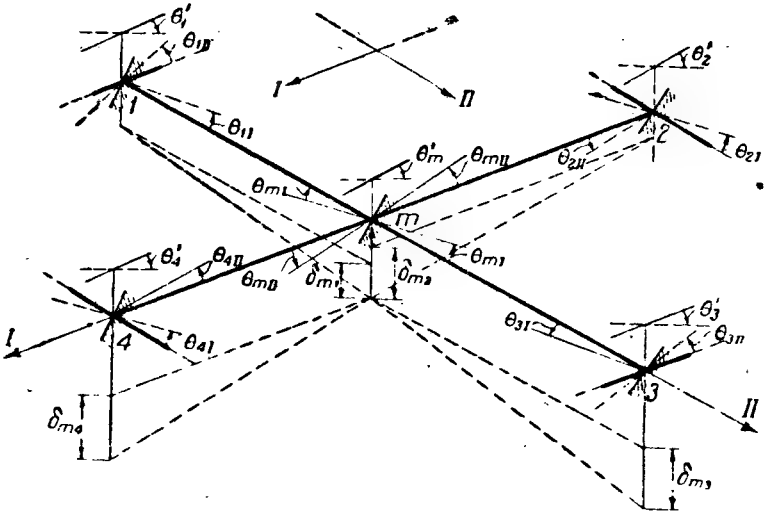


Рис. 227

несмещающимися и закрепленными против поворота и депланаций опорами.

Для вывода уравнений рассмотрим какой-нибудь промежуточный узел m рамы со всеми примыкающими к нему стержнями (рис. 227). Под обозначенными на этой фигуре закреплениями узла и концов стержней следует понимать закрепления одновременно от всех перечисленных выше перемещений.

Линии с римскими цифрами *I* и *II* представляют направления, параллельные соответствующим стержням рамы: стрелками показано принятое положительное направление.

Предположим, что рассматриваемый узел получил положительную депланацию θ'_m (верхняя фасонка узла повернулась относительно нижней фасонки по часовой стрелке), а противоположные концы стержней депланировали соответственно на положительные

величины θ'_1, θ'_2, θ'_3 и θ'_4. Кроме того, опоры каждого из стержней повернулись вокруг осей *I* и *II* на положительные углы θ_{mI}, θ_{1I}, θ_{2I}, ..., θ_{mII}, θ_{1II}, θ_{2II}, ... и, наконец, стержни получили взаимное линейное перемещение обоих концов из плоскости рамы на величины δ_{m1}, δ_{m2},...

Реактивный бимомент, который возникает в защемлении узла *m*, очевидно, представляет собой алгебраическую сумму реактивных бимоментов, вызванных деформацией каждого стержня в отдельности.

Воспользовавшись первой из формул (94) и обозначив предварительно бимоменты, вызванные внешней нагрузкой в защемлении узла *m*, через B^p_{mk} получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered}(i_{1\omega}\mu_1 + i_{2\omega}\mu_2 + i_{3\omega}\mu_3 + i_{4\omega}\mu_4)\theta'_m + i_{1\omega}\gamma_1\theta'_1 + i_{2\omega}\gamma_2\theta'_2 + i_{3\omega}\gamma_3\theta'_3 + \\ + i_{4\omega}\gamma_4\theta'_4 - i_{1\omega}\frac{\alpha_1}{l_1}(\theta_{mII} - \theta_{1II}) + i_{3\omega}\frac{\alpha_3}{l_3}(\theta_{mII} - \theta_{3II}) - \\ - i_{2\omega}\frac{\alpha_2}{l_2}(\theta_{mI} - \theta_{2I}) + i_{4\omega}\frac{\alpha_4}{l_4}(\theta_{mI} - \theta_{4I}) + \\ + B^p_{m1} + B^p_{m2} + B^p_{m3} + B^p_{m4} = 0,\end{gathered} \tag{109}$$

которое сокращенно и в более общем виде можно записать так:

$$\begin{gathered}\theta'_m \sum_k i_{k\omega}\mu_k + \sum_k i_{k\omega}\gamma_k\theta'_k + \left(i^{\text{прав}}_{\omega}\frac{\alpha_{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}} \quad i^{\text{лев}}_{\omega}\frac{\alpha_{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\right)_{\text{I}}\theta_{mI} + \\ + \left(i^{\text{праз}}_{\omega}\frac{\alpha_{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}} - i^{\text{лсв}}_{\omega}\frac{\alpha_{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\right)_{\text{II}}\theta_{mII} - \\ - \left(i^{\text{прав}}_{\omega}\frac{\alpha_{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}\theta^{\text{прав}}_{\text{I}} - i^{\text{лев}}_{\omega}\frac{\alpha_{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\theta^{\text{лев}}_{\text{I}}\right)_{\text{I}} - \\ - \left(i^{\text{прав}}_{\omega}\frac{\alpha_{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}\theta^{\text{прав}}_{\text{II}} - i^{\text{лев}}_{\omega}\frac{\alpha_{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\theta^{\text{лев}}_{\text{II}}\right)_{\text{II}} + \Sigma B^p_{mk} = 0,\end{gathered} \tag{110}$$

где суммирование распространяется на все стержни, жестко (нешарнирно для депланаций) прикрепленные к узлу *m*. Здесь $i_{k\omega} = \frac{EJ_{\omega(k)}}{l_k}$ — погонная секториальная жесткость соответствующего стержня.

Формулы и численные значения коэффициентов μ, γ и α следует брать из приложений 10 и 11.

Индексы «прав» и «лев» относятся к стержням или узлам, расположенным справа или слева от узла *m*, если смотреть на соответствующую ось (*I* или *II*) так, чтобы для наблюдателя указанное на рис. 227 положительное направление шло слева направо.

Значки *I* и *II* указывают ту ось, по направлению которой следует принимать правый и левый смежные с узлом *m* стержни.

Уравнение (110) пишется в таком виде только для рамы, у которой нет шарниров для депланаций.

Если же какой-нибудь стержень, жестко соединенный с узлом m, имеет на противоположном конце шарнир для депланаций, то в уравнении (110) значение θ'_k, соответствующее этому стержню, следует принять равным нулю, а коэффициенты μ и α для этого стержня заменить коэффициентом β, формула и численные значения которого даны также в приложениях 10 и 11.

Физический смысл уравнения (110) — равенство нулю реактивного бимомента в закреплении узла m.

Уравнение (110) справедливо не только для рам с прямоугольной сеткой, но и для любой плоской рамы с прямолинейными тонкостенными стержнями постоянного сечения.

Составим теперь уравнения метода деформаций, соответствующие двум другим неизвестным перемещениям узла m, а именно поворотам его вокруг осей I и II.

Первое из них будет иметь следующий вид:

$$\left(-i_{2\omega}\frac{\alpha_2}{l_2}+i_{4\omega}\frac{\alpha_4}{l_4}\right)\theta'_m-i_{2\omega}\frac{\alpha_2}{l_2}\theta'_2+i_{4\omega}\frac{\alpha_4}{l_4}\theta'_4+$$
$$+\left(i_{2\omega}\frac{\lambda_2}{l_2^2}+i_{4\omega}\frac{\lambda_4}{l_4^2}+4i_{1x}+4i_{3x}\right)\theta_{m\mathrm{I}}-i_{2\omega}\frac{\lambda_2}{l_2^2}\theta_{2\mathrm{I}}-$$
$$-i_{4\omega}\frac{\lambda_4}{l_4^2}\theta_{4\mathrm{I}}+2i_{1x}\theta_{1\mathrm{I}}+2i_{3x}\theta_{3\mathrm{I}}+\frac{6i_{1x}}{l_1^2}\delta_{m1}+$$
$$+\frac{6i_{3x}}{l_3^2}\delta_{m3}+M^p_{m1}+M^p_{m3}+L^p_{m2}+L^p_{m4}=0,$$

или в сокращенной записи

$$\left(i_{\omega}^{\text{прав}}\frac{\alpha_{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}\,i_{\omega}^{\text{лев}}\frac{\alpha_{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\right)\theta'_m+\left(i_{\omega}^{\text{прав}}\frac{\alpha_{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}\theta'_{\text{прав}}-i_{\omega}^{\text{лев}}\frac{\alpha_{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\theta'_{\text{лев}}\right)_{\mathrm{I}}+$$
$$+\sum_{\mathrm{I}}i_{k\omega}\frac{\lambda_k}{l_k^2}(\theta_{m\mathrm{I}}-\theta_{k\mathrm{I}})+2\sum_{\mathrm{II}}i_{kx}(2\theta_{m\mathrm{I}}+\theta_{k\mathrm{I}})+6\sum_{\mathrm{II}}\frac{i_{kx}}{l_k^2}\delta_{mk}+$$
$$+\sum_{\mathrm{II}}M^p_{mk}+\sum_{\mathrm{I}}L^p_{mk}=0, \qquad (111)$$

где суммирование распространяется только на стержни, расположенные на указанном (I или II) направлении. M^p_{mk} и L^p_{mk} — соответственно изгибающие и крутящие моменты, вызванные внешней нагрузкой в защемлении узла m.

Физический смысл уравнения (111) — равенство нулю реактивного крутящего момента вокруг оси I в закреплении узла m.

Аналогично получим уравнение, выражающее равенство нулю реактивного крутящего момента в закреплении узла m вокруг оси II

$$\left(i_{\omega}^{\text{прав}}\frac{\alpha_{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}i_{\omega}^{\text{лев}}\frac{\alpha_{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\right)_{\text{II}}\theta'_m+\left(i_{\omega}^{\text{прав}}\frac{\alpha_{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}\theta'_{\text{прав}}-i_{\omega}^{\text{лев}}\frac{\alpha_{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\theta'_{\text{лев}}\right)_{\text{II}}+$$

$$+\sum_{\text{II}}i_{k\omega}\frac{\lambda_k}{l_k^2}(\theta_{m\text{II}}-\theta_{k\text{II}})+2\sum_{\text{I}}i_{kx}(2\theta_{m\text{II}}+\theta_{k\text{II}})+$$

$$+6\sum_{\text{I}}\frac{i_{kx}}{l_k^2}\delta_{mk}+\sum_{\text{I}}M_{mk}^p+\sum_{\text{II}}L_{mk}^p=0. \qquad (112)$$

Наконец, четвертое уравнение, соответствующее линейному смещению узла m из плоскости рамы и выражающее ту мысль, что опорная реакция в связи, закрепляющей узел от указанного перемещения, равна нулю, напишется так:

$$\frac{6i_{1x}}{l_1}(\theta_{m\text{I}}+\theta_{1\text{I}})-\frac{6i_{3x}}{l_3}(\theta_{m\text{I}}+\theta_{3\text{I}})-\frac{i_{2x}}{l_2}(\theta_{m\text{II}}+\theta_{2\text{II}})+$$

$$+\frac{6i_{4x}}{l_4}(\theta_{m\text{II}}+\theta_{4\text{II}})+\frac{12i_{1x}}{l_1^2}\delta_{m1}-\frac{12i_{3x}}{l_3^2}\delta_{m3}+\frac{12i_{2x}}{l_2^2}\delta_{m2}-$$

$$-\frac{12i_{4x}}{l_4^2}\delta_{m4}+R_{m\text{I}}^p+R_{m2}^p+R_{m3}^p+R_{m4}^p=0,$$

или

$$-\left(\frac{6i_x^{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}-\frac{6i_x^{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\right)\theta_{m\text{I}}-\left(\frac{6i_x^{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}-\frac{6i_x^{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\right)\theta_{m\text{II}}-$$

$$-\left(\frac{6i_x^{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}\theta_{\text{I}}^{\text{пр}}-\frac{6i_x^{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\theta_{\text{I}}^{\text{лев}}\right)_{\text{II}}-\left(\frac{6i_x^{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}\theta_{\text{II}}^{\text{прав}}-\frac{6i_x^{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}}\theta_{\text{II}}^{\text{лев}}\right)_{\text{I}}-$$

$$-\sum_{\text{I,II}}\left(\frac{12i_x^{\text{прав}}}{l_{\text{прав}}}\delta_{\text{прав}}-\frac{12i_x^{\text{лев}}}{l_{\text{лев}}^2}\delta_{\text{лев}}\right)+\sum_{k}R_{mk}^p=0,$$

где R_{mk} — реакция, вызванная внешней нагрузкой в защемлении узла m. Реакции, направленные вверх, следует подставлять в уравнение (113) со знаком минус, а направленные вниз — со знаком плюс.

Уравнения (111), (112) и (113) выведены в предположении, что ни один из стержней, сходящихся в узле m, не имеет ни на одном конце шарниров для депланаций и шарниров, допускающих повороты сечений из плоскости рамы.

Если какой-нибудь из стержней, жестко соединенных с узлом m, на другом конце имеет шарнир для депланаций, то для этого стержня в уравнении (111) и (112) значение θ', соответствующее шарнирному концу, следует принять равным нулю, а коэффициенты α и λ для этого стержня заменить соответственно коэффициентами β и ρ.

Если шарнир для депланаций имеется в месте примыкания какого-нибудь стержня к узлу m, то в первых слагаемых формул

(111) и (112) соответствующий этому стержню член будет вовсе отсутствовать. Коэффициенты же α и λ для этого стержня в других слагаемых формул (111) и (112) следует, как и в предыдущем случае, заменить соответственно коэффициентами β и ρ.

Если шарниры для депланаций имеются на обоих концах какого-нибудь стержня, то соответствующие члены в первом и втором слагаемых формул (111) и (112) будут вовсе отсутствовать, а коэффициент λ в третьих слагаемых этих формул для шарнирного по концам стержня следует заменить коэффициентом $\frac{1}{\varphi}$.

Если какой-нибудь из стержней, жестко соединенных с узлом m, на другом конце может свободно поворачиваться из плоскости рамы, то соответствующее значение θ для этого конца стержня в четвертых слагаемых формул (111) и (112) и в третьем или в четвертом слагаемом формулы (113) следует принять равным нулю, а коэффициент 2 в скобках четвертого слагаемого формул (111) и (112) следует заменить коэффициентом 1,5. Кроме того, в пятых слагаемых формул (111), (112) и (113) коэффициенты 6 и 12 для шарнирного на противоположном конце стержня следует заменить коэффициентом 3.

Если шарнир, допускающий свободный поворот конца стержня из плоскости рамы, имеется в месте примыкания какого-нибудь стержня к узлу m, то величина θ, относящаяся к этому стержню в четвертых слагаемых формул (111) и (112), будет вовсе отсутствовать, а в пятых слагаемых тех же формул коэффициент 6 следует заменить коэффициентом 3. В формуле же (113) все коэффициенты, как 6, так и 12, в выражениях для этого стержня следует заменить коэффициентом 3.

Если шарниры, допускающие свободный поворот из плоскости рамы, имеются на обоих концах какого-нибудь стержня, то величина θ, относящаяся к этому стержню в третьем, четвертом и пятом слагаемых формул (111), (112) и (113), будет вовсе отсутствовать.

При помощи величин θ', θ_{I} и θ_{II}, найденных из уравнений метода деформаций, нетрудно определить по формулам § 24 настоящей главы реактивные бимоменты и общие крутящие моменты, приложенные по концам каждого стержня, а затем построить окончательные эпюры бимоментов, изгибающих и крутящих моментов.

ГЛАВА VI

РАСЧЕТ РАМ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО СПОСОБУ БИМОМЕНТНЫХ ФОКУСНЫХ ОТНОШЕНИЙ

§ 30. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОСНОВНЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ В РАМАХ С НЕСМЕЩАЮЩИМИСЯ УЗЛАМИ

Пусть дана плоская рама из тонкостенных элементов, не имеющая замкнутых контуров, и пусть внеопорные узлы этой рамы закреплены против поворота относительно любой оси, лежащей в

плоскости рамы, и против линейного смещения из плоскости рамы, или, что все равно, пусть геометрические размеры стержней этой рамы таковы, что перечисленные возможные смещения практического влияния не оказывают на эпюру бимоментов и этими смещениями можно пренебречь.

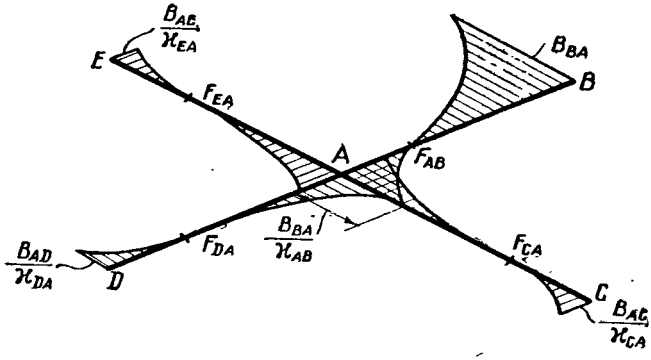


Рис. 228

Выделим какой-нибудь узел A этой рамы с жестко прикрепленными к нему стержнями AB, AC, AD и AE (рис. 228).

По условию задачи все узлы рамы неподвижны, следовательно, концевые сечения стержней могут только депланировать.

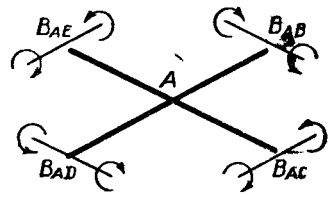


Рис. 229

Будем предполагать, что внешняя нагрузка расположена только справа от сечения B. Тогда действие части рамы, расположенной справа от B, на рассматриваемую часть можно заменить бимоментом B_{BA}.

Примем за неизвестные две группы не зависящих от внешней нагрузки отношений:

во-первых, отношения большего к меньшему концевых бимоментов каждого стержня

$$\frac{B_{BA}}{B_{AB}} = \varkappa_{AB}, \quad \frac{B_{AC}}{B_{CA}} = \varkappa_{CA}, \quad \frac{B_{AD}}{B_{DA}} = \varkappa_{DA} \text{ и } \frac{B_{AE}}{B_{EA}} = \varkappa_{EA}, \qquad (114)$$

которые мы в § 13 назвали бимоментными фокусными отношениями, и, во-вторых, отношения к бимоменту B_{AB} тех бимоментов, которые он вызывает в сечении A трех остальных стержней, сходящихся в узле A:

$$\nu_{BAC} = \frac{B_{AC}}{B_{AB}}, \quad \nu_{BAD} = \frac{B_{AD}}{B_{AB}} \text{ и } \nu_{BAE} = \frac{B_{AE}}{B_{AB}}. \qquad (115)$$

Отношения (115) принято называть **коэффициентами распределения**.

Первые две буквы в обозначениях этих коэффициентов указывают наименование стержня, передающего бимомент, а последние два (считая среднюю букву второй раз) — наименование стержня, воспринимающего бимомент.

Будем считать, что знаки бимоментов B_{AC}, B_{AD} и B_E противоположны знаку бимомента B_{AB}. Принятые для вывода формул направления бимоментов представлены на рис. 229.

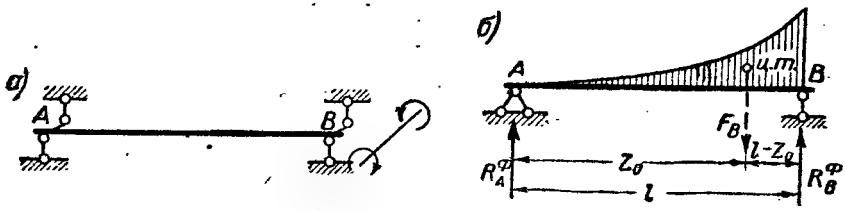


Рис. 230

Для дальнейшего нам необходимо иметь готовые формулы для депланаций опорных сечений шарнирно закрепленной по концам балки, загруженной бимоментами на одном конце (рис. 230,*а*).

По формулам (24)

$$\theta'_A = \frac{R_A^\Phi}{EJ_\omega} \text{ и } \theta'_B = \frac{R_B^\Phi}{EJ_\omega}.$$

Фиктивные опорные реакции от бимоментной нагрузки R_A^Φ и R_B^Φ (рис. 230,*б*) определим по формулам табл. 41

$$R_A^\Phi = \frac{F_B(l-z_0)}{l} = \frac{Blfl\eta}{l} = Blf\eta = Bls;$$

$$R_B^\Phi = \frac{F_B z_0}{l} = \frac{Blfl\xi}{l} = Blf\xi = Blr.$$

Здесь использованы формулы приложения 10

$$f\eta = s \text{ и } f\xi = r.$$

После подстановки получаем

$$\theta'_A = \frac{Bls}{EJ_\omega} \text{ и } \theta'_B = \frac{Blr}{EJ_\omega}. \qquad (116)$$

Вследствие жесткого прикрепления стержней к узлу A взаимная депланация любой пары из них равна нулю. Например, для стержней AB и AC это условие запишется так:

$$\theta'_{AB} = \theta'_{AC}$$

или в развернутом виде по формулам (116)

$$\frac{B_{BA}\, l_{AB}\, s_{AB}}{EJ_{\omega(AB)}} - \frac{B_{AB}\, l_{AB}\, r_{AB}}{EJ_{\omega(AB)}} = \frac{B_{AC}\, l_{AC}\, r_{AC}}{EJ_{\omega(AC)}} - \frac{B_{CA}\, l_{AC}\, s_{AC}}{EJ_{\omega(AC)}}.$$

Введя обозначения погонных секториальных жесткостей

$$i_{\omega(AB)} = \frac{EJ_{\omega(AB)}}{l_{AB}} \text{ и } i_{\omega(AC)} = \frac{EJ_{\omega(AC)}}{l_{AC}} \tag{117}$$

и воспользовавшись формулами (114) и (115), получим

$$\frac{B_{BA}}{i_{\omega(AB)}}\left(s_{AB} - \frac{r_{AB}}{\varkappa_{AB}}\right) = \frac{B_{AC}}{i_{\omega(AC)}}\left(r_{AC} - \frac{s_{AC}}{\varkappa_{CA}}\right),$$

или

$$\frac{B_{BA}}{i_{\omega(AB)}}\left(s_{AB} - \frac{r_{AB}}{\varkappa_{AB}}\right) = \frac{B_{BA}\,\nu_{BAC}}{\varkappa_{AB}\, i_{\omega(AC)}}\left(r_{AC} - \frac{s_{AC}}{\varkappa_{CA}}\right), \tag{118}$$

откуда

$$\nu_{BAC} = \frac{(\varkappa_{AB}\, s_{AB} - r_{AB})\,\varkappa_{CA}\, i_{\omega(AC)}}{(\varkappa_{CA}\, r_{AC} - s_{AC})\, i_{\omega(AB)}}.$$

Совершенно таким же образом можно выразить коэффициенты распределения ν_{BAD} и ν_{BAE}. Для этого в формуле (118) достаточно заменить букву C соответственно буквами D или E.

Далее мы увидим, что для любого стержня рамы фокусное отношение $\varkappa$ всегда больше $\frac{r}{s}$, и, кроме того, $r > s$, поэтому коэффициенты распределения, вычисленные по формуле (118), всегда будут положительны.

Бимоменты, действующие на узел A (рис. 229), связаны между собой условием

$$B_{AB} - B_{AC} - B_{AD} - B_{AE} = 0.$$

Подставив в это условие значение трех последних слагаемых из формулы (115), получим

$$B_{AB} - B_{AB}\,\nu_{BAC} - B_{AB}\,\nu_{BAD} - B_{AB}\,\nu_{BAE} = 0,$$

откуда

$$\nu_{BAC} + \nu_{BAD} + \nu_{BAE} = 1. \tag{119}$$

Условие (119) показывает, что сумма коэффициентов распределения бимоментов от одного стержня по всем остальным в узле плоской рамы из тонкостенных элементов равна единице.

Выразив коэффициенты распределения в формуле (119) через бимоментные фокусные отношения по формуле (118), получим

$$\frac{(\varkappa_{AB}\, s_{AB} - r_{AB})\, \varkappa_{CA}\, i_{\omega(AC)}}{(\varkappa_{CA}\, r_{AC} - s_{AC})\, i_{\omega(AB)}} + \frac{(\varkappa_{AB}\, s_{AB} - r_{AB})\, \varkappa_{DA}\, i_{\omega(AD)}}{(\varkappa_{DA}\, r_{AD} - s_{AD})\, i_{\omega(AB)}} + \frac{(\varkappa_{AB}\, s_{AB} - r_{AB})\, \varkappa_{EA}\, i_{\omega(AE)}}{(\varkappa_{EA}\, r_{AE} - s_{AE})\, i_{\omega(AB)}} = 1,$$

откуда

$$\varkappa_{AB} = \frac{r_{AB}}{s_{AB}} + \frac{i_{\omega(AB)}}{s_{AB}\left(\dfrac{i_{\omega(AC)}}{r_{AC} - \dfrac{s_{AC}}{\varkappa_{CA}}} + \dfrac{i_{\omega(AD)}}{r_{AD} - \dfrac{s_{AD}}{\varkappa_{DA}}} + \dfrac{i_{\omega(AE)}}{r_{AE} - \dfrac{s_{AE}}{\varkappa_{EA}}}\right)} = \frac{r_{AB}}{s_{AB}} + \frac{i_{\omega(AB)}}{s_{AB} \sum\limits_{A} \dfrac{i_{\omega(AN)}}{r_{AN} - \dfrac{s_{AN}}{\varkappa_{NA}}}}, \qquad (120)$$

где Σ распространяется на все стержни узла A, кроме стержня AB, а через N обозначены противоположные концы стержней.

Формула (120) показывает, что бимоментные фокусные отношения зависят не от абсолютных, а лишь от относительных значений погонных секториальных жесткостей стержней. По этой формуле определяется прилежащий к узлу A бимоментный фокус стержня AB, если известны противоположные фокусные отношения всех остальных сходящихся в узле A стержней.

Если конец стержня AB в месте прикрепления к узлу A имеет шарнир для депланаций, то при пользовании формулой (120) можно считать, что он прикреплен к узлу жестко, а секториальная жесткость прочих стержней равна нулю.

Положив в этом случае в формуле (120) $i_{\omega(AN)} = 0$, получим $\varkappa_{AB} = \infty$.

Если конец A стержня AB защемлен против депланации, то можно принять, что один или же все остальные стержни обладают бесконечно большой секториальной жесткостью. Положив для этого случая в формуле (120) $i_{\omega(AN)} = \infty$, получим

$$\varkappa_{AB} = \frac{r_{AB}}{s_{AB}}.$$

Такой же результат мы получили и в § 13 при изложении теории бимоментных фокусов для расчета неразрезных балок на кручение.

Для построения эпюры бимоментов от нагрузки, расположенной на одном из стержней, необходимо иметь формулы для конце-

вых бимоментов загруженного стержня. Формулы эти нами были уже получены в § 14.

В принятых здесь обозначениях они будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} B_{AB} &= -\frac{S_{BA}\varkappa_{BA} - S_{AB}}{\varkappa_{AB}\varkappa_{BA} - 1}; \\ B_{BA} &= -\frac{S_{AB}\varkappa_{AB} - S_{BA}}{\varkappa_{AB}\varkappa_{BA} - 1}, \end{aligned}\right\} \qquad (121)$$

где

$$S_{AB} = \frac{R^{\text{ф}}_{BA}}{l_{AB}\, s_{AB}} \quad \text{и} \quad S_{BA} = \frac{R^{\text{ф}}_{AB}}{l_{AB}\, s_{AB}}. \qquad (122)$$

В том случае, когда будут нагружены одновременно несколько пролетов рассчитываемой рамы, окончательная эпюра бимоментов получается путем суммирования эпюр, получаемых от загружения каждого пролета в отдельности.

Если заданная для расчета плоская рама будет иметь один или несколько замкнутых контуров, то, как известно из теории моментных фокусов, фокусных отношений в замкнутом бесшарнирном контуре, в том смысле, какой они имеют в рамах с незамкнутыми контурами, не существует. Это понятие здесь носит условный характер. Подробное и весьма обстоятельное изложение особенностей понятия о фокусных отношениях и фокусах в применении к замкнутым контурам имеется в курсе профессора И. М. Рабиновича «Методы расчета рам», ч. III, 1932 г. Все изложенное в этой работе о моментных фокусах остается справедливым и для бимоментных фокусов замкнутых контуров.

Практически же бимоментные фокусные отношения для элементов замкнутого контура рекомендуется определять так. Прежде всего следует задаться наугад одним из бимоментных фокусных отношений, памятуя, что $\varkappa$ всегда больше $\frac{r}{s}$ [см. формулу (120)]. Затем, подставив его в формулу (120), вычислить приближенное значение следующего фокусного отношения и т. д. При этом мы получим для каждого фокусного отношения быстро сходящийся ряд приближенных значений. Существует и точный способ определения фокусных отношений (см. указанную выше книгу проф. Рабиновича), но для практических целей он менее удобен.

После того как вычислены погонные секториальные жесткости стержней и бимоментные фокусные отношения, определяют по формулам (121) бимоменты по концам загруженного пролета. Затем правый опорный бимомент передается дальше при помощи бимоментных фокусных отношений через все стержни рамы по часовой стрелке до тех пор, пока ординаты эпюры не сделаются достаточно малыми. Левый опорный бимомент передается анало-

гичным образом стержням контура по направлению обхода, обратному часовой стрелке. Все эти эпюры алгебраически складываются между собой.

§ 31. РАСЧЕТ РАМЫ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО МЕТОДУ БИМОМЕНТНЫХ ФОКУСОВ

Пример 19. Рассчитаем по методу бимоментных фокусов уже рассчитанную по методу сил в § 20 и по методу деформаций в § 26 Г-образную раму, защемленную по концам против изгиба, закручивания и депланаций (рис. 202, *а*). Внеопорный узел *A* этой рамы считаем несмещаемым, т. е. защемленным против поворота и линейных перемещений из плоскости рамы. Нагрузка — равномерно распределенные по всей длине стержня *AD* закручивающие моменты интенсивности *m* (рис. 231).

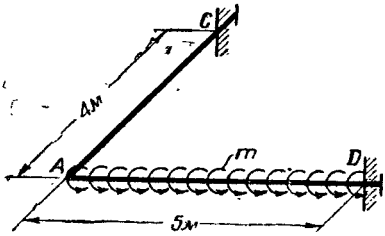


Рис. 231

Принимая погонную секториальную жесткость стержня *AC* равной единице ($i_{\omega(AC)}=1$), получим относительную величину погонной секториальной жесткости стержня

$$i_{\omega(AD)} = i_{\omega(AC)} \frac{l_{AC}}{l_{AD}} = 1 \cdot \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

По условиям закрепления концов бимоментные фокусные отношения

$$\varkappa_{CA} = \frac{r_{AC}}{s_{AC}} = \frac{0{,}225}{0{,}0788} = 2{,}86;$$

$$\varkappa_{DA} = \frac{r_{AD}}{s_{AD}} = \frac{0{,}198}{0{,}0597} = 3{,}32.$$

По формуле (120)

$$\chi_{AC} = \frac{r_{AC}}{s_{AC}} + \frac{i_{\omega(AC)}}{s_{AC} \cdot \dfrac{i_{\omega(AD)}}{r_{AD} - \dfrac{s_{AD}}{\varkappa_{DA}}}} = \frac{0{,}225}{0{,}0788} +$$

$$+ \frac{1}{0{,}0788 \dfrac{0{,}8}{0{,}198 - \dfrac{0{,}0597}{3{,}32}}} = 2{,}86 + 2{,}85 = 5{,}71;$$

$$\varkappa_{AD} = \frac{r_{AD}}{s_{AD}} + \frac{i_{\omega(AD)}}{s_{AD} - \dfrac{i_{\omega(AC)}}{r_{AC} - \dfrac{s_{AC}}{\varkappa_{CA}}}} = \frac{0,198}{0,0597} +$$

$$+ \frac{0,8}{0,0597 - \dfrac{1}{0,225 - \dfrac{0,0788}{2,86}}} = 3,32 + 2,64 = 5,96.$$

По формуле (122)

$$S_{AD} = S_{DA} = \frac{R^{\Phi}_{DA}}{l_{AD}\, s_{AD}} = \frac{m l^3_{AD}\, t_{AD}}{2 l_{AD}\, s_{AD}} = \frac{m l^2_{AD}}{2\gamma_{AD}} =$$

$$= \frac{500^2}{2 \cdot 1,68}\, m = 74\,400\, m\ кгсм^2\ (m \text{ в } кг),$$

так как по формулам приложения 10

$$s = \gamma t.$$

Тогда искомые бимоменты в узле и на опорах по формулам (121) будут равны

$$B_{DA} = \frac{-S_{AD}\varkappa_{AD} - S_{DA}}{\varkappa_{AD}\varkappa_{DA} - 1} = -\frac{74\,400m\,(5,96 - 1)}{5,96 \cdot 3,32 - 1} =$$

$$= -74\,400m \cdot 0,264 = -19\,640m\ кгсм^2;$$

$$B_{AD} = B_{AC} = -\frac{S_{DA}\varkappa_{DA} - S_{AD}}{\varkappa_{AD}\varkappa_{DA} - 1} = -\frac{74\,400m\,(3,32 - 1)}{5,96 \cdot 3,32 - 1} =$$

$$= -74\,400m \cdot 0,123 = -9150m\ кгсм^2;$$

$$B_{CA} = -\frac{B_{AC}}{\varkappa_{CA}} = \frac{9150m}{2,86} = 3\,200m\ кгсм^2.$$

Сравнивая вычисленные значения бимоментов с соответствующими величинами, полученными при решении этой рамы по методу сил (рис. 204) или по методу деформаций (§ 26), мы обнаруживаем лишь незначительное расхождение между ними, не превышающее 1%, хотя здесь при решении этой рамы мы пренебрегли угловыми и линейными смещениями узлов. Доказательство правильности этого чрезвычайно важного для практических расчетов вывода в более общем виде приведено в следующей главе настоящей работы.

Если мы эту или какую-либо раму пожелаем рассчитать по методу бимоментных фокусов более точно, а именно с учетом смещаемости узлов, то во все внеопорные узлы рамы следует ввести дополнительные связи, закрепляющие узел против поворотов во-

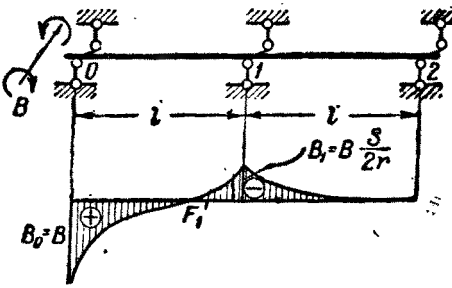


Рис. 232

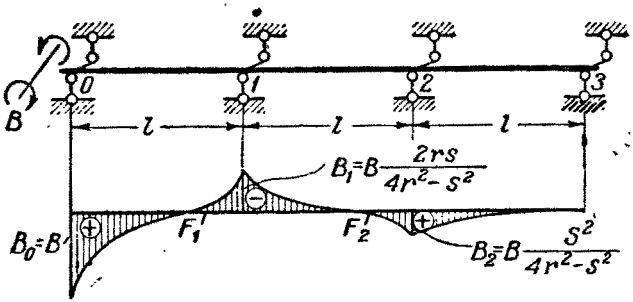


Рис. 233

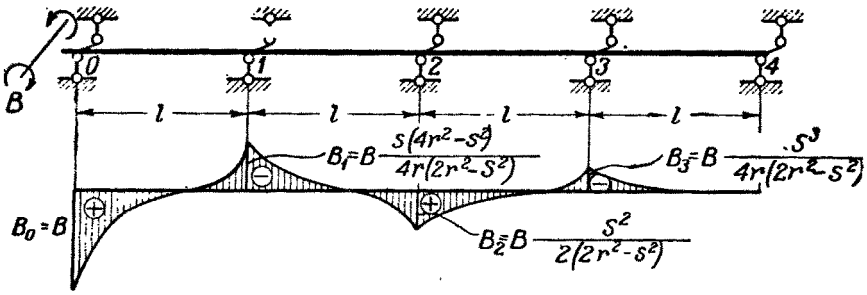


Рис. 234

круг каких-либо двух непараллельных осей, лежащих в плоскости рамы, и против линейных перемещений из плоскости рамы. Смещения же в плоскости рамы по указанным в предыдущей главе причинам нас не будут интересовать. Затем закрепленную таким образом раму следует рассчитать по формулам предыдущего параграфа как раму с несмещающимися узлами на заданные внешние нагрузки и на единичные смещения узлов и, наконец, составив соответствующие уравнения метода деформаций, определить действительные перемещения узлов и построить окончательную эпюру бимоментов.

Так как число таких перемещений для каждого узла плоской рамы равно трем (не считая смещений в плоскости рамы), то поэтому общее число дополнительных уравнений может оказаться настолько большим, что преимущества метода фокусных отношений, избавляющего расчетчика от необходимости решать систему совместных уравнений, сведутся к нулю. Кроме того, реакции в связях от поворотов узлов рамы возникают не только от закручивания, но и от изгиба стержней, поэтому для расчета по методу фокусов рамы со смещающимися узлами необходимо предварительно определять не только бимоментные, но и моментные фокусные точки. Имея в виду все эти соображения и, кроме того, указанное выше малое влияние смещений узлов на величины бимоментов, мы считаем излишним приводить здесь подробно изложение расчета рам со смещающимися узлами по методу бимоментных фокусов тем более, что здесь нет ничего принципиально нового по сравнению с соответствующим разделом элементарного курса строительной механики.

ГЛАВА VII

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОЧНЫХ И РАМНЫХ СИСТЕМ НА КРУЧЕНИЕ

§ 32. СТЕПЕНЬ ЗАТУХАНИЯ ОПОРНЫХ БИМОМЕНТОВ ПО ДЛИНЕ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ

Рассмотрим неразрезную равнопролетную постоянного сечения тонкостенную балку, нагруженную бимоментом B на левом конце.

Поскольку закручивающая нагрузка в пролетах отсутствует, бимоменты, возникающие на опорах этой балки, можно определить непосредственно по формулам (56) и (58), а именно:

двухпролетная балка (рис. 232)

$$\varkappa_2' = \infty\,; \quad \varkappa_1' = \frac{r}{s} + 1\left(\frac{r}{s} - 1\,\frac{1}{\infty}\right) = \frac{2r}{s}\,;$$

$$B_0 = B,\ B_1 = -\frac{B}{\varkappa_1'} = -B\,\frac{s}{2r}\,;\ B_2 = 0\,;$$

трехпролетная балка (рис. 233)

$$\varkappa_3' = \infty\,;\ \varkappa_2' = \frac{2r}{s}\,;\ \varkappa_1' = \frac{r}{s} + \frac{r}{s} - \frac{s}{2r} = \frac{4r^2 - s^2}{2rs}\,;$$

$$B_0 = B\,,\ B_1 = -\frac{B}{\varkappa_1'} = -B\frac{2rs}{4r^2 - s^2}\,,$$

$$B_2 = -\frac{B_1}{\varkappa_1'} = B\frac{2rs}{4r^2 - s^2}\cdot\frac{s}{2r} = B\frac{s^2}{4r^2 - s^2}\,;$$

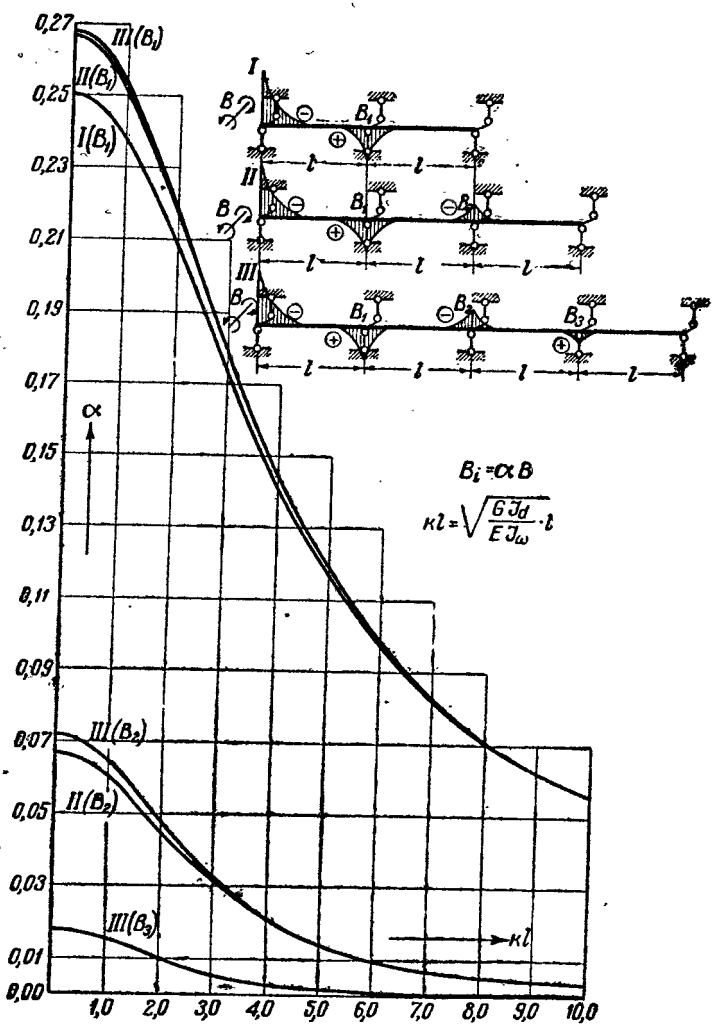


Рис. 235

четырехпролетная балка (рис. 234)

$$\varkappa_4' = \infty;\ \varkappa_3' = \frac{2r}{s};\ \varkappa_2' = \frac{4r^2 - s^2}{2rs};$$

$$\varkappa_1' = \frac{r}{s} + \frac{r}{s} - \frac{2rs}{4r^2 - s^2} = \frac{4r(2r^2 - s^2)}{s(4r^2 - s^2)};$$

$$B_0 = B,\ B_1 = -\frac{B}{\varkappa_1'} = -B\frac{s(4r^2 - s^2)}{4r(2r^2 - s^2)};$$

$$B_2 = -\frac{B_1}{\varkappa_2'} = B\frac{s(4r^2 - s^2)}{4r(2r^2 - s^2)} \cdot \frac{2rs}{4r^2 - s^2} = B\frac{s^2}{2(2r^2 - s^2)};$$

$$B_3 = -\frac{B_2}{\varkappa_3'} = -B\frac{s^2}{2(2r^2 - s^2)} \cdot \frac{s}{2r} = -B\frac{s^3}{4r(2r^2 - s^2)}.$$

По этим формулам на графике рис. 235 нами построены кривые соответствующих опорных бимоментов в зависимости от величины упругой изгибно-крутильной характеристики балки $kl = l\sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$. Значения r и s взяты из приложения 11.

По оси абсцисс на этом графике отложены значения kl, а по оси ординат — коэффициенты α, считая, что $B_i = \alpha B (i = 1, 2, 3...)$.

При $kl = 0$ для идеального тонкостенного стержня коэффициенты α имеют такие же значения, как и для опорных изгибающих моментов в соответствующих неразрезных балках.

Для некоторых значений kl коэффициенты α выписаны в форме табл. 51.

Рассматривая кривые графика рис. 235 и табл. 51, нетрудно сделать следующие выводы.

Таблица 51

Коэффициенты α для опорных бимоментов неразрезных равнопролетных балок, не загруженных в пролетах

Типы балок	$B_i = \alpha B$					
	$kl = 0$			$kl = 3$		
	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3
Двухпролетная	0,250			0,174		
Трехпролетная	0,267	0,0667		0,179	0,0319	
Четырехпролетная . . .	0,268	0,0715	0,0179	0,1795	0,0329	0,00560

Типы балок	$B_i = \alpha B$					
	$kl = 5$			$kl = 10$		
	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3
Двухпролетная	0,117			0,0555		
Трехпролетная	0,118	0,0138		0,0557	0,00309	
Четырехпролетная . . .	0,118	0,0140	0,00163	0,0557	0,00310	0,00017

1. Степень затухания бимомента по длине неразрезной тонкостенной балки очень мало зависит от числа пролетов. Разница в величинах бимоментов для сварных и клепаных балок металлических конструкций ($kl=2\div5$) не превышает 2—3%, а для прокатных балок ($kl=5\div15$) не превышает 1%.

2. Изгибно-крутящие бимоменты по длине балки затухают быстрее изгибающих моментов при изгибе неразрезных балок.

При практических значениях kl бимомент B_1 составляет не более 20%, B_2 — не более 4% и B_3 — не более 1% от величины действующего на крайней левой опоре бимомента B.

Поэтому в практических расчетах можно ограничиться учетом влияния опорного бимомента лишь на смежные опоры, а именно влияние крайнего левого опорного момента распространить только на ближайшую правую опору, крайнего правого — на ближайшую левую опору и, наконец, влияние бимомента, действующего на какой-нибудь из промежуточных опор, распространить лишь на две смежные с ней опоры.

3. В случае необходимости учесть влияние опорного бимомента более точно или для балок, у которых $kl<2$, рекомендуется пользоваться графиком рис. 235, как расчетным.

§ 33. ОПОРНЫЕ БИМОМЕНТЫ В НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛКАХ ПРИ ЗАГРУЖЕНИИ ИХ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ВСЕЙ ДЛИНЕ ЗАКРУЧИВАЮЩЕЙ НАГРУЗКОЙ

Рассмотрим неразрезную постоянного сечения равнопролетную тонкостенную балку, нагруженную равномерно распределенной по всей длине закручивающей нагрузкой интенсивности m.

Уравнение трех бимоментов (45[1]) для этой балки будет иметь следующий вид:

$$B_{n-1}s+2B_n r+B_{n+1}s=-\frac{R_n^{\text{ф.прав}}}{l}-\frac{R_n^{\text{ф.лев}}}{l}$$

или после преобразования правой части по формулам табл. 43

$$B_{n-1}s+2B_n r+B_{n+1}s=-ml^2t. \qquad (123)$$

Воспользовавшись уравнением (123), определим опорные бимоменты для двух-, трех-, четырех- и пятипролетной неразрезных балок. Пронумеровав опоры слева направо, 0, 1, 2,..., получим:

для двухпролетной балки

$$B_1=-ml^2\frac{t}{2r}; \qquad (124)$$

для трехпролетной балки

$$B_1=B_2=-ml^2\frac{t}{2r+s}; \qquad (125)$$

для четырехпролетной балки

$$B_1 = B_3 = -ml^2 \frac{(2r-s)t}{2(2r^2-s^2)}; \tag{126}$$

$$B_2 = -ml^2 \frac{(r-s)t}{2r^2-s^2}; \tag{127}$$

для пятипролетной балки

$$B_1 = B_4 = -ml^2 \frac{2rt}{4r^2-2rs-s^2}; \tag{128}$$

$$B_2 = B_3 = -ml^2 \frac{(2r-s)t}{4r^2+2rs-s^2}. \tag{129}$$

По формулам (124)—(129) нами вычислены значения опорных бимоментов в зависимости от интенсивности нагрузки m, пролета l и упругой изгибно-крутильной характеристики $kl = l\sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$; они представлены в виде графика (рис. 236).

Коэффициенты r, s и t вычислены по таблице приложения 11.

По оси абсцисс на этом графике отложены значения kl, а по оси ординат — коэффициенты α, полагая в общем виде:

$$B_i = \alpha ml^2. \tag{130}$$

Для идеального тонкостенного стержня ($kl=0$) коэффициенты α имеют такие же значения, как и для опорных изгибающих моментов соответствующих неразрезных балок.

Таблица 52

Коэффициенты α для опорных бимоментов неразрезных равнопролетных балок

Типы балок	$B_i = \alpha ml^2$							
	$kl=0$				$kl=3$			
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4
Двухпролетная	0,125				0,0984			
Трехпролетная	0,100	0,100			0,0838	0,0838		
Четырехпролетная	0,107	0,071	0,107		0,0867	0,0684	0,0867	
Пятипролетная	0,105	0,079	0,079	0,105	0,0861	0,0711	0,0711	0,0861

Типы балок	$B_i = \alpha ml^2$							
	$kl=5$				$kl=10$			
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4
Двухпролетная	0,0757				0,0445			
Трехпролетная	0,0678	0,0678			0,0421	0,0421		
Четырехпролетная	0,0687	0,0596	0,0687		0,0422	0,0398	0,0422	
Пятипролетная	0,0687	0,0607	0,0607	0,0687	0,0422	0,0399	0,0399	0,0422

Для некоторых значений kl коэффициенты α выписаны в форме табл. 52.

Рассматривая кривые графика рис. 236 и табл. 52, можно сделать следующие выводы.

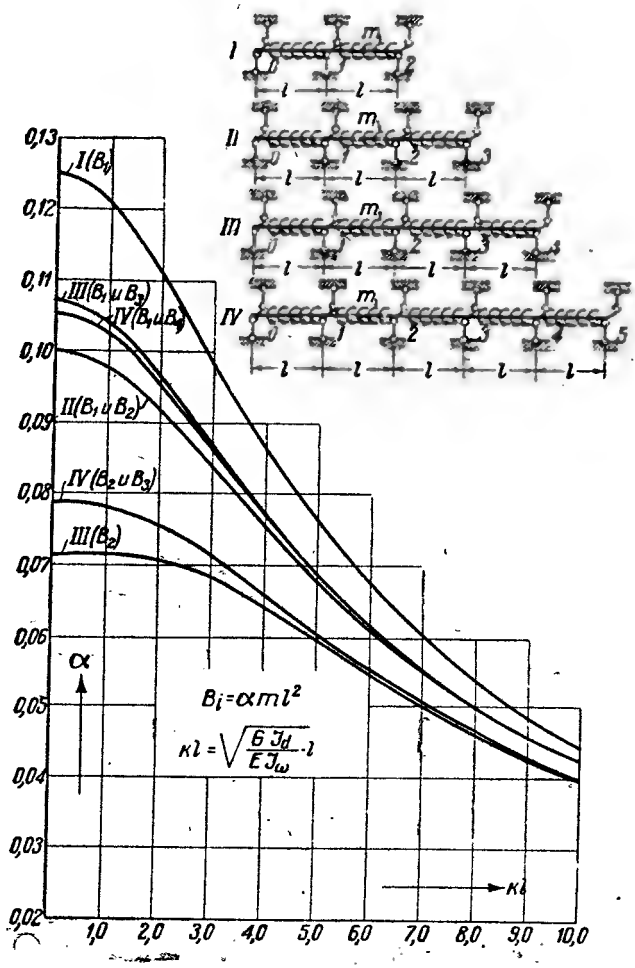


Рис. 236

1. С увеличением величины kl влияние числа пролетов неразрезной балки на величины опорных бимоментов резко уменьшается.

2. Как известно, при расчете неразрезных балок на изгиб считается практически возможным ограничиваться расчетом пятипролетной балки, принимая для шести, семи и более пролетов величины опорных изгибающих моментов по формулам пятипролетной балки.

При расчете же неразрезных тонкостенных балок на кручение при практических значениях kl (в сварных и клепаных балках металлоконструкций $kl=2 \div 5$, а в прокатных $kl=5 \div 15$) число расчетных пролетов можно еще уменьшить, а именно:

а) при $kl=3 \div 10$ можно ограничиваться расчетом четырехпролетной балки. Для балок же с большим количеством пролетов значения опор изгибно-крутящих бимоментов следует принимать по формулам для четырехпролетной балки. Ошибка при этом для второй от конца опоры не будет превышать 0,7%, а для средних опор — 4% (при $kl=3$);

б) при $kl>10$ можно ограничиваться расчетом трехпролетной балки. Ошибка не будет превышать 5%.

3. Графиком рис. 236 можно пользоваться как расчетным, определяя по соответствующим кривым искомые значения опорных бимоментов.

§ 34. ВЛИЯНИЕ ОПОРНЫХ БИМОМЕНТОВ НА ВЕЛИЧИНЫ ПРОЛЕТНЫХ БИМОМЕНТОВ В НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛКАХ

Рассмотрим один из промежуточных пролетов неразрезной тонкостенной балки, находящейся под действием равномерно распределенных по всей длине закручивающих моментов интенсивности m и опорных бимоментов B_{n-1} и B_n (рис. 237, *а*). Эпюры бимоментов отдельно для каждого из перечисленных воздействий построены на рис. 237, *б, в*.

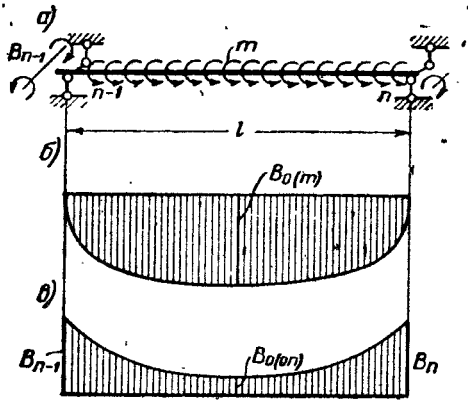


Рис. 237

Обозначив бимомент по середине пролета от нагрузки m через $B_{0(m)}$, а от опорных бимоментов — через $B_{0(on)}$ по формулам приложения 8, найдем

$$B_{0(m)} = ml^2p; \tag{131}$$

$$B_{0(on)} = (B_{n-1} + B_n)\frac{1}{2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}. \tag{132}$$

Наибольшее значение суммы опорных бимоментов $B_{n-1}+B_n$ как видно из графика рис. 236, имеет место для крайних пролетов в двухпролетной балке, а для средних пролетов — в трехпролетной. Сделав подстановку из формул (124) и (125) в формулу (132), получим:

для крайних пролетов

$$B^{кр}_{0(оп)} = \left(o + ml^2 \frac{t}{2r}\right) \frac{1}{2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = ml^2 \frac{t}{4r \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}; \qquad (133)$$

для средних пролетов

$$B^{ср}_{0(оп)} = 2ml^2 \frac{t}{2r+s} \cdot \frac{1}{2\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = ml^2 \frac{t}{(2r+s)\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}. \qquad (134)$$

Для сравнения нами вычислены по формулам (131), (133) и (134) и построены в форме графиков (рис. 238) кривые бимомен-

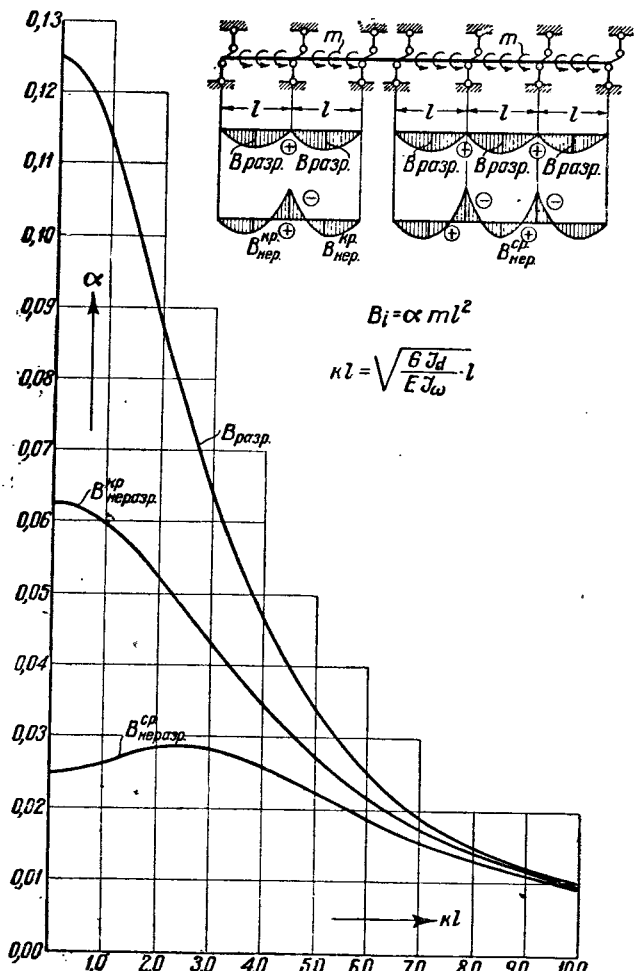


Рис. 238

тов посередине пролета разрезной балки, а также посередине крайних и средних пролетов указанных выше неразрезных балок. При этом

$$B_{разр} = B_{0(m)}; \tag{135}$$

$$B^{кр}_{нер} = B_{0(m)} - B^{кр}_{0(оп)}; \tag{136}$$

$$B^{ср}_{нер} = B_{0(m)} - B^{ср}_{0(оп)}. \tag{137}$$

Аналогично предыдущему рассмотрим также один из промежуточных пролетов неразрезной балки, находящейся под действием сосредоточенного посредине пролета закручивающего момента M и опорных бимоментов B_{n-1} и B_n (рис. 239).

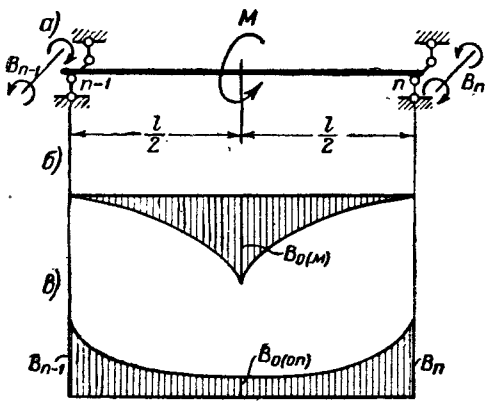


Рис. 239

Обозначив бимомент посередине пролета от нагрузки M через $B_{0(M)}$, будем иметь (по формулам приложения 8)

$$B_{0(M)} = \frac{Ml}{2} f. \tag{138}$$

Правая часть уравнения (123) для случая загружения неразрезной равнопролетной балки сосредоточенными посередине пролетов моментами M по формулам табл. 43 будет иметь следующий вид:

$$-Mlp.$$

Поэтому, если в формулах (133) и (134) мы заменим ml^2t через Mlp, то для рассматриваемого случая загружения получим

$$B^{кр}_{0(оп)} = Ml \frac{p}{4r \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \tag{139}$$

и

$$B^{ср}_{0(оп)} = Ml \frac{p}{(2r + s) \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}. \tag{140}$$

Соответствующие кривые $B_{разр}$, $B^{кр}_{нер}$ и $B^{ср}_{нер}$, определяемые формулами (135), (136) и (137), представлены в форме графика (рис. 240).

Рассматривая графики рис. 238 и 240, можно сделать следующие выводы.

1. С увеличением kl влияние опорных бимоментов на величины пролетных бимоментов резко падает, и при значениях $kl \geqslant 10$ — для случая равномерно распределенной закручивающей нагрузки и $kl \geqslant 8$ — для случая сосредоточенных посередине пролетов закручивающих моментов влиянием опорных бимоментов на бимоменты

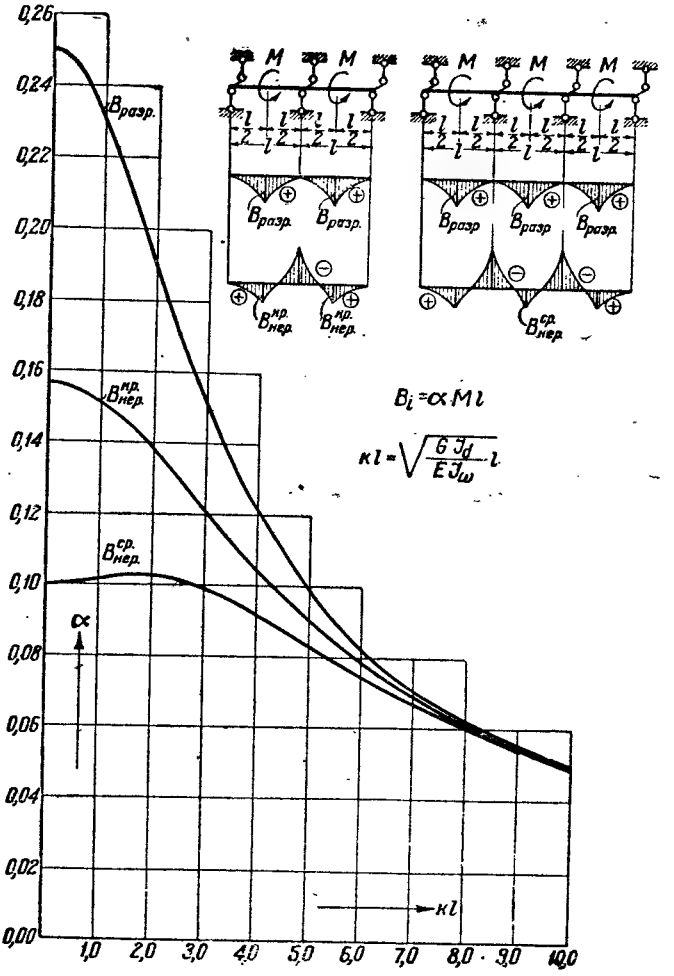


Рис. 240

посередине пролетов можно пренебречь, т. е. балку в пролетах рассчитывать как разрезную.

2. Графиками рис. 238 и 240 можно пользоваться как расчетными при определении величин соответствующих пролетных бимоментов.

§ 35. ВЛИЯНИЕ УГЛОВЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ УЗЛОВ РАМЫ НА ОПОРНЫЕ И УЗЛОВЫЕ БИМОМЕНТЫ

В § 31 предыдущей главы мы на примере расчета Г-образной рамы отметили чрезвычайно малое влияние угловых и линейных перемещений узлов на величину опорных и узловых бимоментов. Покажем это в более общем виде.

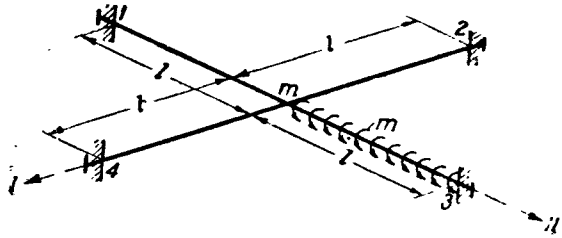


Рис. 241

Рассмотрим плоскую крестообразную раму из тонкостенных стержней, все опоры которой жестко защемлены против поворотов и депланаций (рис. 241). Пусть пролеты и сечения всех стержней рамы будут одинаковы. Погонную секториальную жесткость их обозначим через $i_\omega = \frac{EJ_\omega}{l}$, а экваториальную жесткость при изгибе из плоскости рамы — через $i_x = \frac{EJ_x}{l}$.

Один из стержней рамы загружен равномерно распределенными закручивающими моментами интенсивности m.

Для расчета этой рамы составим уравнения (110), (111) и (112) главы V

$$4i_\omega \mu\theta' - ml^2 g = 0; \tag{141}$$

$$2i_\omega \frac{\lambda}{l^2} \theta_{\mathrm{I}} + 8i_x \theta_{\mathrm{I}} = 0; \tag{142}$$

$$2i_\omega \frac{\lambda}{l^2} \theta_{\mathrm{II}} + 8i_x \theta_{\mathrm{II}} - \frac{ml}{2} = 0, \tag{143}$$

где через θ', θ_{I} и θ_{II} обозначены депланации среднего узла и углы поворота его вокруг осей I и II.

Уравнение (113) главы V для рассматриваемой симметричной рамы будет отсутствовать.

Решая эти уравнения, найдем

$$\theta' = \frac{ml^2}{4} \cdot \frac{g}{i_\omega \mu}; \tag{144}$$

$$\theta_{\mathrm{I}} = 0; \tag{145}$$

$$\theta_{\mathrm{II}} = \frac{ml^3}{4} \cdot \frac{1}{i_\omega \lambda + 4l^2 i_x}. \tag{146}$$

Узловые и опорные бимоменты по формулам (94) будут равны:

$$B_{m3} = i_\omega \left(\mu\theta' - \frac{\alpha}{l}\theta_{II}\right) - ml^2 g = \frac{ml^2}{4} g - \frac{ml^2}{4} \times$$

$$\times \frac{i_\omega \alpha}{i_\omega \lambda + 4l^2 i_x} - ml^2 g = -\frac{ml^2}{4}\left(3g + \frac{\alpha}{\lambda + 4l^2 \frac{i_x}{i_\omega}}\right);$$

$$B_{3m} = i_\omega \left(\gamma\theta' - \frac{\alpha}{l}\theta_{II}\right) + ml^2 g = \frac{ml^2}{4}\left(4g - \frac{\alpha}{\lambda + 4l^2 \frac{i_x}{i_\omega}} + \frac{g\gamma}{\mu}\right);$$

$$B_{m1} = i_\omega \left(\mu\theta' - \frac{\alpha}{l}\theta_{II}\right) = \frac{ml^2}{4} g - \frac{ml^2}{4} \times$$

$$\times \frac{i_\omega \alpha}{i_\omega \lambda + 4l^2 i_x} = \frac{ml^2}{4}\left(g - \frac{a}{\lambda + 4l^2 \frac{i_x}{i_\omega}}\right);$$

$$B_{1m} = i_\omega \left(\gamma\theta' - \frac{\alpha}{l}\theta_{II}\right) = \frac{ml^2}{4}\left(\frac{g\gamma}{\mu} - \frac{\alpha}{\lambda + 4l^2 \frac{i_x}{i_\omega}}\right);$$

$$B_{m2} = i_\omega \mu\theta' = \frac{ml^2}{4} g;$$

$$B_{2m} = i_\omega \gamma\theta' = \frac{ml^2}{4} \cdot \frac{g\gamma}{\mu};$$

$$B_{m4} = \frac{ml^2}{4} g;$$

$$B_{4m} = \frac{ml^2}{4} \cdot \frac{g\gamma}{\mu}.$$

Если пренебречь влиянием угловых перемещений узла на величины опорных и узловых бимоментов, то в предыдущих формулах при вычислении величин бимоментов следует принять $\theta_{II} = 0$, что отразится только на величинах бимоментов в стержнях, расположенных по оси *II*, так как бимоменты в стержнях, расположенных по оси *I*, от θ_{II} не зависят.

В этом случае член $\frac{\alpha}{\lambda + 4l^2 \frac{i_x}{i_\omega}}$, стоящий в скобках окончательных формул бимоментов, следует положить равным нулю. Для того чтобы установить степень влияиия угловых перемещений на величину бимоментов, это же выражение следует сравнить с другими слагаемыми, стоящими в тех же скобках.

Наименьшее из последних, очевидно, будет в формуле для бимомента B_{1m}, равное $\frac{g\gamma}{\mu}$, так как $\frac{\gamma}{\mu} < 1$. Таким образом, для решения поставленной задачи требуется выразить в процентах для различных профилей отношение выражения $\frac{\alpha}{\lambda + 4l^2 \frac{i_x}{i_\omega}}$ к выражению $\frac{g\gamma}{\mu}$, т. е. вычислить величину

$$\frac{\alpha\mu}{g\gamma\left(\lambda + 4l^2 \frac{i_x}{i_\omega}\right)} \cdot 100. \tag{147}$$

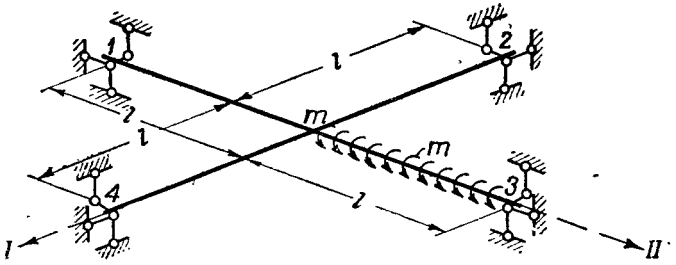


Рис. 242

Вычисления эти приведены для различных профилей металлических конструкций в табл. 53. Они показывают, что влияние угловых перемещений узлов на величины бимоментов весьма незначительно, и в практических расчетах его можно не учитывать, что значительно упрощает решение задач по расчету рам из тонкостенных элементов на кручение.

Рассмотрим теперь ту же раму и таким же образом загруженную, но с шарнирными закреплениями стержней по концам (рис. 242).

Мы рассмотрели крестообразную раму, концы стержней которой были защемлены против депланаций и углов поворота из плоскости рамы.

Тогда уравнения (141), (142) и (143) на основании указаний, данных в § 29, и формул приложения 9 будут иметь следующий вид:

$$4i_\omega \beta\theta' - \frac{ml^2}{2} w = 0; \tag{141^1}$$

$$2i_\omega \frac{\rho}{l^2} \theta_1 + 6i_x \theta_1 = 0; \tag{142^1}$$

$$2i_\omega \frac{\rho}{l^2}\theta_{II} + 6i_x\theta_{II} - ml\psi = 0, \qquad (143^1)$$

откуда

$$\theta' = \frac{ml^2}{8}\cdot\frac{w}{i_\omega\beta}; \qquad (144^1)$$

$$\theta_I = 0; \qquad (145^1)$$

$$\theta_{II} = \frac{ml^3}{2}\cdot\frac{\psi}{i_\omega\rho + 3l^2 i_x}. \qquad (146^1)$$

Таблица 53

Степень влияния смещения узла крестообразной рамы с защемленными концами на величины узловых бимоментов

Тип профиля	Сварной двутавр 700×10+2×240×20	Прокатный двутавр № 60а	Прокатный двутавр № 30а	Прокатный двутавр № 10	Прокатный швеллер № 30а
Длина стержней l	600	500	400	200	400
Упругая изгибно-крутильная характеристика k	0,0038	0,007427	0,01389	0,04122	0,01456
kl	2,28	3,71	5,56	8,24	5,82
Момент инерции J_x	153033	83 860	8950	245	6133
Секториальный момент инерции J_ω	5 971 968	1 349 900	76 704	644	36 645
$\frac{i_x}{i_\omega} = \frac{J_x}{J_\omega}$	0,0256	0,0621	0,117	0,38	0,167
$4l^2\frac{i_x}{i_\omega}$	36 900	62 100	74 700	60 800	107 000
α	6,51	7,26	8,59	10,88	8,8
μ	4,66	5,58	7,1	9,57	7,32
g	0,0766	0,0689	0,0584	0,046	0,0569
γ	1,85	1,68	1,49	1,32	1,47
λ	18,3	28,3	48,3	89,9	51,7
$\frac{\alpha\mu}{g\gamma\left(\lambda+4l^2\frac{i_x}{i_\omega}\right)}\cdot 100$	0,581%	0,563%	0,939%	2,81%	0,72%

Узловые бимоменты в стержнях, расположенных по оси *II*, по формуле (97) будут равны

$$B_{m3} = i_\omega\beta\left(\theta' - \frac{1}{l}\theta_{II}\right) - \frac{ml^2}{2}w = -\frac{ml^2}{8}\times$$

$$\times\left(4w - w + \frac{4\beta\psi}{\rho + 3l^2\frac{i_x}{i_\omega}}\right) = -\frac{ml^2}{8}\left(3w + \frac{4\beta\psi}{\rho + 3l^2\frac{i_x}{i_\omega}}\right);$$

$$B_{m1} = i_\omega\beta\left(\theta - \frac{1}{l}\theta_{II}\right) = \frac{ml^2}{8}\left(w - \frac{4\beta\psi}{\rho + 3l^2\frac{i_x}{i_\omega}}\right).$$

Значения тех же бимоментов при неучете смещения узла (при $\theta_{II}=0$)

$$B_{m3}=-\frac{3ml^2}{8}w \text{ и } B_{m1}=\frac{ml^2}{8}w.$$

Бимоменты в стержнях, расположенных по оси l, как и в предыдущем случае, не зависят от θ_{II}.

Наибольшее влияние смещения узла, очевидно, скажется на величине бимомента B_{m1} и будет измеряться в процентах величиной

$$\frac{4\beta\psi}{w\left(\rho+3l^2\frac{i_x}{i_\omega}\right)}\cdot 100. \qquad (148)$$

Вычисленные значения этого выражения для тех же профилей, что и в предыдущем случае, приведены в табл. 54. Из таблицы видно, что влияние смещения узлов на величины бимоментов при шарнирных закреплениях концов стержней оказывается еще меньшим.

Таблица 54

Степень влияния смещения узла крестообразной рамы с шарнирными закреплениями стержней по концам на величины узловых бимоментов

Тип профиля	Сварной двутавр 700×10+ +2×240×20	Прокатный двутавр № 60а	Прокатный двутавр № 30а	Прокатный двутавр № 10	Прокатный швеллер № 30а
Длина стержней l . . .	600	500	400	200	400
Упругая изгибно-крутильная характеристика k	0,0038	0,007427	0,01389	0,04122	0,01456
kl	2,28	3,71	5,56	8,24	5,82
Момент инерции J_x . .	1 530 33	83 860	8 950	245	6 133
Секториальный момент инерции J_ω	5 971 968	1 349 900	76 704	644	36 645
$\frac{i_x}{i_\omega}=\frac{J_x}{J_\omega}$	0,0256	0,0621	0,117	0,38	0,167
$3l^2\frac{i_x}{i_\omega}$	27 600	46 600	56 000	45 600	80 200
β	3,92	5,07	6,78	9,38	7,03
ψ	0,6075	0,59	0,571	0,552	0,568
w	0,215	0,179	0,142	0,104	0,137
ρ	9,18	18,9	38	77,42	41,1
$\frac{4\beta\psi}{w\left(\rho+3l^2\frac{i_x}{i_\omega}\right)}\cdot 100$ . . .	0,159%	0,143%	0,194%	0,435%	0,145%

Действительные защемления концов стержней рамы являются промежуточными между двумя здесь рассмотренными, поэтому эти выводы остаются справедливыми для любого узла рамы, т. е. при построении эпюры бимоментов для рам металлических конструкций можно не учитывать смещения узлов рамы.

§ 36. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО МЕТОДУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

1. В предыдущем параграфе мы установили, что смещение узлов рам металлических конструкций оказывает весьма слабое влияние на величину узловых и опорных бимоментов этих рам.

Это чрезвычайно важное для практических расчетов обстоятельство сразу определяет преимущество одних методов расчета рам перед другими. А именно: для сложных многопролетных рам особые преимущества приобретает метод деформаций, так как при указанных допущениях число основных неизвестных, а следовательно, и число уравнений метода деформаций в общем случае будет равно только числу внеопорных узлов.

Во многих случаях еще более удобным может оказаться изложенный в главе VI метод бимоментных фокусов, представляющий, как известно, для рам с несмещающимися узлами частный случай решения уравнений метода сил. Расчет рам по этому методу избавляет расчетчика от необходимости составлять и решать систему совместных уравнений и дает возможность узловые и опорные бимоменты находить непосредственно по формулам. Несколько сложнее, как мы видели выше, пользование методом бимоментных фокусов для расчета рам с замкнутыми контурами и при загрузке внешней нагрузкой не одного, а нескольких элементов рамы, так как при определении фокусных отношений для замкнутого контура приходится обходить его несколько раз, а при загружении не одного, а нескольких элементов рамы расчет должен производиться от загрузки каждого элемента в отдельности, после чего результаты складываются. Для рам из нетонкостенных элементов существуют и другие приемы построения эпюр изгибающих моментов, также основанные на использовании моментных фокусных отношений и иногда приводящие к цели значительно быстрее[1], которые с успехом могли бы быть распространены и на определение бимоментов в рамах из тонкостенных элементов, но приемы эти большого распространения в практике не получили.

---

[1] И. М. Рабинович. Методы расчета рам, ч. III. Главная редакция строительной литературы, 1937, стр. 45—58.

Я. М. Риппейбейм. К расчету плоских и пространственных статически неопределимых систем. Сб. «Рамы и фермы пространственные и плоские», Стройиздат, 1933, стр 138.

И. М. Рабинович. Некоторые упрощения метода фокусов, Сб. «Рамы и фермы пространственные и плоские», Стройиздат, 1933, стр. 138.

В 1929 г. русский инженер Н. М. Бернадский и в 1930 г. американский профессор Харди Кросс предложили новый способ расчета плоских нетонкостенных рам с несмещающимися узлами, обладающий одновременно всеми преимуществами метода деформаций и метода фокусов и свободный от указанных выше недостатков. Этот способ, представляющий по существу применение способа последовательных приближений (способа интераций) к расчету рам методом деформаций, избавляет расчетчика от необходимости составлять и решать систему совместных уравнений и вместе с тем не вносит каких-либо особых дополнительных затруднений для расчета рам с замкнутыми контурами и при загружении внешней нагрузкой не одного, а нескольких или даже всех стержней рамы.

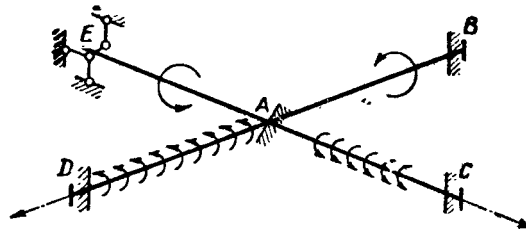


Рис. 243

Подробное и весьма обстоятельное изложение этого способа и распространение его на рамы с криволинейными ригелями и на пространственные рамы из нетонкостенных элементов см. в работе Рогицкого С. А. «Расчет плоских и пространственных рам методом последовательных приближений», 1939 г. Там же имеется и список предшествующей этой работе литературы, к которому необходимо добавить цитированный нами выше курс проф. Рабиновича И. М. «Методы расчета рам», ч. 3, 1937 г., стр. 122—129.

Поскольку для рассматриваемых нами плоских рам из тонкостенных элементов эпюры бимоментов могут быть построены, как для рам с несмещающимися узлами, то излагаемый ниже способ последовательных приближений для расчета этих рам оказывается чрезвычайно простым и должен избавить расчетчика от утомительных арифметических вычислений. Поэтому мы рекомендуем его как один из наиболее простых практических методов расчета рам из тонкостенных элементов на кручение.

Переходим к изложению этого способа.

2. Рассмотрим крестообразную плоскую раму (рис. 243), имеющую один внеопорный узел A, три защемленных против депланаций и поворота опоры B, C и D и одну шарнирную для тех же перемещений опору E.

Пусть все или некоторые из стержней этой рамы будут загружены произвольной закручивающей нагрузкой.

Введем в узел A защемление, предотвращающее его депланацию, и составим единственное для этой рамы (считая, что узел несмещаем) уравнение метода деформаций

$$r_{11}\theta' + r_{1p} = 0, \tag{149}$$

где r_{11} — реактивный бимомент в защемлении узла A от единичной депланации этого узла;

r_{1p} — реактивный бимомент в том же защемлении от внешней нагрузки.

Величину, равную r_{1p}, но обратную ей по знаку, представляющую собой алгебраическую сумму действующих на узел бимоментов, будем называть «неуравновешенным бимоментом», памятуя, что этот термин является условным, ибо, как мы знаем, бимомент сам по себе всегда является системой уравновешенных сил.

Опорные бимоменты, возникающие по концам защемленных элементов, сходящихся в узле A, будем обозначать через B_{AN}, где под буквой N следует разуметь обозначение противоположного конца стержня; мы будем их называть бимоментами защемления.

Положительными, как и при расчете по методу деформаций, будем считать бимоменты защемления, соответствующие положительной депланации, т. е. стремящиеся повернуть верхнюю фасонку узла по часовой стрелке, а нижнюю — против часовой стрелки.

Для рассматриваемой нами рамы

$$r_{1p} = \overline{B}_{AB} - \overline{B}_{AC} - \overline{B}_{AD} + \overline{B}_{AE}. \tag{150}$$

Значения B_{AN} для некоторых нагрузок даны в приложении 9.

Величина r_{11}, представляющая собой алгебраическую сумму бимоментов, возникающих по концам защемленных в узле A элементов от единичной депланации этого узла, будет равна

$$r_{11} = \mu_{AB}\, i_{\omega(AB)} + \mu_{AC}\, i_{\omega(AC)} + \mu_{AD}\, i_{\omega(AD)} + \beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}, \tag{151}$$

где μ_{AN} и β_{AN} — безразмерные коэффициенты, определяемые по приложению 10 и 11;

$i_{\omega(AN)}$ — погонная секториальная жесткость стержней:

$$i_{\omega(AN)} = \frac{EJ_{\omega(AN)}}{l_{AN}}. \tag{152}$$

Сделав подстановку из формулы (151) в уравнение (149), получим

$$\theta' = -\frac{r_{1p}}{r_{11}} = -\frac{r_{1p}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)} + \mu_{AC}\, i_{\omega(AC)} + \mu_{AD}\, i_{\omega(AD)} + \beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}}.$$

Тогда действительные узловые бимоменты будут равны

$$B_{AB} = \overline{B}_{AB} - r_{1p}\frac{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)} + \mu_{AC}\, i_{\omega(AC)} + \mu_{AD}\, i_{\omega(AD)} + \beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};$$

$$B_{AC} = -\overline{B}_{AC} - r_{1p}\frac{\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)} + \mu_{AC}\, i_{\omega(AC)} + \mu_{AD}\, i_{\omega(AD)} + \beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};$$

$$
\left.
\begin{aligned}
B_{AD} &= -\overline{B}_{AD} - r_{1p}\frac{\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}+\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}+\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}+\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};\\
B_{AE} &= \overline{B}_{AE} - r_{1p}\frac{\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}+\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}+\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}+\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};\\
B_{BA} &= -\overline{B}_{BA} - r_{1p}\frac{\gamma_{AB}\, i_{\omega(AB)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}+\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}+\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}+\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};\\
B_{CA} &= \overline{B}_{CA} - r_{1p}\frac{\gamma_{AC}\, i_{\omega(AC)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}+\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}+\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}+\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};\\
B_{DA} &= \overline{B}_{DA} - r_{1p}\frac{\gamma_{AD}\, i_{\omega(AD)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}+\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}+\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}+\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};\\
B_{AE} &= 0.
\end{aligned}
\right\} \quad (153)
$$

Вторые слагаемые этих формул представляют бимоменты, которые возникнут по концам стержней при устранении в узле A защемления против депланаций. Будем называть их условно «уравновешивающими бимоментами». Сумма их для узла A, очевидно, равна по величине и противоположна по знаку «неуравновешенному бимоменту». Множители при r_{1p} показывают, какая доля неуравновешенного бимомента «уравновешивается» бимоментом, возникающим на конце соответствующего стержня. Коэффициенты эти будем называть коэффициентами распределения. Сумма их для какого-либо узла, очевидно, равна единице.

Обозначая их через Δ_{AN} и подставив в формулы (153), получим их в сокращенной записи:

$$
\left.
\begin{aligned}
&B_{AB} = \overline{B}_{AB} - r_{1p}\Delta_{AB}; && B_{BA} = -\overline{B}_{BA} - r_{1p}\Delta_{AB}\frac{\gamma_{AB}}{\mu_{AB}};\\
&B_{AC} = -\overline{B}_{AC} - r_{1p}\Delta_{AC}; && B_{CA} = \overline{B}_{CA} - r_{1p}\Delta_{AC}\frac{\gamma_{AC}}{\mu_{AC}};\\
&B_{AD} = -\overline{B}_{AD} - r_{1p}\Delta_{AD}; && B_{DA} = \overline{B}_{DA} - r_{1p}\Delta_{AD}\frac{\gamma_{AD}}{\mu_{AD}};\\
&B_{AE} = \overline{B}_{AE} - r_{1p}\Delta_{AE}; && B_{EA} = 0,
\end{aligned}
\right\} \quad (153')
$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
\Delta_{AB} &= \frac{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}+\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}+\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}+\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};\\
\Delta_{AC} &= \frac{\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}+\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}+\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}+\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};
\end{aligned}
\right\} \quad (154)
$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_{AD} &= \frac{\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}+\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}+\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}+\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};\\
\Delta_{AE} &= \frac{\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}}{\mu_{AB}\, i_{\omega(AB)}+\mu_{AC}\, i_{\omega(AC)}+\mu_{AD}\, i_{\omega(AD)}+\beta_{AE}\, i_{\omega(AE)}};\\
\Delta_{AB} &+ \Delta_{AC} + \Delta_{AD} + \Delta_{AE} = 1.
\end{aligned}\right\} \qquad (154)$$

Из равенств (153¹) видно, что на противоположных узлу A концах стержней возникают бимоменты, одинаковые по знаку с соответствующим бимоментом на конце этого стержня, примыкающим к узлу A, и в $\frac{\gamma_{AN}}{\mu_{AN}}$ раз меньшие по величине.

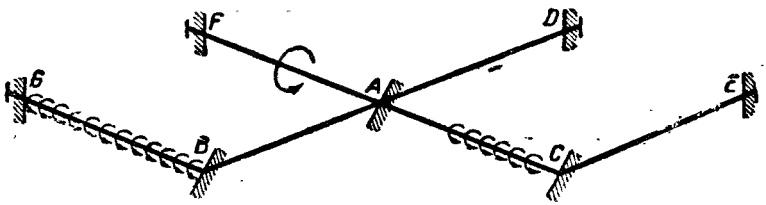


Рис. 244

Бимоменты эти будем называть **вторичными бимоментами защемления**.

Таким образом, расчет рамы с одним внеопорным узлом по изложенному способу сводится к следующим операциям:

1) определению секториальных погонных жесткостей стержней $i_{\omega(AN)}$ по формуле (152);

2) определению коэффициентов распределения Δ_{AN} по формулам (154);

3) определению бимоментов защемления $\overline{B}_{AN}$ и $\overline{B}_{NA}$ по формулам приложения 9;

4) определению «неуравновешенного бимомента» r_{1p} по формуле (150) и

5) определению действительных бимоментов по концам стержней по формулам (153¹).

3. Рассмотрим теперь раму с несколькими внеопорными узлами (рис. 244). Прежде всего по формулам (152) и (154) определим секториальные погонные жесткости i_ω и коэффициенты распределения Δ. Затем на каждый внеопорный узел накладываем связь, препятствующую депланации этого узла, загружаем раму заданной внешней нагрузкой и определяем «неуравновешенные бимоменты» в узлах $-r_{Np}$, равные алгебраической сумме соответствующих бимоментов защемления $\overline{B}$. При устранении защемления в

каком-нибудь узле (например, в узле A) узел этот депланирует и по концам сходящихся в нем стержней возникнут «уравновешивающие бимоменты», величины которых определятся коэффициентами распределения. Одновременно на противоположных защемлению концах стержней возникнут одинаковые по знаку и в $\frac{\gamma}{\mu}$ раз меньшие по величине вторичные бимоменты защемления.

Определим таким образом «уравновешивающие бимоменты» в узле A и, алгебраически прибавив возникшие при этом вторичные бимоменты защемления к «неуравновешенным бимоментам» в узлах B и C, вновь накладываем на узел A защемление; защемление же, наложенное на узел B, снимаем. Тогда этот узел депланирует и по концам сходящихся в нем стержней возникнут «уравновешивающие бимоменты», величины которых, как и в узле A, определятся коэффициентами распределения. На противоположных концах стержней G и A при этом возникнут вторичные бимоменты защемления, одинаковые по знаку и в $\frac{\gamma}{\mu}$ раз меньше по величине соответствующих бимоментов в узле B.

Сложив последние с «неуравновешенными бимоментами» в узлах G и A (в последнем «неуравновешенный бимомент» равен нулю), вновь накладываем на узел B защемление и переходим к узлу C. Произведя с этим узлом операции, аналогичные предыдущим, переходим к следующему узлу и т. д.

В результате проведенных таким образом операций над всеми внеопорными узлами мы получим раму, на защемления узлов которой в виде «неуравновешенных бимоментов» будут действовать только вторичные бимоменты защемления.

Повторив вновь те же операции над всеми внеопорными узлами, мы получим раму, на защемления узлов которой будут действовать новые вторичные бимоменты защемления, значительно меньшие по величине.

Подобные операции следует производить до тех пор, пока вторичные бимоменты защемления не станут настолько малыми, что дальнейшее распределение их станет излишним.

После этого все защемления внеопорных узлов могут быть устранены, и узлы никаких дополнительных, практически ощутимых депланаций не получат.

Алгебраическая сумма всех промежуточных «неуравновешенных бимоментов», полученных от последовательных операций закрепления и раскрепления узлов, очевидно, будет представлять действительную величину бимоментов, возникающих по концам стержней рамы от заданной внешней нагрузки.

Распределение «неуравновешенных бимоментов» в узлах может производиться в любой последовательности, но для сокращения вычислений рекомендуется сначала распределить наибольший «неуравновешенный бимомент», затем второй по величине и т. д.

Весь процесс вычислений удобно расположить в таблице, форма и порядок составления которой даны в следующем параграфе при решении численного примера.

§ 37. РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ ТОНКОСТЕННОЙ РАМЫ НА КРУЧЕНИЕ ПО МЕТОДУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Пример 20. Пусть требуется построить эпюру бимоментов для многопролетной рамы (рис. 245, *а*). Сечения всех стержней, идущих параллельно линии, соединяющей опоры (будем условно называть их ригелями), — сварной двутавр из вертикального ли-

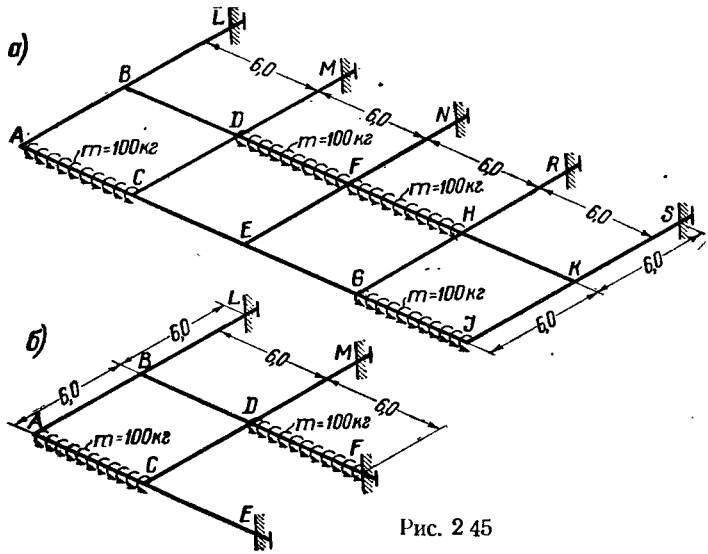


Рис. 2 45

ста 1000×10 *мм* и двух горизонтальных листов 300×20 *мм*. Сечения всех перпендикулярных к ним стержней (будем условно называть их опорными стержнями) — тоже сварной двутавр из вертикального листа 1000×10 *мм* и двух горизонтальных листов 200×20 *мм*.

Вследствие симметрии рамы и нагрузки концы стержней, сходящиеся в узлах, расположенных на оси симметрии, не будут деплаиировать, поэтому расчетную схему этой рамы можно свести к более простой расчетной схеме (рис. 245, *б*).

Секторнальные моменты инерции по формулам приложения 5 равны

$$J_{\omega(\text{риг})} = \frac{J_y h^2}{4} = 4 \cdot 2250 \frac{102^2}{4} = 23{,}4 \cdot 10^6 \text{ см}^6;$$

$$J_{\omega(\text{оп})} = \frac{J_y h^2}{4} = 4 \cdot 667 \frac{102^2}{4} = 6{,}95 \cdot 10^6 \text{ см}^6.$$

Моменты инерции при чистом кручении по формуле (7) и указаний п. 7 § 5 части 1

$$J_{d(\text{риг})} = \alpha \sum \frac{b\delta^3}{3} = \frac{1,5}{3}(100 \cdot 1^3 + 2 \cdot 30 \cdot 2^3) = 290\, см^4;$$

$$J_{d(\text{оп})} = \alpha \sum \frac{b\delta^3}{3} = \frac{1,5}{3}(100 \cdot 1^3 + 2 \cdot 10 \cdot 2^3) = 210\, см^4.$$

Упругие изгибно-крутильные характеристики

$$k_{\text{риг}} = \sqrt{\frac{GJ_{d(\text{риг})}}{EJ_{\omega(\text{риг})}}} = \sqrt{0,381 \frac{290}{23,4 \cdot 10^6}} = \frac{10,51}{4,84 \cdot 10^3} = 0,00217\, см^{-1};$$

$$k_{\text{оп}} = \sqrt{\frac{GJ_{d(\text{оп})}}{EJ_{\omega(\text{оп})}}} = \sqrt{0,381 \frac{210}{6,95 \cdot 10^6}} = \frac{8,95}{2,64 \cdot 10^3} = 0,00339\, см^{-1};$$

$$k_{\text{риг}}\, l_{\text{риг}} = 0,0217 \cdot 600 = 130;$$

$$k_{\text{оп}}\, l_{\text{оп}} = 0,00339 \cdot 600 = 2,04.$$

Необходимые для дальнейшего коэффициенты по приложению 11

$$\mu_{\text{риг}} = 4,222, \quad \gamma_{\text{риг}} = 1,946, \quad g_{\text{риг}} = 0,08107,$$

$$\frac{\gamma_{\text{риг}}}{\mu_{\text{риг}}} = \frac{1,946}{4,222} = 0,461, \quad \mu_{\text{оп}} = 4,529, \quad \gamma_{\text{оп}} = 1,877, \quad \frac{\gamma_{\text{оп}}}{\mu_{\text{оп}}} = \frac{1,877}{4,529} = 0,415.$$

Секториальные погонные жесткости стержней по формуле (152)

$$i_{\omega(\text{риг})} = \frac{EJ_{\omega(\text{риг})}}{l} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 23,4 \cdot 10^6}{600} = 8,19 \cdot 10^{10}\, кгсм^3;$$

$$i_{\omega(\text{оп})} = \frac{FJ_{\omega(\text{оп})}}{l} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 6,95 \cdot 10^6}{600} = 2,43 \cdot 10^{10}\, кгсм^3.$$

Коэффициенты распределения по формуле (154)

$$\Delta_{AB} = \frac{4,529 \cdot 2,43}{4,529 \cdot 2,43 + 4,222 \cdot 8,19} = \frac{11,0}{11,0 + 34,6} = 0,241;$$

$$\Delta_{AC} = \frac{4,222 \cdot 8,19}{45,6} = \frac{34,6}{45,6} = 0,759;$$

$$\Delta_{BA} = \frac{4,529 \cdot 2,43}{2 \cdot 11,0 + 34,6} = \frac{11,0}{56,6} = 0,194;$$

$$\Delta_{BL} = \frac{11,0}{56,6} = 0,194;$$

$$\Delta_{BD} = \frac{34,6}{56,6} = 0,612;$$

$$\Delta_{CA} = \frac{34,6}{2 \cdot 34,6 + 11,0} = \frac{34,6}{80,2} = 0,4315.$$

$$\Delta_{CE} = \frac{34,6}{80,2} = 0,4315;$$

$$\Delta_{CD} = \frac{11,0}{80,2} = 0,137;$$

$$\Delta_{DB} = \frac{34,6}{2 \cdot 34,6 + 2 \cdot 11,0} = \frac{34,6}{91,2} = 0,379;$$

$$\Delta_{DC} = \frac{11,0}{91,2} = 0,121;$$

$$\Delta_{DF} = \frac{34,6}{91,2} = 0,379;$$

$$\Delta_{DM} = \frac{11,0}{91,2} = 0,121.$$

Бимоменты защемления (по формулам приложения 9)

$$\overline{B}_{AC} = -\overline{B}_{CA} = \overline{B}_{DF} = -\overline{B}_{FD} = -ml^2_{риг}\, g_{риг} =$$
$$= -100 \cdot 6^2 \cdot 0,08107 = -291,9 \text{ кгсм}^2.$$

Действительные бимоменты по концам стержней рамы находим по изложенному в предыдущем параграфе способу, результаты которого сведены в табл. 55.

В заглавных строках этой таблицы указаны узлы и соответствующие им коэффициенты распределения.

В первую строку под коэффициентом распределения Δ_{DF} выписываем бимомент защемления $B_{DF} = -291,9$. Этот бимомент, действующий на защемление узла D, выше мы условились называть «неуравновешенным бимоментом». Удаление защемления в узле D повлечет за собой депланацию этого узла и возникновение по концам сходящихся в нем элементов «уравновешивающих бимоментов» в сумме равных «неуравновешенному бимоменту», а по знаку ему противоположных. Величины их, определенные путем умножения «неуравновешенного бимомента» на соответствующие коэффициенты распределения, выписаны в третьей строке таблицы. Одновременно с возникновением «уравновешенных бимоментов» по концам элементов, сходящихся в узле D, на противоположных концах их у защемлений B, C, F и M возникнут вторичные бимоменты защемления в $\frac{\gamma}{\mu}$ раз меньше соответствующих им «уравновешенных бимоментов» и одинаковые с ними по знаку, т. е.

$$\overline{B}_{BD} = \overline{B}_{DB} \frac{\gamma_{риг}}{\mu_{риг}} = 110,63 \cdot 0,461 = 51,00 \text{ кгсм}^2;$$

$$\overline{B}_{CD} = \overline{B}_{DC} \frac{\gamma_{оп}}{\mu_{оп}} = 35,32 \cdot 0,415 = 14,66 \text{ кгсм}^2;$$

$$\overline{B}_{FD} = \overline{B}_{DF} \frac{\gamma_{риг}}{\mu_{риг}} = 110,63 \cdot 0,461 = 51,00 \text{ кгсм}^2;$$

$$\overline{B}_{MD} = \overline{B}_{DM} \frac{\gamma_{оп}}{\mu_{оп}} = 35,32 \cdot 0,415 = 14,66 \text{ кгсм}^2.$$

Таблица 55

Узел D				Узел C			Узел A		Узел B		
$\Delta_{DF}=$ $=0,379$	$\Delta_{DC}=$ $=0,121$	$\Delta_{DB}=$ $=0,379$	$\Delta_{DM}=$ $=0,121$	$\Delta_{CA}=$ $=0,4315$	$\Delta_{CE}=$ $=0,4315$	$\Delta_{CD}=$ $=0,137$	$\Delta_{AB}=$ $=0,241$	$\Delta_{AC}=$ $=0,759$	$\Delta_{BA}=$ $=0,194$	$\Delta_{BL}=$ $=0,194$	$\Delta_{BD}=$ $=0,612$
−291,9 +110,63	+35,32	+110,63	+35,32	+291,9 −132,28	−132,28	+14,66 −42,00	+85,04	−291,9 − 60,98 +267,84	+35,29 −16,74	−16,74	+51,00 −52,81
+15,83	−17,43 + 5,06	−24,35 +15,83	+5,06	+123,47 −54,18	−54,18	+2,10 −17,20	−6,95 +7,70	−24,98 +24,23	+3,20 −2,04	−2,04	+7,30 −6,43
+3,83	−7,14 +1,22	−2,96 +3,83	+1,22	+11,17 −5,04	−5,04	+0,51 −1,60	−0,85 +0,76	−2,32 −2,41	+0,32 −0,41	−0,41	+1,77 −1,28
+0,47	−0,66 +0,15	−0,59 +0,47	+0,15	+1,11 −0,51	−0,51	+0,06 −0,16	−0,17 +0,10	−0,24 +0,31	+0,04 −0,05	−0,05	+0,22 −0,16
+0,05	−0,07 +0,02	−0,07 +0,05	+0,02	+0,14 −0,06	−0,06	+0,01 −0,02	−0,02 +0,01	−0,03 +0,04		−0,01	+0,02 −0,01
+161,09	+16,47	+102,84	+41,77	+235,72	−192,07	−43,64	+85,62	−85,62	+19,61	−19,25	−0,38

Последним двум из этих бимоментов место в табл. 55 не отведено, а первые два выписаны во второй строке этой таблицы.

«Уравновесив» таким образом узел D и наложив вновь на него защемление, переходим к «уравновешиванию» узла C. На защемление его будут действовать: бимомент защемления $\overline{B}_{CA}=$ $=291{,}9$, который выписываем в первую строку таблицы под соответствующим коэффициентом распределения Δ_{CA}, и вторичный бимомент защемления $\overline{B}_{CD}=14{,}66$, который выписываем во вторую строку таблицы под коэффициентом распределения Δ_{CD}. При удалении защемления узел получит положительную депланацию и на концах сходящихся в нем стержней возникнут «уравновешивающие бимоменты», в сумме равные «неуравновешенному бимоменту», а по знаку ему противоположные. Величины их, полученные путем умножения «неуравновешенного бимомента» (равного $291{,}9+15{,}07=$ $=306{,}97$) на соответствующие коэффициенты распределения, выписаны в третьей строке таблицы. Одновременно с возникновением «уравновешивающих бимоментов» по концам сходящихся в узле C элементов на противоположных концах их у защемлений A, D и E возникнут вторичные бимоментные защемления

$$\overline{B}_{AC}=\overline{B}_{CA}\frac{\gamma_{риг}}{\mu_{риг}}=-132{,}28\cdot 0{,}461=-60{,}98\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{DC}=\overline{B}_{CD}\frac{\gamma_{оп}}{\mu_{оп}}=-42{,}00\cdot 0{,}415=-17{,}43\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{EC}=\overline{B}_{CE}\frac{\gamma_{риг}}{\mu_{риг}}=-132{,}28\cdot 0{,}461=-60{,}98\ кгсм^2.$$

Последнему из этих бимоментов место в таблице не отведено. Бимомент $\overline{B}_{AC}$ выписан во вторую строку таблицы, а бимомент $\overline{B}_{DC}$ — в четвертую строку, являющуюся первой строкой второго цикла.

Аналогично произведено «уравновешивание» узлов A и B.

Выпишем вторичные бимоменты защемления, полученные при «уравновешивании» этих узлов:

$$\overline{B}_{BA}=\overline{B}_{AB}\frac{\gamma_{оп}}{\mu_{оп}}=85{,}4\cdot 0{,}415=35{,}29\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{CA}=\overline{B}_{AC}\frac{\gamma_{риг}}{\mu_{риг}}=267{,}84\cdot 0{,}461=123{,}47\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{LB}=\overline{B}_{BL}\frac{\gamma_{оп}}{\mu_{оп}}=-16{,}74\cdot 0{,}415=-6{,}95\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{DB}=\overline{B}_{BD}\frac{\gamma_{риг}}{\mu_{риг}}=-58{,}81\cdot 0{,}461=-24{,}35\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{AB}=\overline{B}_{BA}\frac{\gamma_{оп}}{\mu_{оп}}=-16{,}74\cdot 0{,}415=-6{,}95\ кгсм^2.$$

Второй цикл «уравновешивания» вторичных бимоментов защемления аналогичен первому «циклу». Неуравновешенные бимоменты выписываем в четвертой строке таблицы (в первой строке второго цикла).

Вторичные бимоменты защемления второго цикла на опорах, в таблицу не выписанные:

$$\overline{B}_{FD} = 15{,}83 \cdot 0{,}461 = 7{,}3\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{MD} = 5{,}06 \cdot 0{,}415 = 2{,}1\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{EC} = -54{,}18 \cdot 0{,}461 = -24{,}98\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{LB} = -2{,}04 \cdot 0{,}415 = 0{,}85\ кгсм^2.$$

Вторичные бимоменты защемления третьего цикла на опорах, в таблицу не выписанные:

$$B_{FD} = 3{,}83 \cdot 0{,}461 = 1{,}77\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{MD} = 1{,}22 \cdot 0{,}415 = 0{,}51\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{EC} = -5{,}04 \cdot 0{,}461 = -2{,}32\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{LB} = -0{,}41 \cdot 0{,}415 = -0{,}17\ кгсм^2.$$

Те же бимоменты после четвертого цикла:

$$\overline{B}_{FD} = 0{,}47 \cdot 0{,}461 = 0{,}22\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{MD} = 0{,}15 \cdot 0{,}415 = 0{,}06\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{EC} = -0{,}51 \cdot 0{,}461 = -0{,}24\ кгсм^2;$$

$$B_{LB} = -0{,}05 \cdot 0{,}415 = -0{,}02\ кгсм^2.$$

Те же бимоменты после пятого цикла:

$$\overline{B}_{FD} = 0{,}05 \cdot 0{,}461 = 0{,}02\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{MD} = 0{,}02 \cdot 0{,}415 = 0{,}01\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{EC} = -0{,}06 \cdot 0{,}461 = -0{,}03\ кгсм^2;$$

$$\overline{B}_{LB} \approx 0.$$

После пятого цикла уравновешивание узлов заканчивается, так как дальнейшее распределение их практически является излишним.

Действительные значения бимоментов по концам стержней получим как алгебраическую сумму бимоментов, выписанных в

соответствующей графе таблицы, а действительные бимоменты путем соответствующих величин, отдельно записанных в тексте:

$$B_{FD} = 291{,}9 + 51 + 7{,}30 + 1{,}77 + 0{,}22 + 0{,}02 = 352{,}21\ кгсм^2;$$

$$B_{MD} = 14{,}66 + 2{,}1 + 0{,}51 + 0{,}06 + 0{,}01 = 17{,}34\ кгсм^2;$$

$$B_{EC} = -60{,}58 - 24{,}98 - 2{,}32 - 0{,}24 - 0{,}03 = -88{,}55\ кгсм^2;$$

$$B_{LB} = -6{,}95 - 0{,}85 - 0{,}17 - 0{,}02 = -7{,}9\ кгсм^2.$$

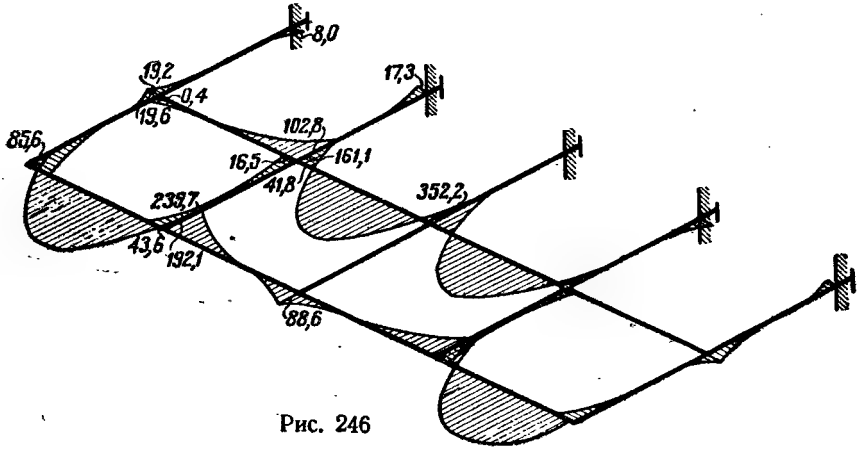


Рис. 246

По полученным результатам на рис. 246 построена искомая эпюра бимоментов.

Вычисления контролируются следующими проверками:

1) сумма коэффициентов распределения для каждого узла равна единице;

2) в «уравновешенном» узле алгебраическая сумма бимоментов должна быть равна нулю

$$\Sigma B_{DN} = \Sigma B_{CN} = \Sigma B_{AN} = \Sigma B_{BN} = 0;$$

3) сумма окончательных узловых бимоментов равна нулю;

4) опорный бимомент незагруженного стержня равен бимоменту на противоположном конце этого стержня, умноженному на соответствующий коэффициент $\frac{\gamma}{\mu}$:

$$B_{MD} = B_{DM}\frac{\gamma_{оп}}{\mu_{оп}},\quad B_{EC} = B_{CE}\frac{\gamma_{риг}}{\mu_{риг}},\quad B_{LB} = B_{BL}\frac{\gamma_{оп}}{\mu_{оп}},$$

§ 38. РАСЧЕТ НЕПЛОСКИХ БАЛОЧНЫХ И РАМНЫХ СИСТЕМ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Во второй части настоящей работы мы изложили теорию расчета так называемых плоских балочных и рамных систем из тонкостенных элементов. В отношении балочных систем предполагалось, что центр опорного закрепления совпадает с главными центральными точками сечения т. е. с центром тяжести и центром изгиба. На плоские рамные системы мы также налагали целый ряд ограничений, перечисленных на стр. 338 и 339, и при нарушении хотя бы одного из этих ограничений рама уже не считалась плоской и работа ее под нагрузкой становилась неопределенной.

В инженерной же практике плоские системы встречаются очень редко. В реальных системах имеют место различные эксцентрицитеты, вызываемые конструктивной необходимостью и различного рода погрешностями при изготовлении конструкции. Такие системы называются неплоскими. Расчету этих неплоских систем была посвящена кандидатская диссертация инж. Ю. Ц. Остроменцкого[1]. В своих исследованиях для расчета неразрезных тонкостенных балок он вывел своеобразное уравнение 6 моментов, 3 бимоментов и 2 нормальных сил и предложил приближенный метод расчета, позволяющий число неизвестных уменьшить с 7 до 2 при погрешности, не превышающей 2%.

Величина напряжений в неплоской рамной системе в отдельных случаях может отличаться от напряжений в соответствующей плоской системе на величину до 30%.

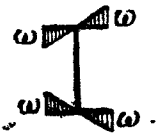
По исследованиям Ю. Ц. Остроменцкого, неплоскую рамную систему можно рассчитывать как плоскую, если величина наибольшего вертикального эксцентрицитета в узле рамы не превосходит половину высоты наименьшего из элементов, или если величина наибольшего горизонтального эксцентрицитета не превосходит удвоенной толщины стенки наименьшего из элементов, сходящихся в узле.

В указанной работе рассмотрено применение к расчету неплоских систем как метода сил, так и метода деформаций, причем, как показал опыт расчета, метод сил более удобен для расчета неплоских балок, а метод деформаций для расчета неплоских рам, и, кроме того, как уже было указано выше, предлагается приближенный способ расчета, позволяющий число неизвестных в узле снизить до двух.

---

[1] Ю. Ц. Остроменцкий. Расчет неплоских балочных и рамных систем из тонкостенных элементов. Сб. «Строительная механика,» № 8, МИИГС, 1959.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

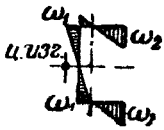


СЕКТОРИАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОКАТНЫХ ДВУТАВРОВ (ОСТ 10016—39)

№ профиля	Секториальный момент инерции J_ω в $см^6$	Секториальная площадь для крайней точки профиля ω_{max} в $см^2$	Секториальный момент сопротивления W_ω в $см^4$	Момент инерции при чистом кручении J_d в $см^4$	Упругая изгибно-крутильная характеристика $k=\sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$ $см^{-1}$
10	644,3	15,25	42,26	2,873	0,04122
12	1353	20,1	67,33	4,243	0,03457
14	2560	25,54	100,23	5,911	0,02966
16	4879	32,25	151,3	8,406	0,02562
18	8219	38,9	211,28	11,37	0,02295
20а	13121	46,15	284,31	14,81	0,02074
в	13857	47,05	294,5	17,85	0,02215
22а	22773	55,91	407,33	20,32	0,01844
в	23930	56,9	420,55	24,08	0,01958
24а	33799	64,48	524,15	25,57	0,01698
в	35426	65,57	540,25	30,12	0,018
27а	52987	76,68	690,99	31,93	0,01515
в	55414	77,92	711,21	37,6	0,01608
30а	76704	88,38	867,93	38,83	0,01389
в	80114	89,75	892,6	45,78	0,01475
с	83612	91,13	917,5	55,23	0,01587
33а	107160	100,69	1064,3	46,19	0,01281
в	111780	102,21	1093,6	54,49	0,01363
с	116520	103,73	1123,3	65,74	0,01466
36а	154820	115,19	1344	56,85	0,01183
в	161210	116,85	1379,6	66,72	0,01256
с	167760	118,51	1415,6	79,99	0,01348
40а	228900	134,13	1706,6	68,75	0,0107
в	237950	136	1749,6	80,68	0,01137
с	247210	137,85	1793,3	96,55	0,01220

№ профиля	Секториальный момент инерции J_ω в *см*^{6}	Секториальная площадь для крайней точки профиля ω_{max} в *см*^{2}	Секториальный момент сопротивления W_ω в *см*^{4}	Момент инерции при чистом кручении J_d в *см*^{4}	Упругая изгибно-крутильная характеристика $k=\sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$ *см*$^{-1}$
45а	376630	159,75	2357,6	95,31	0,009819
в	390770	161,86	2414,4	111,3	0,01041
с	405220	163,96	2471,5	131,8	0,01113
50а	611990	187,1	3270,9	131,2	0,009038
в	633900	189,44	3346,2	150,3	0,009504
с	656270	191,79	3421,8	174,9	0,01007
55а	906350	216,79	4180,8	159,9	0,008198
в	937220	219,36	4272,5	182,7	0,008617
с	968720	221,94	4364,8	211,5	0,009119
60а	1349900	251,22	5373,4	195,5	0,007427
в	1393200	254,04	5484,2	221,9	0,00779
с	1437300	256,86	5595,7	255,3	0,008226

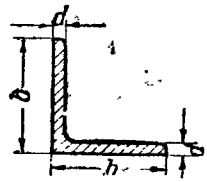
Примечание. При вычислении k приняты $G = 800\,000$ *кг/см*^{2}, $E = 2\,100\,000$ *кг/см*^{2}.



СЕКТОРИАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОКАТНЫХ ШВЕЛЛЕРОВ (ОСТ 10017—39)

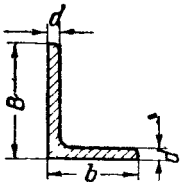
№ профиля	Координаты центра изгиба x_a в *см*	Секториальный момент инерции J_ω в $см^6$	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Момент инерции при чистом кручении J_d в $см^4$	Упругая изгибно-крутильная характеристика $k=\sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}\,см^{-1}$
			ω_1 в $см^2$	ω_2 в $см^2$	W_{ω_1} в $см^4$	W_{ω_2} в $см^4$		
5	1,08	24,91	2,7	4,26	9,22	5,85	1,35	0,1437
6,5	1,15	64,88	3,86	6,36	16,8	10,21	1,497	0,09375
8	1,22	141,8	5,15	8,75	27,57	16,2	1,94	0,07219
10	1,34	354,8	7,19	12,71	49,35	27,92	2,727	0,05411
12	1,48	768,3	9,54	17,31	80,51	44,39	3,634	0,04245
14а	1,58	1512	12,03	22,63	125,74	66,85	4,815	0,03483
в	1,39	1711	11,46	23,85	149,32	71,75	6,248	0,0373
16а	1,68	2760	14,74	28,63	187,23	96,4	6,306	0,0295
в	1,48	3099	14,03	30,09	220,87	103	8,227	0,0318
18а	1,83	4745	17,68	35,32	268,41	134,34	8,128	0,02555
в	1,57	5292	16,83	37,02	314,5	142,95	10,5	0,02749
20а	1,94	7698	21,27	42,46	361,95	181,28	9,84	0,02207
в	1,73	8560	20,24	44,45	422,87	192,57	12,5	0,02359
22а	2,07	11593	24,84	49,6	466,69	233,73	11,66	0,01958
в	1,86	12863	23,63	51,88	544,42	247,95	14,6	0,02079
24а	2,1	15326	27,48	55,21	557,74	277,59	13,21	0,01812
в	1,88	17007	26,1	57,75	651,56	294,5	16,47	0,01921
с	1,67	18640	24,91	60,09	748,35	310,21	21,31	0,02087
27а	2,14	24337	31,85	66,46	764,11	366,19	16,25	0,01595
в	1,91	26883	30,23	69,39	889,34	387,42	20,34	0,01698
с	1,7	29355	28,82	72,1	1018,6	407,14	26,34	0,01848
30а	2,26	36645	37,21	76,54	984,87	478,78	20,39	0,01456
в	2,03	40436	35,23	79,98	1147,8	505,61	25,01	0,01535
с	1,8	44104	33,59	83,06	1313	530,97	31,75	0,01656
33а	2,25	52630	41,39	88,54	1271,7	594,43	24,29	0,01326
в	2,02	57844	39,27	92,27	1473,2	626,93	29,92	0,01404
с	1,8	62890	37,44	95,69	1679,8	657,23	38,04	0,01518
36а	2,47	92189	49,5	104,55	1862,2	881,77	38,91	0,01268
в	2,24	100430	47,3	108,51	2123,4	925,54	46,56	0,01329
с	2,02	108420	45,36	112,18	2390,2	966,48	57,18	0,01417
40а	2,43	148100	55,78	121,67	2655,1	1217,2	59,74	0,0124
в	2,21	160100	53,51	125,86	2991,7	1272,1	70,78	0,01298
с	2	171870	51,51	129,8	3336,4	1324	85,72	0,01378

Примечание. При вычислении k приняты $G = 800\,000$ *кг/см²*, $E = 2\,100\,000$ *кг/см²*.



МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРИ ЧИСТОМ КРУЧЕНИИ ПРОКАТНЫХ РАВНОБОКИХ УГОЛКОВ (ОСТ 10014—39)

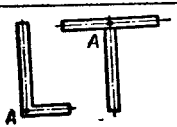
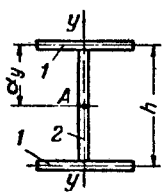
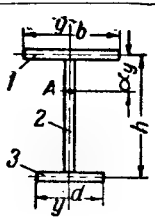
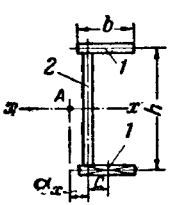
b в мм	d в мм	J_d в см⁴	b в мм	d в мм	J_d в см⁴	b в мм	d в мм	J_d в см⁴	b в мм	d в мм	J_d в см⁴
20	3	0,0333	60	5	0,4792	100	8	3,277	150	16	38,78
	4	0,0768		6	0,8208		10	6,333		18	54,82
25	3	0,0423		8	1,911		12	10,83		20	74,67
	4	0,09813	65	6	0,8928		14	17,01	180	14	31,64
30	4	0,1195		8	2,082		16	25,12		16	46,97
	5	0,2292		10	4	120	10	7,667		18	66,48
35	4	0,1408	75	6	1,037		12	13,13	200	16	52,43
	5	0,2708		8	2,423		14	20,67		18	74,26
40	4	0,1621		10	4,667		16	30,58		20	101,3
	5	0,3125		12	7,949		18	43,16		24	173,2
	6	0,5328	80	6	1,109	130	10	8,333		30	333
45	4	0,1835		8	2,594		12	14,28	220	16	57,89
	5	0,3542		10	5		14	22,49		20	112
	6	0,6048	90	8	2,935		16	33,31		24	191,7
50	5	0,3958		10	5,667	150	12	16,59		28	301,5
	6	0,6768		12	9,677		14	26,15	230	24	200,9
				14	15,18						



МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРИ ЧИСТОМ КРУЧЕНИИ ПРОКАТНЫХ НЕРАВНОБОКИХ УГОЛКОВ (ОСТ 10015—39)

B в мм	b в мм	d в мм	J_d в см⁴	B в мм	b в мм	d в мм	J_d в см⁴	B в мм	b в мм	d в мм	J_d в см⁴
30	20	3	0,0423	80	55	6	0,9288	150	100	10	8
		4	0,09813			8	2,167			12	13,71
35	20	4	0,1088			10	4,167			14	21,58
		5	0,208	90	60	6	1,037			16	31,95
45	30	4	0,1515			8	2,423	180	120	12	16,59
		6	0,4968			10	4,667			14	26,15
60	40	5	0,3958	100	75	8	2,85			16	38,78
		6	0,6768			10	5,5	200	120	12	17,74
		8	1,57			12	9,389			14	27,98
75	50	5	0,5	120	80	8	3,277			16	41,51
		6	0,8568			10	6,333	200	150	12	19,47
		8	1,997			12	10,83			16	45,6
		10	3,833	130	90	8	3,618			18	64,54
						10	7			20	88
						12	11,98				
						14	18,84				

ФОРМУЛЫ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ИЗГИБА И СЕКТОРИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ

№ п/п	Сечение	Координата центра изгиба	Секториальный момент инерции J_ω
1		Центр изгиба находится в пересечении осей профиля	0
2		$\alpha_y = \frac{h}{2}$	$\frac{J_{1y} h^2}{2}$
3		$\alpha_y = \frac{J_{3y} h}{J_y}$	$\frac{J_{1y} J_{3y} h^2}{J_y}$
4		$\alpha_x = \frac{2J_1 \cdot c}{J_x}$	$\frac{2J_{1x} J_{2x} c^2}{J_x} + \frac{J_{1x} b^2}{6}$

п/п	Сечение	Координата центра изгиба	Секториальный момент инерции J_ω
5		$\alpha_y = \frac{J_{3y}h}{J_y}$	$J_{1\omega} + J_{3\omega} + \frac{J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y}$
6		$\alpha_y = \frac{J_{3y}h}{J_y}$	$J_{1\omega} + J_{3\omega} + \frac{J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y}$
7		$\alpha_y = \frac{J_{1y}h}{J_y}$	$J_{1\omega} + J_{2\omega} + \frac{J_{1y}J_{2y}h^2}{J_y}$
8		$\alpha_y = \frac{h}{2}$	$\frac{J_y h^2}{4}$
9		$\alpha_y = \frac{2J_{3y}h}{J_y}$	$\frac{4J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y}$
10		$\alpha_x = \frac{J_{1xy}h}{J_x}$	$J_y\frac{h^2}{4} - \frac{J_{1xy}h^2}{J_x}$

№ п/п	Сечение	Координата центра изгиба	Секториальный момент инерции J_ω
11		$a_y = \frac{J_{1y}h + J_{2y}c}{J_y}$	$J_{1\omega} + J_{2\omega} + \frac{J_{1y}J_{2y}a^2 + J_{1y}J_{3y}h^2 + J_{2y}J_{3y}c^2}{J_y}$
12		$a_y = \frac{J_{2y}a + J_{3y}h}{J_y}$	$J_{1\omega} + J_{2\omega} + J_{3\omega} + \frac{J_{1y}J_{2y}a^2 + J_{1y}J_{3y}h^2 + J_{2y}J_{3y}c^2}{J_y}$
13		$a_x = \frac{(2F_1cf - J_{1x})2a}{J_x}$	$2J_{1\omega} + 2J_{1\eta}d^2 + 2J_{1x}(a + a_x)^2 + J_{2x}a_x^2 + 8F_1fa[fa - (a + a_x)c]$

Принятые в таблице обозначения:

A — центр изгиба профиля;

D_1, D_2, D_3 — центры изгиба отдельных элементов профиля;

1, 2, 3 — номера элементов, составляющих профиль;

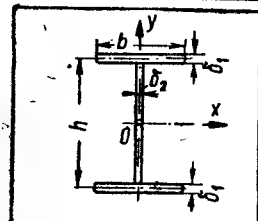
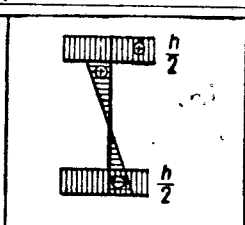
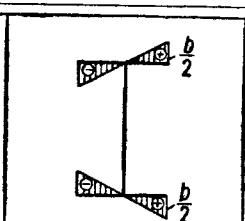
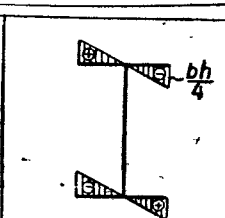
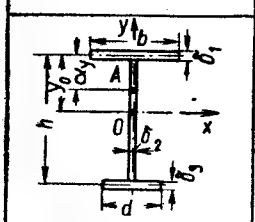
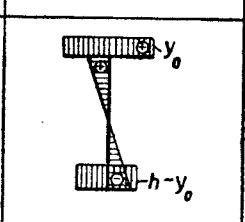
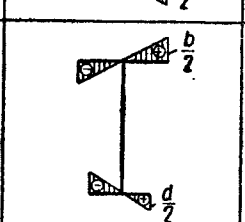
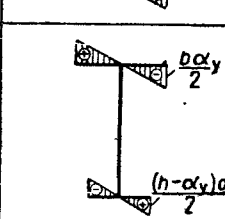
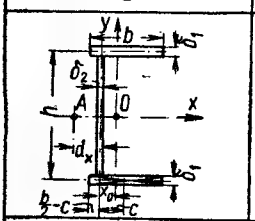
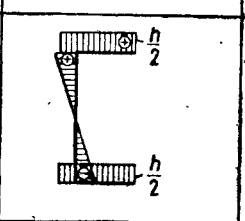
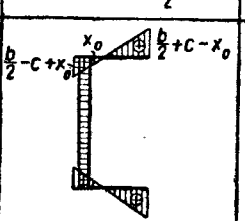
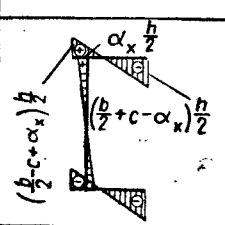
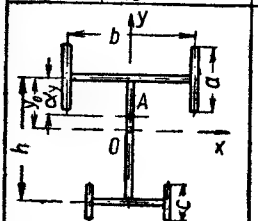
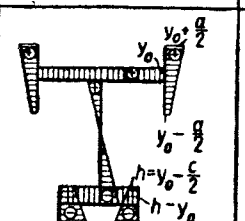
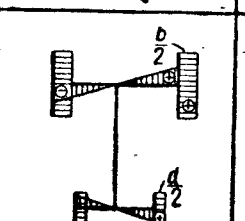
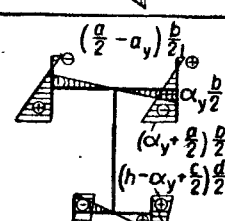
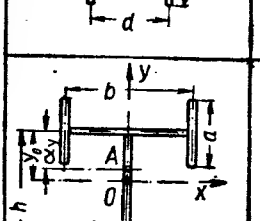
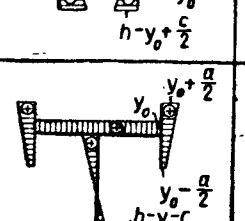
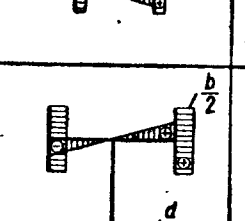
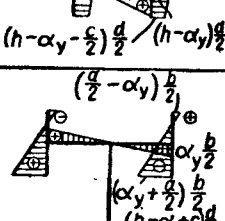
J_x, J_y — экваториальные моменты инерции всего сечения относительно указанных на чертеже осей;

J_{1x}, J_{2x}, J_{1y}, J_{2y}, J_{1xy}, $J_{1\eta}$ — экваториальные моменты инерции отдельных элементов профиля относительно указанных на чертеже осей: первый индекс — номер элемента, второй индекс — ось;

$J_{1\omega}$, $J_{2\omega}$, $J_{3\omega}$ — секториальные моменты инерции отдельных элементов относительно собственных центров изгиба;

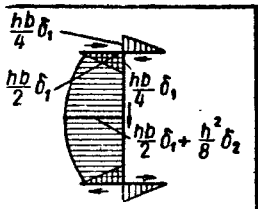
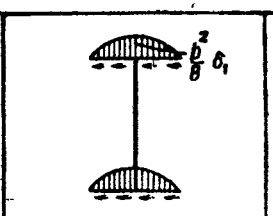
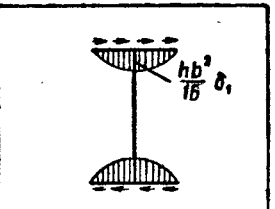
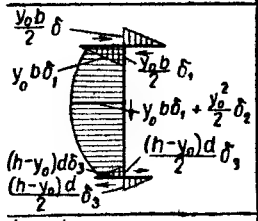
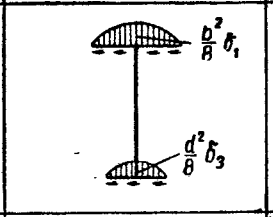
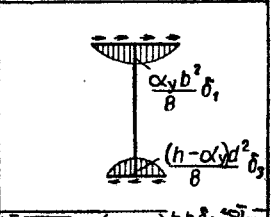
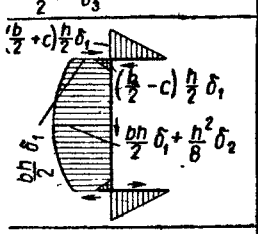
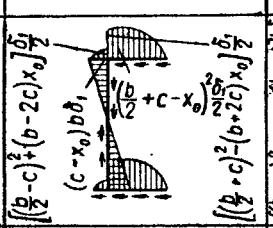
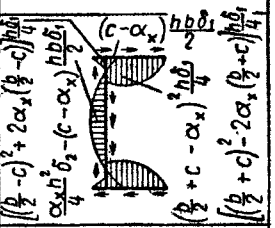
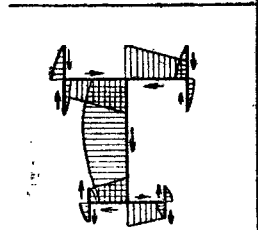
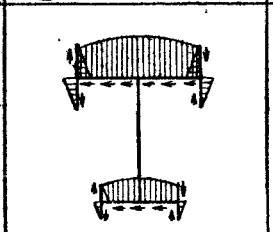
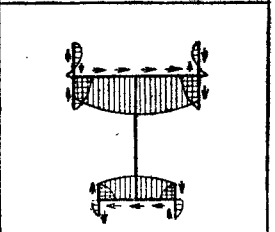
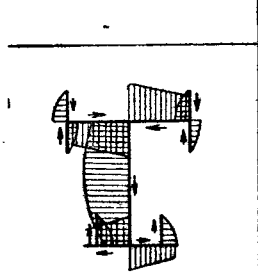
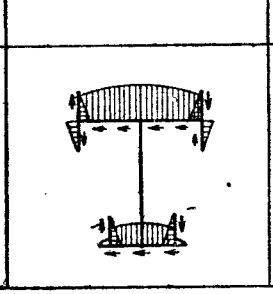
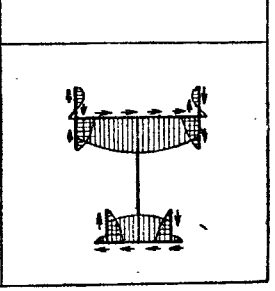
F_1 — площадь элемента номер 1.

ЭПЮРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ

№ п/п	Тип сечения	$\sigma_x = \frac{M_x}{J_y} y$	$\sigma_y = \frac{M_y}{J_y} x$	$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega$
		Эпюры y	Эпюры x	Эпюры ω
1				
2				
3				
4				
5				

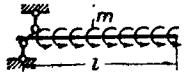
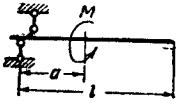
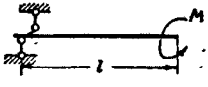
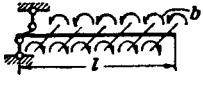
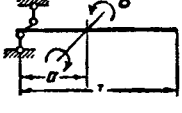
Примечания: 1. За положительное направление осей координат принято: для оси x—вправо,
2. Секториальная координата ω считается положительной при вращении подвижного радиуса-
3. Потоки касательных усилий показаны стрелками. За положительные направления приняты:
кручивания против движения часовой стрелки.

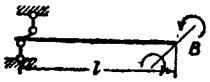
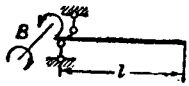
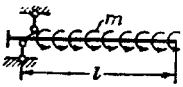
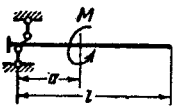
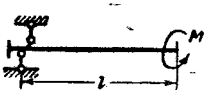
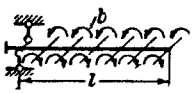
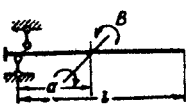
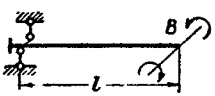
ПО СЕЧЕНИЮ ПРИ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЧНЫХ СТЕРЖНЕЙ

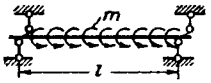
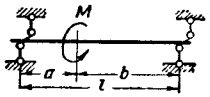
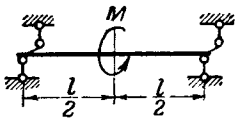
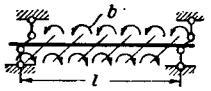
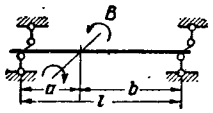
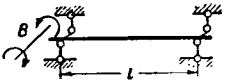
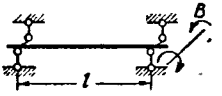
$\tau_x = \dfrac{Q_y S_x^{отс}}{J_x \delta}$	$\tau_y = \dfrac{Q_x S_y^{отс}}{J_y \delta}$	$\tau_\omega = \dfrac{M_\omega S_\omega^{отс}}{J_\omega \delta}$
Эпюры $S_x^{отс}$	Эпюры $S_y^{отс}$	Эпюры $S_\omega^{отс}$
		
		
		
		
		

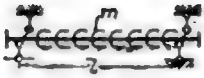
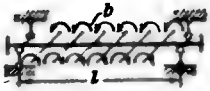
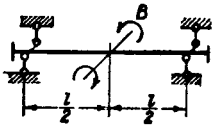
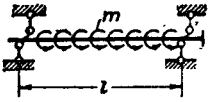
для оси y — вверх.
вектора против движения часовой стрелки.
для τ_x—при направлении Q_y вверх, для τ_y—при направлении Q_x вправо, для τ_ω —при угле за-

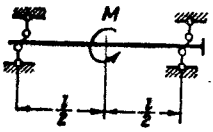
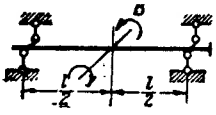
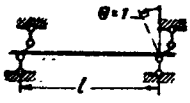
УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКРУЧИВАЮЩИХ НАГРУЗОК И ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ОПОРНЫХ ЗАКРЕПЛЕНИЯХ

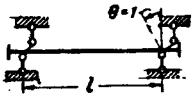
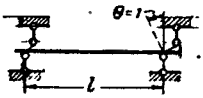
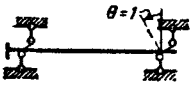
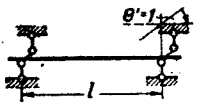
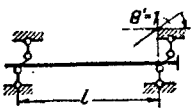
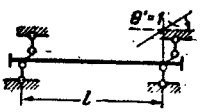
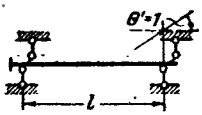
№ п/п	Схема балки и характер загружения	Уравнения упругой линии углов закручивания
1		$\theta = \frac{m}{k^4 EJ_\omega}\left[k^2 z\left(l-\frac{z}{2}\right)+\frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2}-z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}-1\right]$
2		$\theta_1 = \frac{M}{k^3 EJ_\omega}\left[kz-\frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz\right]$ $\theta_2 = \frac{M}{k^3 EJ_\omega}\left[ka+\operatorname{sh} k(z-a)-\frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz\right]$
3		$\theta = \frac{M}{k^3 EJ_\omega} z$
4		$\theta = \frac{b}{k^2 EJ_\omega} z$
5		$\theta_1 = \frac{B}{k^2 EJ_\omega}\cdot\frac{\operatorname{ch} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz$ $\theta_2 = \frac{B}{k^2 EJ_\omega}\left[\frac{\operatorname{ch} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz-\operatorname{ch} k(z-a)+1\right]$

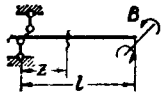
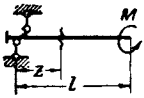
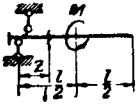
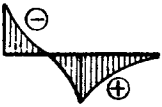
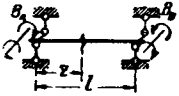
№ п/п	Схема балки и характер загружения	Уравнения упругой линии углов закручивания
6		$\theta = \frac{B}{k^2 EJ_\omega} \cdot \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}$
7		$\theta = \frac{B}{k^2 EJ_\omega} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl}\right]$
8		$\theta = \frac{m}{k^4 EJ_\omega \operatorname{ch} kl} \left[k^2 z\left(l - \frac{z}{2}\right) \operatorname{ch} kl + \operatorname{ch} kz - 1 - kl \operatorname{sh} kl + kl \operatorname{sh} k(l-z)\right]$
9		$\theta_1 = \frac{M}{k^3 EJ_\omega \operatorname{ch} kl} \{[\operatorname{sh} kl - \operatorname{sh} k(l-a)] \times (\operatorname{ch} kz - 1) - \operatorname{ch} kl (\operatorname{sh} kz - kz)\}$ $\theta_2 = \frac{M}{k^3 EJ_\omega \operatorname{ch} kl} [ka \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl + \operatorname{sh} k(l-a) - \operatorname{sh} k(l-z)(\operatorname{ch} ka - 1)]$
10		$\theta = \frac{M}{k^3 EJ_\omega \operatorname{ch} kl} [kz \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl + \operatorname{sh} k(l-z)]$
11		$\theta = \frac{bl}{k^2 EJ_\omega} \left[\frac{z}{l} - \frac{\operatorname{sh} kl - \operatorname{sh} k(l-z)}{kl \operatorname{ch} kl}\right]$
12		$\theta_1 = \frac{B}{k^2 EJ_\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} k(l-a)}{\operatorname{ch} kl} (\operatorname{ch} kz - 1)$ $\theta_2 = \frac{B}{k^2 EJ_\omega} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} ka \operatorname{sh} k(l-z) + \operatorname{ch} k(l-a)}{\operatorname{ch} kl}\right]$
13		$\theta = \frac{B}{k^2 EJ_\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} kz - 1}{\operatorname{ch} kl}$

№ п/п	Схема балки и характер загружения	Уравнения упругой линии углов закручивания
14		$\theta = \frac{m}{k^4 EJ_\omega}\left[\frac{k^2 z(l-z)}{2} + \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} - 1\right]$
15		$\theta_1 = \frac{M}{k^3 EJ_\omega}\left(\frac{kb}{l} z - \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz\right)$ $\theta_2 = \frac{M}{k^3 EJ_\omega}\left[\frac{ka}{l}(l-z) - \frac{\operatorname{sh} ka}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} k(l-z)\right]$
16		$\theta_1 = \frac{M}{2k^3 EJ_\omega}\left(kz - \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right)$
17		$\theta = 0$
18		$\theta_1 = -\frac{B}{k^2 EJ_\omega}\left(\frac{z}{l} - \frac{\operatorname{ch} kb}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz\right)$ $\theta_2 = \frac{B}{k^2 EJ_\omega}\left[\frac{l-z}{l} - \frac{\operatorname{ch} ka}{\operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} k(l-z)\right]$
19		$\theta = \frac{B}{k^2 EJ_\omega}\left[\frac{l-z}{l} - \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl}\right]$
20		$\theta = -\frac{B}{k^2 EJ_\omega}\left(\frac{z}{l} - \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}\right)$

№ п/п	Схема балки и характер загружения	Уравнения упругой линии углов закручивания
21		$\theta = \frac{m}{k^4 EJ_\omega}\left[\frac{k^2 z(l-z)}{2} - \frac{kl\,\mathrm{sh}\frac{kz}{2}\,\mathrm{sh}\frac{k(l-z)}{2}}{\mathrm{sh}\frac{kl}{2}}\right]$
22		$\theta_1 = \frac{M}{k^3 EJ_\omega} \times \frac{\frac{kz}{2}\,\mathrm{sh}\frac{kl}{2} - \mathrm{sh}^2\frac{kz}{2} - \mathrm{sh}\frac{kz}{2}\,\mathrm{sh}\frac{k(l-z)}{2}}{\mathrm{sh}\frac{kl}{2}}$
23		$\theta = 0$
24		$\theta_1 = -\frac{B}{k^2 EJ_\omega} \cdot \frac{4\mathrm{sh}\frac{kl}{4}\,\mathrm{sh}\frac{kz}{2}\,\mathrm{sh}\frac{k(2z-l)}{4} + 2kz\,\mathrm{sh}^2\frac{kl}{4} - kl\,\mathrm{sh}^2\frac{kz}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\frac{kl}{2} - 2\mathrm{sh}\frac{kl}{2}}$ $\theta_2 = \frac{B}{k^2 EJ_\omega} \cdot \frac{2k(l-z)\,\mathrm{sh}^2\frac{kl}{4} - 4\mathrm{sh}\frac{kl}{4}\,\mathrm{sh}\frac{k(2z-l)}{4} \times \frac{k(l-z)}{2}\,\mathrm{sh}\frac{kl}{2} - kl\,\mathrm{sh}^2\frac{k(l-z)}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\frac{kl}{2} - 2\mathrm{sh}\frac{kl}{2}}$
25		$\theta = \frac{m}{k^4 EJ_\omega}\left[\mathrm{ch}\,kz - 1 + k^2 z\left(l - \frac{z}{2}\right) - \frac{1 + kl\,\mathrm{sh}\,kl - \mathrm{ch}\,kl - \frac{k^2 l^2}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}\,\mathrm{sh}\,kz + \frac{\mathrm{ch}\,kl - 1 - \frac{k^2 l^2}{2}\,\mathrm{ch}\,kl}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}\,kz\right]$

№ п/п	Схема балки и характер загружения	Уравнения упругой линии углов закручивания
26		$\theta_1 = \frac{M}{k^3 EJ_\omega}\left(kz - \frac{\frac{kl}{2}\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}kz - \frac{\kappa l\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - \operatorname{sh}\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}}{kl\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz\right)$ $\theta_2 = \frac{M}{k^3 EJ_\omega}\left[\operatorname{sh} k\left(z - \frac{l}{2}\right) - \frac{kl\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - \operatorname{sh}\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}}{kl\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}\operatorname{sh} kz - \frac{\frac{kl}{2}\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}kz + \frac{kl}{2}\right]$
27		$\theta = 0$
28		$\theta_1 = -\frac{B}{k^2 EJ_\omega}\cdot\frac{\left(\operatorname{ch} kl - \operatorname{ch}\frac{kl}{2}\right)kz - \left(kl\operatorname{sh}\frac{kl}{2} - \operatorname{ch}\frac{kl}{2} + 1\right)\operatorname{sh} kz}{kl\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}$ $\theta_2 = \frac{B}{k^2 EJ_\omega}\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}\operatorname{sh} k(l-z) + \operatorname{sh} kz - \left(\operatorname{ch} kl - \operatorname{ch}\frac{kl}{2}\right)kz - kl\operatorname{ch}\frac{kl}{2}\operatorname{ch} k(l-z)}{kl\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl} + 1\right]$
29		$\theta = \frac{z}{l}$

№ п/п	Схема балки и характер загружения	Уравнения упругой линии углов закручивания
30		$\theta = \dfrac{\operatorname{sh} k\left(\dfrac{l}{2} - z\right) + kz \operatorname{ch} \dfrac{kl}{2} - \operatorname{sh} \dfrac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} \dfrac{kl}{2} - 2\operatorname{sh} \dfrac{kl}{2}}$
31		$\theta = \dfrac{kz \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kz}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}$
32		$\theta = \dfrac{kz \operatorname{ch} kl + \operatorname{sh} k(l - z) - \operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}$
33		$\theta = \dfrac{l \operatorname{sh} kz - z \operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}$
34		$\theta = \dfrac{l \operatorname{sh} kz - z \operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}$
35		$\theta = -\dfrac{(\operatorname{sh} kl - kl)(\operatorname{ch} kz - 1) - (\operatorname{ch} kl - 1)(\operatorname{sh} kz - kz)}{k(kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2)}$
36		

№ п/п	Схема балки и характер загружения	Изгибно-крутящие	
		эпюра	уравнение
1			$B_\omega = -B\,\dfrac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} kl}$
2			$B_\omega = -Ml\,\dfrac{\operatorname{sh} k(l-z)}{kl \operatorname{ch} kl}$
3			$B_\omega = -\dfrac{m}{k^2 \operatorname{ch} kl}\,[kl \operatorname{sh} k(l-z) - \operatorname{ch} kl + \operatorname{ch} kz]$
4			$B_{\omega(1)} = -\dfrac{M}{k \operatorname{ch} kl}\left[\left(\operatorname{sh} kl - \operatorname{sh}\dfrac{kl}{2}\right)\operatorname{ch} kz - \operatorname{ch} kl \operatorname{sh} kz\right]$ $B_{\omega(2)} = \dfrac{M}{k \operatorname{ch} kl}\operatorname{sh} k(l-z) \times \left(\operatorname{ch}\dfrac{kl}{2} - 1\right)$
5			$B_\omega = -B_A\,\dfrac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} - B_B\,\dfrac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}$

И ОБЩИХ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ В ОДНОПРОЛЕТНЫХ БАЛКАХ

бимоменты B_ω		Общие крутящие моменты L			
максимальные значения		эпюра	уравнение	максимальные значения	
$z=0$ $z=l$	$B_\omega = Ba$ $B_\omega = B$		$L=0$		
$z=0$	$B_\omega = Mlb$		$L=M$		
$z=0$	$B_\omega = ml^2c$		$L=m(l-z)$	$z=0$	$L=ml$
$z=0$ $z=\frac{l}{2}$	$B_\omega = Mld$ $B_\omega = \frac{Ml}{2}h$		$L_1=M$ $L_2=0$		
$z=0$ $z=l$	$B_\omega = B_A$ $B_\omega = B_B$		$L=-\frac{B_B-B_A}{l}$		

№ п/п	Схема балки и характер загружения	эпюра	уравнение
6			$B_\omega = \frac{m}{k^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right]$
7			$B_{\omega\,(1)} = \frac{M}{2k} \cdot \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$
8			$B_\omega = \frac{m}{k^2}\left[1 - \frac{kl \operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{2 \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}\right]$
9			$B_{\omega\,(1)} = \frac{M}{2k} \cdot \frac{\operatorname{ch} kz - \operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}$
10			$B_\omega = \frac{m}{k^2}\left(1 - \operatorname{ch} kz + \frac{1 + kl \operatorname{sh} kl - \operatorname{ch} kl - \frac{k^2 l^2}{2}}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz\right)$,
11			$B_{\omega\,(1)} = \frac{M}{k} \cdot \frac{1}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl} \times \left(kl \operatorname{ch}\frac{kl}{2} - \operatorname{sh}\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right) \operatorname{sh} kz$ $B_{\omega\,(2)} = \frac{M}{k}\left[\frac{\operatorname{sh} kz}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}\left(kl \operatorname{ch}\frac{kl}{2} - \operatorname{sh}\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right) - \operatorname{sh} k\left(z - \frac{l}{2}\right)\right]$

бимоменты B_ω		Общие крутящие моменты L			
максимальные значения		эпюра	уравнение	максимальные значения	
$z=\frac{l}{2}$	$B_\omega = ml^2p$		$L=m\left(\frac{l}{2}-z\right)$	$z=0$ $z=l$	$L=\frac{ml}{2}$ $L=-\frac{ml}{2}$
$z=\frac{l}{2}$	$B_\omega=\frac{Ml}{2}f$		$L_1=\frac{M}{2}$ $L_2=-\frac{M}{2}$		
$z=0$ $z=l$ $z=\frac{l}{2}$	$B_\omega=ml^2g$ $B_\omega=ml^2j$		$L=m\left(\frac{l}{2}-z\right)$	$z=0$ $z=l$	$L=\frac{ml}{2}$ $L=-\frac{ml}{2}$
$z=0$ $z=\frac{l}{2}$ $z=l$	$B_\omega=\frac{Ml}{2}n$		$L_1=\frac{M}{2}$ $L_2=-\frac{M}{2}$		
$z=l$	$B_\omega=\frac{ml^2}{2}$		$L=\frac{m}{k}\left[k(l-z)+\right.$ $+\frac{\operatorname{ch}kl-1-\frac{k^2l^2}{2}\operatorname{ch}kl}{kl\operatorname{ch}kl-\operatorname{sh}kl}$	$z=0$ $z=l$	$L=ml\varepsilon$ $L=-ml\psi$
$z=\frac{l}{2}$ $z=l$	$B_\omega=\frac{Ml}{2}v$ $B_\omega=\frac{Ml}{2}u$		$L_1=M\sigma$ $L_2=-M\tau$		

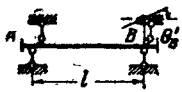
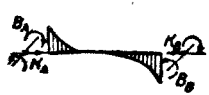
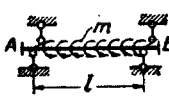
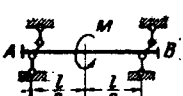
№ п/п	Схема балки и характер загружения	Изгибно-крутящие	
		эпюра	уравнение
12			$B_\omega = \frac{m}{k^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2} - z\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right]$
13			$B_{\omega\,(1)} = \frac{M}{2k} \cdot \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$ $B_{\omega\,(2)} = \frac{M}{2k}\left[\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} - 2\operatorname{sh} k\left(z - \frac{l}{2}\right)\right]$
14			$B_\omega = 0$
15			$B_\omega = -B\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}$
16			$B_\omega = B\frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl}$

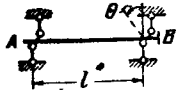
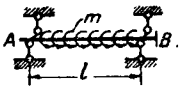
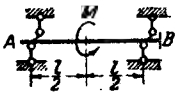
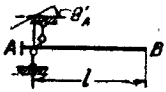
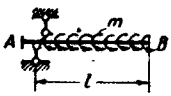
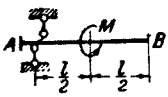
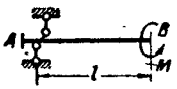
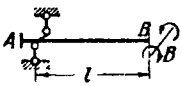
Формулы коэффициентов, входящих в максимальные значения B_ω и L, см, в

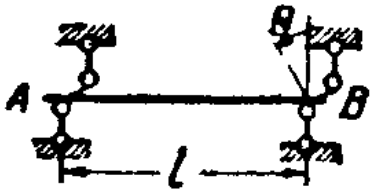
бимоменты B_ω		Общие крутящие моменты L			
максимальные значения		эпюра	уравнение	максимальные значения	
$z=\frac{l}{2}$	$B_\omega = ml^2p$		$L = m(l-z)$	$z=0$	$L=ml$
$z=\frac{l}{2}$	$B_\omega = \frac{Ml}{2}f$		$L_1=M$ $L_2=0$		
			$L=M$		
$z=l$	$B_\omega = B$		$L=0$		
$z=0$	$B_\omega = B$		$L=0$		

приложении 10, а численные значения этих коэффициентов—в приложении 11.

ФОРМУЛЫ РЕАКТИВНЫХ БИМОМЕНТОВ И КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ В ОДНОПРОЛЕТНЫХ БАЛКАХ

№ п/п	Схема балки и характер воздействия	Эпюра бимоментов	Опорные бимоменты B	Опорные крутящие моменты K
1			$B_A = \frac{EJ_\omega}{l}\gamma\theta'_B$ $B_B = \frac{EJ_\omega}{l}\mu\theta'_B$	$K_A = -K_B = -\frac{EJ_\omega}{l^2}\alpha\theta'_B$
2			$B_A = B_B = -\frac{EJ_\omega}{l^2}\alpha\theta$	$K_A = -K_B = \frac{EJ_\omega}{l^3}\lambda\theta$
3			$B_A = -B_B = -ml^2g$	$K_A = K_B = \frac{ml}{2}$
4			$B_A = -B_B = -\frac{Ml}{2}n$	$K_A = K_B = \frac{M}{2}$
5			$B_B = \frac{EJ_\omega}{l}\beta\theta'_B$	$K_A = -K_B = -\frac{EJ_\omega}{l^2}\beta\theta'_B$

№ п/п	Схема балки и характер воздействия	Эпюра бимоментов	Опорные бимоменты B	Опорные крутящие моменты K
6			$B_B = -\frac{EJ_\omega}{l^2}\beta\theta$	$K_A = -K_B = \frac{EJ_\omega}{l^3}\rho\theta$
7			$B_B = \frac{ml^2}{2}w$	$K_A = ml\varepsilon$ $K_B = ml\psi$
8			$B_B = \frac{Ml}{2}u$	$K_A = M\sigma$ $K_B = M\tau$
9			$B_A = \frac{EJ_\omega}{l}\nu\theta'_A$	$K_A = 0$
10			$B_A = -ml^2c$	$K_A = ml$
11			$B_A = -Mld$	$K_A = M$
12			$B_A = -Mlb$	$K_A = M$
13			$B_A = -Ba$	$K_A = 0$

№ п/п	Схема балки и характер воздействия	Эпюра бимоментов	Опорные бимоменты B	Опорные крутящие моменты K
14		—	$B = 0$	$K_A = -K_B = \frac{EJ_\omega}{l^3} \cdot \frac{1}{\varphi}\,\theta$

EJ_ω — секториальная жесткость балки.

$$\mu = \frac{kl\,(kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl)}{kl\,\mathrm{sh}\,kl - 2\,\mathrm{ch}\,kl + 2}; \quad \gamma = \frac{kl\,(\mathrm{sh}\,kl - kl)}{kl\,\mathrm{sh}\,kl - 2\,\mathrm{ch}\,kl + 2};$$

$$\alpha = \frac{k^2l^2\,(\mathrm{ch}\,kl - 1)}{kl\,\mathrm{sh}\,kl - 2\,\mathrm{ch}\,kl + 2}; \quad \lambda = \frac{k^3l^3\,\mathrm{sh}\,kl}{kl\,\mathrm{sh}\,kl - 2\,\mathrm{ch}\,kl + 2}; \quad \varphi = \frac{1}{k^2l^2}$$

$$\beta = \frac{k^2l^2\,\mathrm{sh}\,kl}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}; \quad \rho = \frac{k^3l^3\,\mathrm{ch}\,kl}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}; \quad \nu = kl\,\mathrm{th}\,kl.$$

Формулы остальных коэффициентов см. в приложении 10, а численные значения всех коэффициентов — в приложении 11.

СВОБОДНАЯ ТАБЛИЦА ФОРМУЛ КОЭФФИЦИЕНТОВ И НЕКОТОРЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕЖДУ НИМИ

$$r = \frac{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl};$$

$$O = \frac{\frac{kl}{2} \operatorname{ch} \frac{kl}{2} - \operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2} \operatorname{ch} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}};$$

$$s = \frac{\operatorname{sh} kl - kl}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl};$$

$$h = \frac{\operatorname{sh} kl - 2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} kl};$$

$$f = \frac{kl \operatorname{sh} kl - 2 \operatorname{ch} kl + 2}{k^3 l^3 \operatorname{sh} kl};$$

$$q = \frac{1}{kl \operatorname{sh} kl};$$

$$p = \frac{\operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 1}{k^2 l^2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2}};$$

$$\varphi = \frac{1}{k^2 l^2};$$

$$a = \frac{1}{\operatorname{ch} kl};$$

$$\Delta = \frac{kl \operatorname{sh} kl - \operatorname{ch} kl + 1}{k^3 l^3 \operatorname{sh} kl};$$

$$b = \frac{\operatorname{th} kl}{kl};$$

$$\xi = \frac{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{ch} kl}{kl \operatorname{ch} kl - kl};$$

$$c = \frac{kl \operatorname{sh} kl - \operatorname{ch} kl + 1}{k^2 l^2 \operatorname{ch} kl};$$

$$\eta = \frac{\operatorname{sh} kl - kl}{kl \operatorname{ch} kl - kl};$$

$$f = \frac{\operatorname{ch} kl - 1}{kl \operatorname{sh} kl};$$

$$\chi = \frac{\left(\frac{kl}{2}\right)^2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2} + 2}{\frac{kl}{2}\left(\frac{kl}{2} \operatorname{ch} \frac{kl}{2} - \operatorname{sh} \frac{kl}{2}\right)};$$

$$e = \frac{1}{kl \operatorname{th} kl};$$

$$\zeta = \frac{\left(\frac{kl}{2}\right)^2 \operatorname{ch}\frac{kl}{2} + 2\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - 2 - kl \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}\left(\frac{kl}{2}\operatorname{ch}\frac{kl}{2} - \operatorname{sh}\frac{kl}{2}\right)};$$

$$d = \frac{\operatorname{sh} kl - \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} kl};$$

$$\mu = \frac{kl\,(kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)}{kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2};$$

$$j = \frac{\operatorname{sh} kl - kl \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl};$$

$$\gamma = \frac{kl\,(\operatorname{sh} kl - kl)}{kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2};$$

$$v = \frac{kl \operatorname{sh} kl - \operatorname{ch} kl + 1 - kl \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl\,(kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)};$$

$$\alpha = \frac{k^2 l^2 (\operatorname{ch} kl - 1)}{kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2};$$

$$\sigma = \frac{\frac{kl}{2}\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl + \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl};$$

$$\beta = \frac{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl};$$

$$\tau = \frac{\frac{kl}{2}\operatorname{ch} kl - \operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl};$$

$$\lambda = \frac{k^3 l^3 \operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2};$$

$$w = \frac{kl \operatorname{sh} kl - 2\operatorname{ch} kl + 2}{kl\,(kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)};$$

$$\rho = \frac{k^2 l^2 \operatorname{ch} kl}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}$$

$$u = \frac{\operatorname{sh} kl - 2\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl};$$

$$\nu = kl \operatorname{th} kl$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{k^2 l^2}{2}\operatorname{ch} kl - kl \operatorname{sh} kl + \operatorname{ch} kl - 1}{kl\,(kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)};$$

$$g = \frac{\frac{kl}{2}(\operatorname{ch} kl + 1) - \operatorname{sh} kl}{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl}$$

$$\psi = \frac{\frac{k^2 l^2}{2}\operatorname{ch} kl - \operatorname{ch} kl + 1}{kl\,(kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)};$$

$$n = \frac{\operatorname{sh} kl - 2\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl\,(\operatorname{ch} kl - 1)}$$

$$\lambda = \frac{1}{t} \qquad \xi + \eta = 1 \qquad r + s = f$$

$$\beta = \frac{1}{r} \qquad \sigma + \tau = 1 \qquad \mu + \gamma = \alpha$$

$$\nu = \frac{1}{e} \qquad \varepsilon + \psi = 1 \qquad q + f = e$$

$\mu = \frac{1}{w}$	$\chi + \zeta = 2$	$q + s = \varphi$
$q = ae$	$2\alpha + u = 1$	$sb + t = fc$
$\varphi = be$	$2\tau - u = 1$	$as + r = c$
$\Delta = ce$	$2\varepsilon + w = 1$	$ar + s = bf$
$\alpha = \lambda f$	$2\psi - w = 1$	$qa + b = e$
$\mu = \lambda r$	$b(\mu - \alpha f) = 1$	$re + qs = \Delta$
$\gamma = \lambda s$	$f(\mu - \gamma) = 1$	$a\mu + \gamma = \alpha b$
$\beta = \rho b$	$\alpha(r - s) = 1$	$bf + c = b$
$s = \gamma t$	$\varphi(\lambda - 2\alpha) = 1$	$f(a + 1) = b$
$t = po$	$\varphi(\rho - \beta) = 1$	$b(r + qf) = \Delta$
$p = fn$	$f(\alpha - 2\gamma) = 1$	$b(\alpha f - \gamma) = a$
$u = p\beta$	$f\alpha(\xi - n) = 1$	$f(r - s) = t$
$s = fn$	$b + \nu r = 1$	$b(r - f^2) = t$
$r = f\xi$	$a + \nu f = 1$	$t(\alpha - 2\gamma) = 2g$
$f = t\alpha$	$\alpha c - \gamma b = 1$	$2(s + g) = f$
$h = \gamma p$	$\mu r - \gamma s = 1$	$2(r - g) = f$
$t = 2gf$	$a^2 + \nu b = 1$	$\varphi(fe - s) = q\Delta$
$\mu s = \gamma r$	$2ag = 1$	$d - v = b(f - v)$
	$br\rho = 1$	

ТАБЛИЦА ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

kl	r	s	t	p	a	b	c	f	e
0	0,3333	0,1667	0,08333	0,1250	1	1	0,5	0,5	∞
0,1	0,3331	0,1665	0,08325	0,1248	0,996	0,9972	0,4988	0,4996	100,33
0,2	0,3324	0,1659	0,08294	0,1244	0,9803	0,9869	0,4951	0,4983	25,33
0,3	0,3314	0,1649	0,08258	0,1239	0,9566	0,971	0,4891	0,4963	11,44
0,4	0,3298	0,1636	0,08202	0,1229	0,925	0,9499	0,4812	0,4934	6,579
0,5	0,3279	0,162	0,08129	0,1218	0,8868	0,9242	0,4715	0,4898	4,328
0,6	0,3256	0,1599	0,08044	0,1205	0,8435	0,8951	0,4605	0,4855	3,103
0,7	0,3229	0,1576	0,07943	0,1189	0,7967	0,8634	0,4485	0,4805	2,364
0,8	0,3199	0,155	0,07825	0,1172	0,7477	0,8301	0,4358	0,4749	1,882
0,9	0,3166	0,1522	0,07709	0,1153	0,6977	0,7959	0,4228	0,4688	1,551
1	0,313	0,1491	0,07577	0,1132	0,648	0,7616	0,4097	0,4621	1,313
1,2	0,3052	0,1424	0,07285	0,1087	0,5522	0,6947	0,3838	0,4475	1
1,4	0,2966	0,1351	0,0697	0,1037	0,4649	0,6324	0,3594	0,4317	0,8071
1,6	0,2875	0,1275	0,06639	0,0985	0,388	0,576	0,337	0,415	0,6779
1,8	0,2781	0,1198	0,06299	0,0933	0,3218	0,526	0,3167	0,3979	0,5868
2	0,2687	0,1121	0,0596	0,088	0,2658	0,482	0,2985	0,3808	0,5186
2,5	0,2452	0,0939	0,05142	0,0753	0,1631	0,3946	0,2607	0,3393	0,4054
3,0	0,2239	0,0778	0,04406	0,0639	0,0993	0,3317	0,2316	0,3017	0,335
3,5	0,2046	0,0644	0,03772	0,0541	0,0603	0,2852	0,2085	0,269	0,2862
4	0,1877	0,0533	0,03237	0,0459	0,0366	0,2498	0,1896	0,241	0,2502
5	0,16	0,0373	0,02421	0,0335	0,0135	0,2	0,1605	0,1973	0,2
6	0,1389	0,027	0,01856	0,025	$0,496\cdot10^{-2}$	0,1667	0,139	0,1658	0,1667
7	0,1225	0,0201	0,01459	0,0192	$0,182\cdot10^{-2}$	0,1429	0,1225	0,1426	0,1428
8	0,1094	0,0155	0,01172	0,0151	$0,671\cdot10^{-3}$	0,1251	0,1094	0,1249	0,125
9	0,0988	0,0123	0,0096	0,0121	$0,247\cdot10^{-3}$	0,1111	0,0988	0,1111	0,1111
10	0,09	0,01	0,008	0,00987	$0,908\cdot10^{-4}$	0,1	0,09	0,1	0,1
11	0,0826	0,00826	0,00676	0,0082	$0,334\cdot10^{-4}$	0,0909	0,0826	0,0909	0,0909
12	0,0764	0,00694	0,00579	0,00691	$0,123\cdot10^{-4}$	0,0833	0,0764	0,0833	0,0833
13	0,071	0,00592	0,00501	0,0059	$0,452\cdot10^{-5}$	0,0769	0,071	0,0769	0,0769
14	0,0663	0,0051	0,00437	0,00509	$0,166\cdot10^{-5}$	0,0714	0,0663	0,0714	0,0714
15	0,0622	0,00445	0,00385	0,00444	$0,612\cdot10^{-6}$	0,0667	0,0622	0,0667	0,0667

kl	d	j	v	w	u	σ	τ	ε	ψ
0	0,5	0,04167	0,3125	0,25	0,375	0,3125	0,6875	0,375	0,625
1	0,499	0,04165	0,3124	0,2499	0,3748	0,31254	0,6874	0,37504	0,62496
0,2	0,4959	0,04162	0,3123	0,2496	0,3744	0,3128	0,6872	0,37515	0,62485

kl	*d*	*j*	*v*	*w*	*u*	*o*	*τ*	*ε*	*ψ*
0,3	0,4909	0,04156	0,3115	0,2492	0,3738	0,3131	0,6869	0,37537	0,62463
0,4	0,4843	0,04147	0,3107	0,2486	0,3728	0,3136	0,6864	0,37566	0,62434
0,5	0,4762	0,04136	0,3099	0,2479	0,3715	0,3142	0,6858	0,376	0,624
0,6	0,467	0,04123	0,3085	0,247	0,37	0,315	0,685	0,3765	0,6235
0,7	0,4569	0,04108	0,3071	0,246	0,3683	0,3159	0,6841	0,377	0,623
0,8	0,4461	0,0409	0,3056	0,2446	0,3663	0,3169	0,6831	0,3775	0,6224
0,9	0,4351	0,0407	0,3038	0,2435	0,364	0,318	0,682	0,3782	0,6217
1	0,4239	0,04048	0,3018	0,242	0,3616	0,3192	0,6808	0,3789	0,621
1,2	0,4017	0,03998	0,2974	0,2387	0,3560	0,3220	0,678	0,3806	0,6194
1,4	0,3805	0,0394	0,2924	0,235	0,3497	0,3251	0,6749	0,3824	0,6175
1,6	0,3607	0,03875	0,2869	0,2309	0,3428	0,3286	0,6714	0,3845	0,6155
1,8	0,3425	0,03804	0,2809	0,2265	0,3354	0,3323	0,6677	0,3868	0,6133
2	0,3258	0,03727	0,2747	0,2218	0,3275	0,3362	0,6637	0,389	0,6109
2,5	0,2902	0,03515	0,2581	0,2095	0,3067	0,3466	0,6533	0,3952	0,6047
3	0,2612	0,03284	0,2411	0,1968	0,2853	0,3573	0,6426	0,4015	0,5984
3,5	0,2371	0,03044	0,2244	0,1844	0,2644	0,3678	0,6322	0,4078	0,5922
4	0,2166	0,02803	0,2085	0,1725	0,2445	0,3777	0,6222	0,4137	0,5862
5	0,1837	0,02347	0,1803	0,1513	0,2092	0,3954	0,6046	0,4243	0,5756
6	0,1584	0,01946	0,1569	0,1337	0,1801	0,4099	0,5901	0,4331	0,5668
7	0,1385	0,01609	0,1379	0,1191	0,1566	0,4217	0,5783	0,4404	0,5596
8	0,1227	0,01333	0,1224	0,1071	0,1376	0,4312	0,5688	0,4464	0,5536
9	0,1099	0,01111	0,1097	0,0972	0,1222	0,4389	0,5611	0,4513	0,5486
10	0,0993	0,00933	0,0993	0,0889	0,1096	0,4452	0,5548	0,4555	0,5444
11	0,0905	0,00789	0,0905	0,0818	0,0992	0,4504	0,5496	0,4591	0,5409
12	0,0831	0,00674	0,0831	0,0758	0,0905	0,4548	0,5452	0,4621	0,5379
13	0,0768	0,0058	0,0768	0,0705	0,0831	0,4584	0,5415	0,4647	0,5352
14	0,0714	0,00504	0,0714	0,0659	0,0768	0,4616	0,5384	0,467	0,533
15	0,0666	0,00441	0,0666	0,0619	0,0713	0,4643	0,5357	0,469	0,5309

kl	μ	γ	α	β	λ	ρ	ν	*g*	*n*
0	4	2	6	3	12	3	0	0,08333	0,25
0,1	4,0016	1,9997	6,002	3,003	12,01	3,012	0,00997	0,08332	0,2499
0,2	4,0064	1,9978	6,004	3,01	12,06	3,049	0,03948	0,08328	0,2496
0,3	4,0128	1,9971	6,01	3,018	12,11	3,108	0,08741	0,08321	0,2495
0,4	4,0225	1,9955	0,018	3,032	12,19	3,192	0,152	0,08312	0,2492
0,5	4,0339	1,9918	6,026	3,05	12,3	3,3	0,2311	0,083	0,2487
0,6	4,0482	1,9881	6,036	3,071	12,43	3,431	0,3222	0,08284	0,2482
0,7	4,0657	1,9841	6,05	3,097	12,59	3,567	0,4231	0,08266	0,2475
0,8	4,0886	1,9811	6,07	3,126	12,78	3,766	0,5312	0,08246	0,2467
0,9	4,107	1,9737	6,081	3,158	12,97	3,968	0,6447	0,08223	0,2459
1	4,132	1,9676	6,099	3,195	13,2	4,195	0 7616	0,08198	0,2449
1,2	4,189	1,954	6,143	3,277	13,73	4,717	1	0,0814	0,2428
1,4	4,255	1,9384	6,193	3,372	14,35	5,332	1,239	0,08073	0,2403
1,6	4,331	1,9209	6,252	3,478	15,06	6,038	1,475	0,07999	0,2375
1,8	4,415	1,9019	6,317	3,596	15,87	6,835	1,704	0,07915	0,2344
2	4,508	1,8815	6,389	3,722	16,87	7,722	1,928	0,07825	0,2311
2,5	4,773	1,8258	6,599	4,078	19,45	10,33	2,467	0,07577	0,2218
3	5,081	1,7664	6,847	4,466	22,7	13,47	2,985	0,07303	0,2117
3,5	5,424	1,7062	7,131	4,888	26,51	17,14	3,494	0,07012	0,2011
4	5,797	1,6475	7,444	5,328	30,89	21,33	3,997	0,06717	0,1904
5	6,609	1,5406	8,149	6,245	41,31	31,25	5	0,06136	0,1697
6	7,481	1,4517	8,933	7,2	53,88	43,19	6	0,05597	0,1509
7	8,394	1,3811	9,775	8,163	68,54	57,13	7	0,05115	0,1345
8	9,337	1,3259	10,66	9,141	85,32	73,07	8	0,04692	0,1205
9	10,29	1,2827	11,57	10,12	104,13	91,13	9	0,04322	0,1087
10	11,25	1,2488	12,5	11,11	125	111,1	10	0,04001	0,0987
11	12,22	1,2217	13,44	12,1	147,89	133,1	11	0,03719	0,0902
12	13,2	1,1998	14,4	13,09	172,8	157,1	12	0,03475	0,0829
13	14,18	1,1817	15,36	14,08	199,72	183,1	13	0,03254	0,0767
14	15,17	1,1666	16,33	15,08	228,68	211,2	14	0,03061	0,0713
15	16,16	1,1538	17,31	16,07	259,61	241	15	0,02889	0,0666

kl	o	h	q	φ	Δ	ξ	η	χ	ζ
0	0,66667	0	∞	∞	∞	0,6667	0,3333	1,2500	0,75
0,1	0,6667	0,00124	99,83	100	50,04	0,6668	0,3332	1,2499	0,75
0,2	0,6668	0,00491	24,83	25	12,54	0,6671	0,3329	1,2499	0,7501
0,3	0,6669	0,0108	10,94	11,11	5,597	0,6677	0,3323	1,2498	0,7502
0,4	0,6671	0,0187	6,086	6,250	3,166	0,6684	0,3316	1,2496	0,7503
0,5	0,6674	0,0281	3,838	4	2,041	0,6694	0,3306	1,2494	0,7505
0,6	0,6677	0,0388	2,618	2,778	1,429	0,6706	0,3294	1,2492	0,7507
0,7	0,668	0,0503	1,883	2,041	1,06	0,672	0,328	1,2489	0,751
0,8	0,6684	0,0622	1,407	1,562	0,8202	0,6736	0,3264	1,2486	0,7514
0,9	0,6689	0,0743	1,082	1,234	0,6558	0,6754	0,3246	1,2483	0,7516
1	0,6694	0,0862	0,8509	1	0,5379	0,6774	0,3226	1,2475	0,7524
1,2	0,6706	0,1087	0,5521	0,6944	0,3838	0,6819	0,3181	1,2468	0,7532
1,4	0,672	0,1286	0,3754	0,5104	0,2901	0,687	0,313	1,2459	0,754
1,6	0,674	0,1453	0,2629	0,3904	0,2285	0,6927	0,3073	1,2448	0,7551
1,8	0,675	0,159	0,1889	0,3087	0,1858	0,6989	0,3011	1,2435	0,7565
2	0,677	0,1696	0,1378	0,25	0,1548	0,7055	0,2945	1,242	0,758
2,5	0,683	0,1857	0,06611	0,16	0,1057	0,7233	0,2767	1,238	0,7621
3	0,89	0,1907	0,03327	0,1111	0,07759	0,742	0,258	1,233	0,767
3,5	0,697	0,189	0,01727	0,08163	0,05967	0,7607	0,2393	1,228	0,7724
4	0,705	0,1834	$0,9161\cdot10^{-2}$	0,0625	0,04744	0,7787	0,2213	1,222	0,7782
5	0,723	0,1674	$0,2695\cdot10^{-2}$	0,04	0,0321	0,8109	0,1891	1,21	0,7904
6	0,742	0,1501	$0,8262\cdot10^{-3}$	0,02783	0,02317	0,8375	0,1625	1,197	0,8032
7	0,761	0,1342	$0,2605\cdot10^{-3}$	0,02041	0,0175	0,8587	0,1413	1,184	0,8156
8	0,779	0,1204	$0,8385\cdot10^{-4}$	0,01562	0,01367	0,8756	0,1244	1,173	0,8275
9	0,795	0,1086	$0,2742\cdot10^{-4}$	0,01234	0,01098	0,8891	0,1109	1,162	0,8385
10	0,811	0,0987	$0,9080\cdot10^{-5}$	0,01	$0,9000\cdot10^{-2}$	0,9001	0,0999	1,151	0,8487
11	0,825	0,0902	$0,3037\cdot10^{-5}$	$0,8264\cdot10^{-2}$	$0,7508\cdot10^{-2}$	0,9091	0,0909	1,142	0,8579
12	0,838	0,0829	$0,1024\cdot10^{-5}$	$0,6944\cdot10^{-2}$	$0,6364\cdot10^{-2}$	0,9167	0,0833	1,134	0,8663
13	0,849	0,0767	$0,3477\cdot10^{-6}$	$0,5917\cdot10^{-2}$	$0,546\cdot10^{-2}$	0,9231	0,0769	1,126	0,874
14	0,859	0,0713	$0,1187\cdot10^{-6}$	$0,5099\cdot10^{-2}$	$0,4734\cdot10^{-2}$	0,9286	0,0714	1,119	0,8809
15	0,868	0,0666	$0,4078\cdot10^{-7}$	$0,4446\cdot10^{-2}$	$0,4148\cdot10^{-2}$	0,9333	0,0667	1,113	0,8871

ГРАФИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ БИМОМЕНТОВ

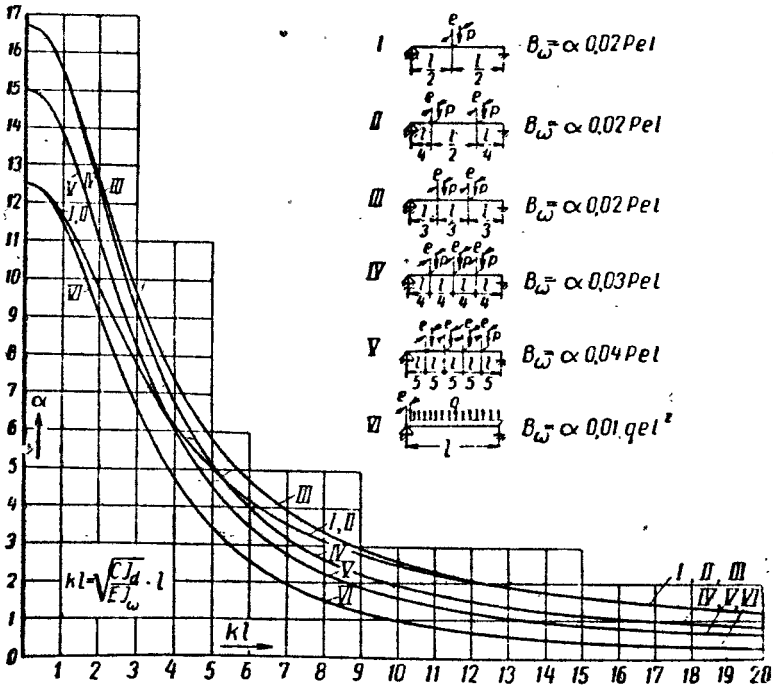


ГРАФИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ БИМОМЕНТОВ

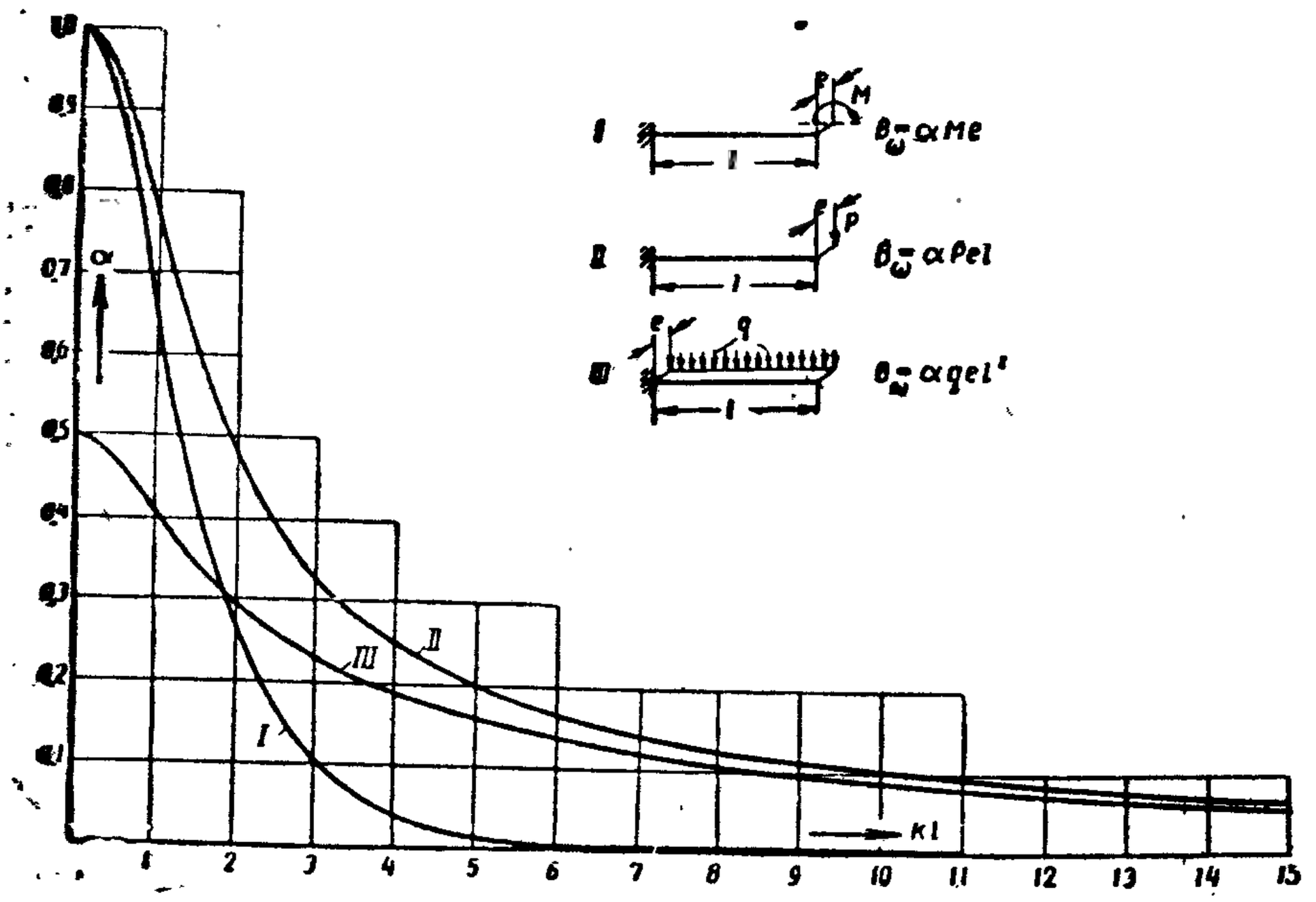


ГРАФИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ БИМОМЕНТОВ

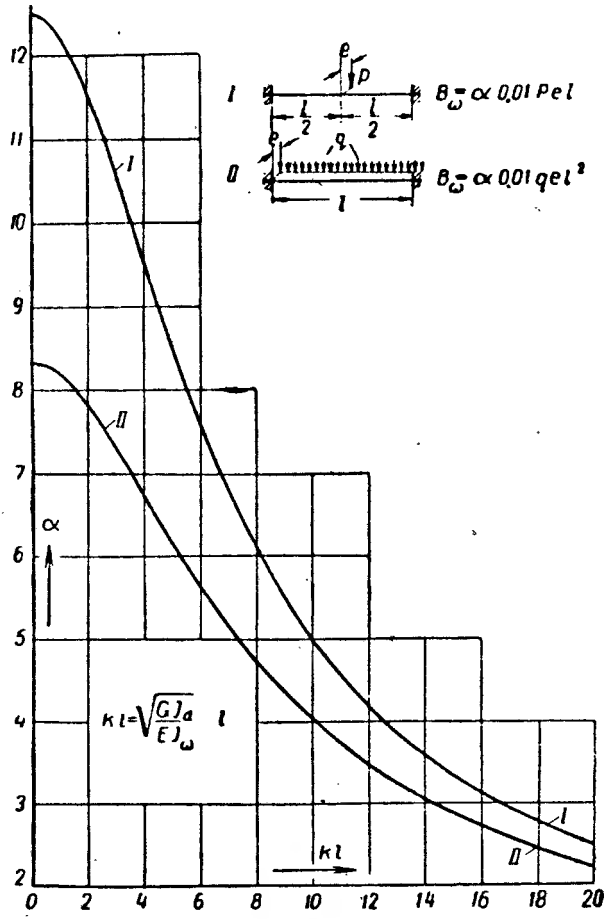


ГРАФИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ БИМОМЕНТОВ

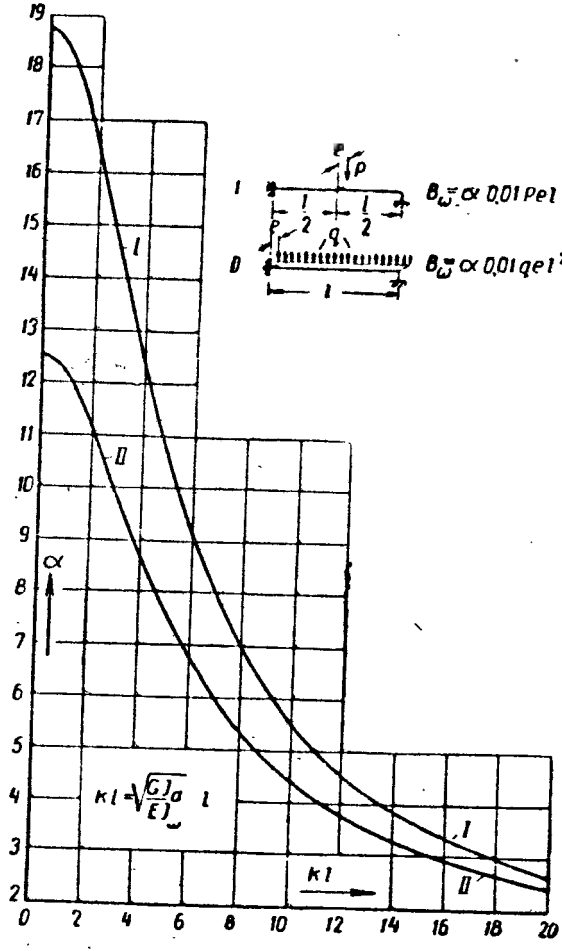


ГРАФИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ БИМОМЕНТОВ

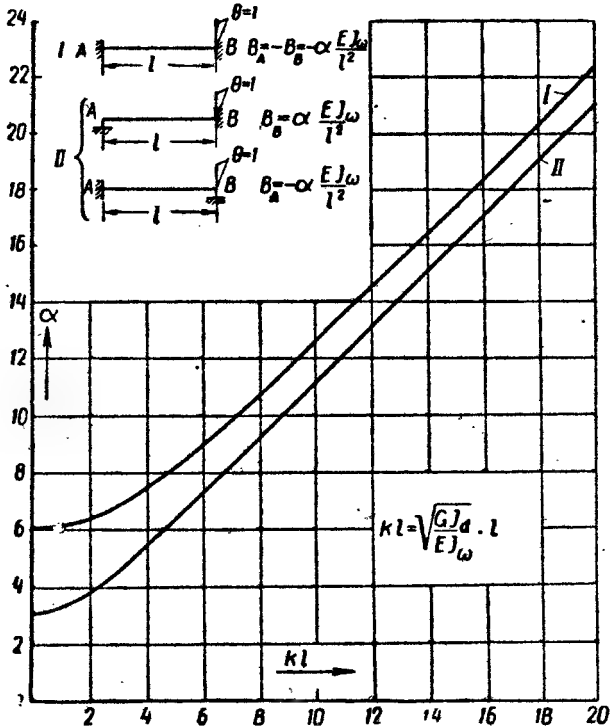
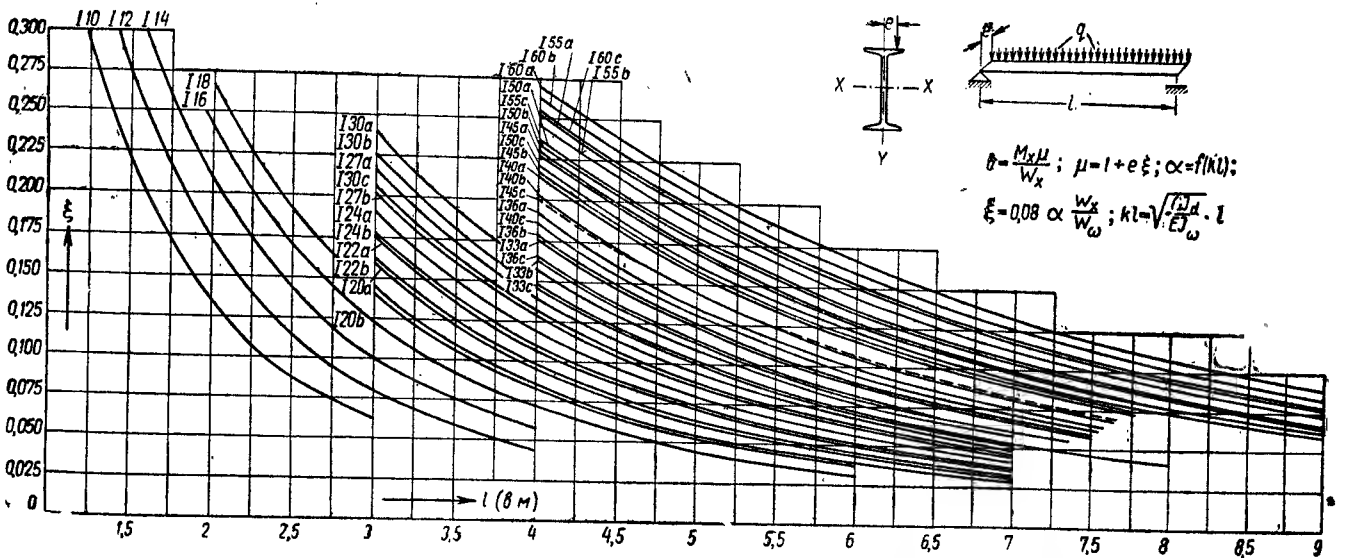


ГРАФИК ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОКАТНЫХ ДВУТАВРОВ НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ



ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Краткий исторический очерк развития теории расчета стержневых тонкостенных конструкций

Введение . . . . . .

Часть первая

Тонкостенные стержни

Глава I. Основные положения 17

§ 1. Тонкостенные стержни, имеющие открытое и замкнутое поперечное сечение . . . . . —

§ 2. Чистое и стесненное кручение 18

§ 3. Гипотезы, положенные в основу расчета открытых и замкнутых тонкостенных стержней 20

Глава II. Чистое кручение 22

§ 4. Краткие сведения из теории чистого кручения . . . . . —

§ 5. Некоторые результаты экспериментальной проверки чистого кручения 26

§ 6. Численные примеры вычислении величины J_d 48

Глава III. Стесненное кручение 50

§ 7. Краткие сведения из теории стесненного кручения . . . . —

§ 8. Некоторые результаты экспериментальной проверки стесненного кручения тонкостенных стержней 68

Глава IV. Практические способы определения геометрических характеристик тонкостенных профилей 95

§ 9. Секториальные площади, координаты центра изгиба и секториальные моменты инерции некоторых простейших сечений тонкостенных стержней . . . . . —

Стр.

§ 10. Формулы преобразования секториальных геометрических характеристик тонкостенных профилей 101
§ 11. Зависимость между секториальными и линейными геометрическими характеристиками тонкостенного стержня . 106
§ 12. Формулы координат центра изгиба и секториальных моментов инерции некоторых составных профилей . . . 112
§ 13. Учет отверстий для заклепок или болтов при вычислении секториальных геометрических характеристик тонкостенных профилей 114
§ 14. Определение координат центра изгиба и секториальных моментов инерции тонкостенных стержней по способу интегрирования произвольных эпюр 117
§ 15. Секториальные геометрические характеристики прокатных двутавров и швеллеров 122
§ 16. Численные примеры 125

Глава V. Теория упругой линии углов закручивания и практические методы определения изгибно-крутильных силовых факторов, связанных с депланацией сечения . . 142
§ 17. Приведение внешних сил, действующих на тонкостенный стержень . . . . . —
§ 18. Секториальные касательные напряжения τ_ω и изгибно-крутящий момент M_ω при действии на тонкостенный стержень продольных сил 150
§ 19. Дифференциальное уравнение упругой линии углов закручивания при действии на тонкостенный стержень продольных сил 152
§ 20. Интегрирование дифференциального уравнения углов закручивания. Граничные условия 153
§ 21. Значения частного интеграла $f(z)$ для основных нагрузок 158
§ 22. Правила знаков для силовых и кинематических изгибно-крутильных факторов 166
§ 23. Построение эпюр изгибно-крутильных силовых факторов. Таблица бимоментов и общих крутящих моментов . 168

Глава VI. Напряжения в тонкостенных стержнях при стесненном кручении и при совместном действии изгиба и кручения 177
§ 24. Нормальные напряжения . . . . . —
§ 25. Касательные напряжения 178
§ 26. Касательные напряжения в двутавровых балках, находящихся в условиях совместного действия изгиба и кручения 180
§ 27. Численные примеры вычисления нормальных и касательных напряжений 183
§ 28. Влияние жесткости стержня при чистом кручении на величину нормальных напряжений при изгибе и кручения . 188

Стр.

§ 29. Влияние эксцентричности прикрепления тонкостенной балки на опорах на расчетные нормальные напряжения . 191

Глава VII. Выявление рациональных типов незамкнутых тонкостенных профилей, работающих на стесненное кручение и на совместное действие изгиба кручения . . 200

§ 30. Оптимальные соотношения между размерами элементов для некоторых профилей 202

§ 31. Сравнение секториальной жесткости различных типов профилей 213

§ 32. Сравнение различных типов профилей с точки зрения жесткости их при изгибе 223

§ 33. Общие указания о рациональности применения различных типов профилей, находящихся в условиях совместного действия изгиба и кручения 233

Глава VIII. Практические приемы расчета на совместное действие изгиба и кручения двутавровых и швеллерных профилей 235

§ 34. Приведенная формула для подбора сечений двутавровых балок, находящихся в условиях поперечного изгиба и кручения . . . . . —

§ 35. Влияние эксцентричности приложения нагрузки на суммарные нормальные напряжения в двутавровых балках 239

§ 36. Расчет швеллерных и двутавровых прогонов под кровли на совместное действие изгиба и кручения . . . . . —

§ 37. Наивыгоднейший угол наклона кровли с точки зрения наилучшего использования материала швеллерного прогона 245

§ 38. Рациональные типы профилей для прогонов под кровли 249

§ 39. Подбор оптимальных размеров швеллерных металлических профилей для прогонов под кровли 255

§ 40. Расчет открытых тонкостенных стержней, усиленных планками или решеткой 263

Часть вторая

Системы из тонкостенных стержней

Глава I. Основные теоремы об упругих системах в применении к системам из тонкостенных стержней 275

§ 1. Работа внутренних сил . . . . . —

§ 2. Теоремы Бетти и Максвелла 279

§ 3. Теорема о взаимности реакций 281

§ 4. Взаимность реакций и перемещений 282

Глава II. Определение перемещений 283

§ 5. Формула для определения перемещений . . . . . —

Стр.

§ 6. Упрощения при определении перемещений 286
§ 7. Графоаналитический метод определения депланаций и углов закручивания 290
§ 8. Вычисление интегралов для случая, когда одна из эпюр прямолинейная 296
§ 9. Общие формулы и таблицы интегралов 297

Глава III. Расчет неразрезных тонкостенных балок на кручение
§ 10. Уравнение трех бимоментов 305
§ 11. Уравнение трех бимоментов при наличии на конце балки свешивающейся консоли или защемления от депланаций 311
§ 12. Расчет тонкостенной неразрезной балки на кручение . . . 313
§ 13. Бимоментные фокусные отношения и бимоментные фокусы 316
§ 14. Применение бимоментных фокусных отношений для определения бимоментов на концах загруженного пролета . 323
§ 15. Расчет тонкостенной неразрезной балки на кручение по методу бимоментных фокусов 325
§ 16. Расчет тонкостенных неразрезных балок на поворот опор вокруг оси балки 327
§ 17. Линии влияния для неразрезных тонкостенных балок . . 329
§ 18. Неразрезная тонкостенная балка на упруго вращающихся опорах 333

Глава IV. Расчет плоских рам из тонкостенных элементов методом сил 338
§ 19. Общие положения. Выбор основной системы . . . . . —
§ 20. Г-образная тонкостенная консольная рама 343
§ 21. Металлическая Г-образная рама, защемленная по концам против изгиба, закручивания и депланаций 348
§ 22. Симметричная тонкостенная П-образная рама 353

Глава V. Расчет балок и рам из тонкостенных элементов методом деформаций 360
§ 23. Количество основных неизвестных. Общие указании для расчета . . . . . —
§ 24. Формулы для коэффициентов уравнений метода деформаций 363
§ 25. Расчет неразрезных тонкостенных балок на кручение по методу деформаций. Уравнение трех депланаций 371
§ 26. Г-образная консольная рама 376
§ 27. Металлическая Г-образная рама, защемленная по концам против изгиба, закручивания и депланаций 380
§ 28. Симметричная тонкостенная П-образная рама 386
§ 29. Уравнения метода деформаций для рам с прямоугольной сеткой 391

Глава VI. Расчет рам из тонкостенных элементов по способу бимоментных фокусных отношений 396

Стр.

§ 30. Формулы для основвых неизвестных в рамах с несмещающимися узлами 396
§ 31. Расчет рамы из тонкостенных элементов по методу бимоментных фокусов 402
Глава VII. Приближенные методы расчета тонкостенных балочных и рамных систем на кручение 405
§ 32. Степень затухания опорных бимоментов по длине неразрезной балки . . . . . —
§ 33. Опорные бимоменты в неразрезных балках при загружении их равномерно распределенной по всей длине закручивающей нагрузкой 408
§ 34. Влияние опорных бимоментов на величины пролетных бимоментов в неразрезных балках 411
§ 35. Влияние угловых и линейных перемещений узлов рамы на опорные и узловые бимоменты 415
§ 36. Расчет плоских рам из тонкостенных элементов по методу последовательных приближений 420
§ 37. Расчет многопролетной тонкостенной рамы на кручение по методу последовательных приближений 426
§ 38. Расчет неплоских балочных и рамных систем из тонкостенных элементов 433
Приложения 434